

Propagation dans les objets du quotidien: étude des résonateurs



Hermann von Helmholtz
(1821-1894)

« Celui qui dans ses recherches scientifiques, cherche à obtenir des applications pratiques immédiates, peut être généralement assuré qu'il cherche en vain. Tout ce que la science peut achever est une connaissance parfaite et une compréhension parfaite de l'action des forces naturelles et morales. »

Hermann von Helmholtz

SOMMAIRE

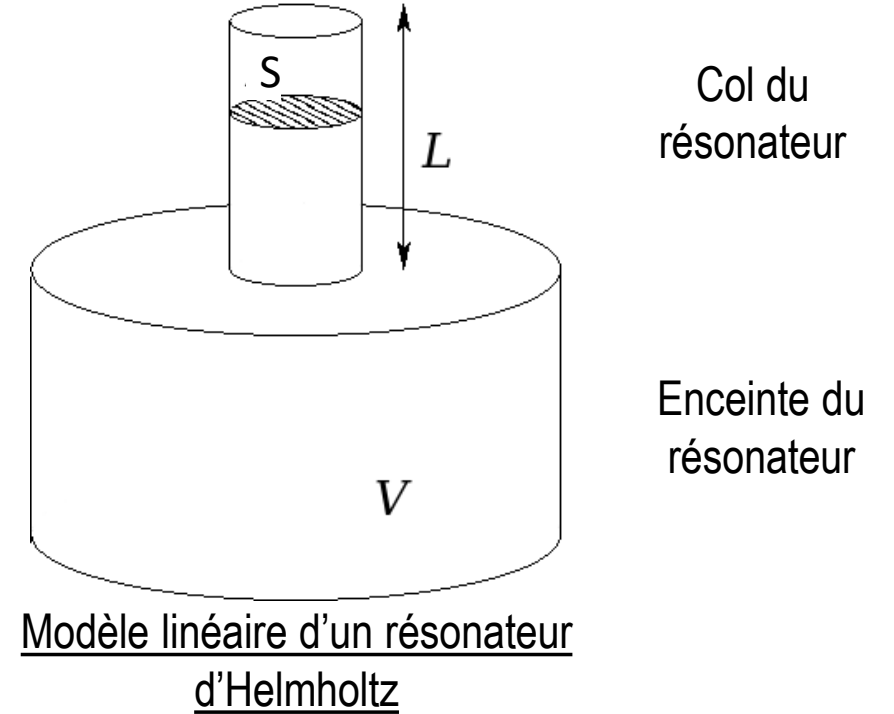
- Introduction
- Première approche des résonateurs
- Entre théorie et résultats : analyse des phénomènes
 - Théorie des résonateurs
 - Calculs et incertitudes
 - Analyse des résultats
 - Influence de la variation du volume
- Conclusion: Lien avec l'acoustique des vases
- Annexe



Première approche des résonateurs d'Helmholtz



Résonateurs en laiton de différentes tailles imaginés par Helmholtz pour ses premiers travaux



Expérience : Mesure de la réponse des résonateurs à plusieurs fréquences

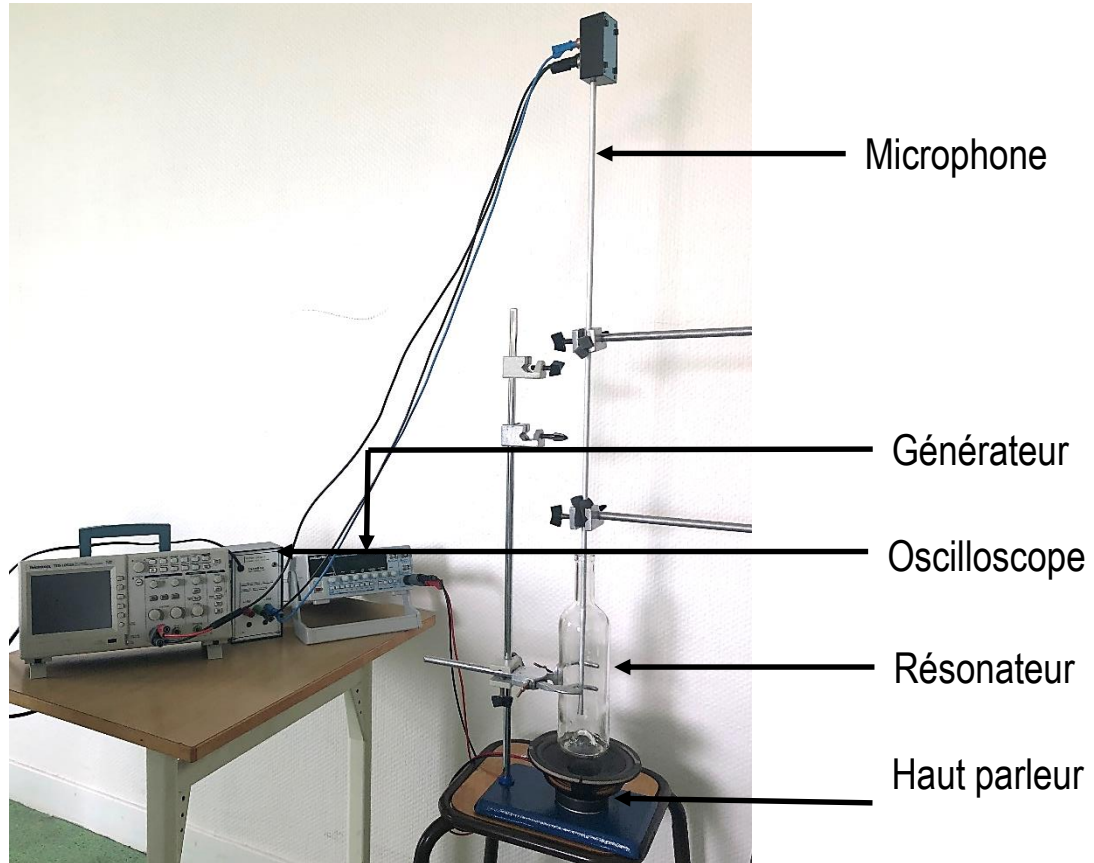


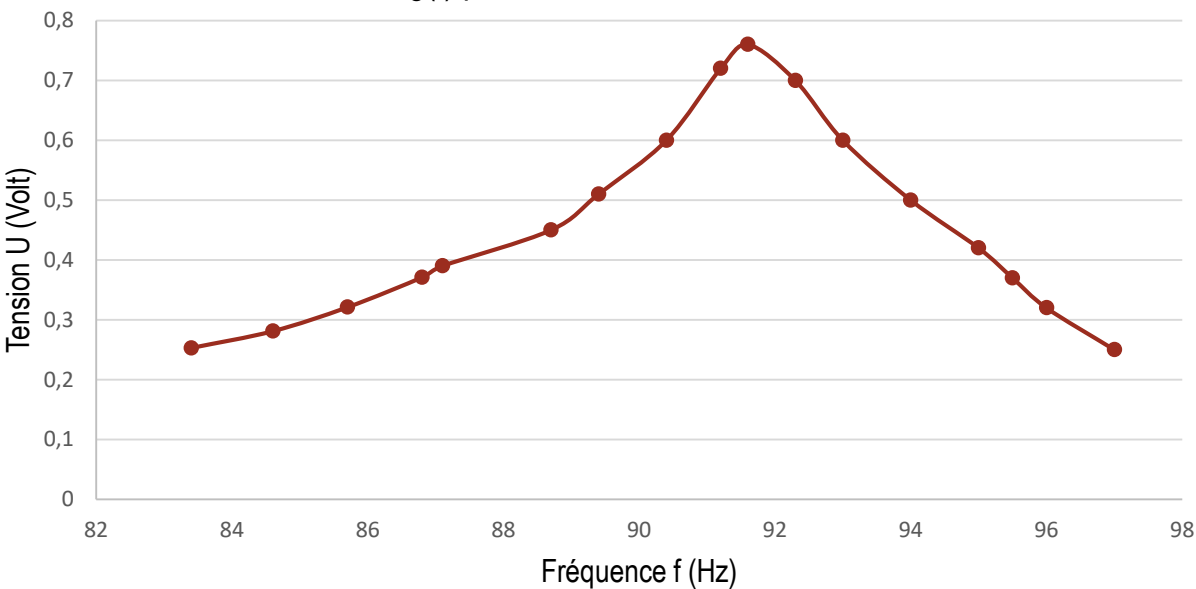
Schéma du montage



Différents résonateurs étudiés

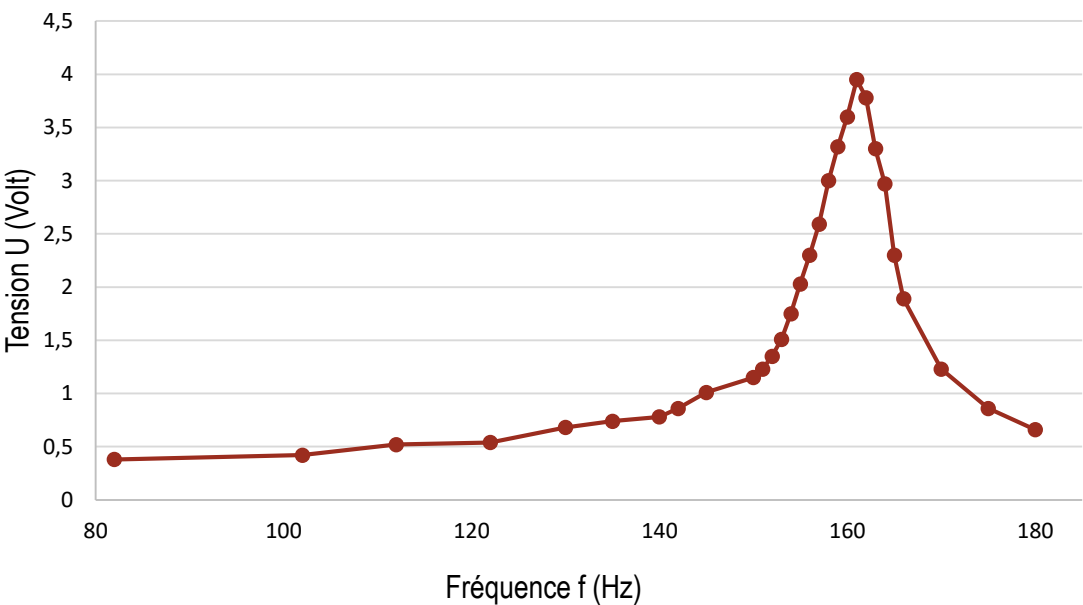
Mesure de fréquences pour des bouteilles en verre de volumes différents

U=g(f) pour une bouteille en verre de 75cl



$f_{exp} = 91,6 \text{ Hz}$

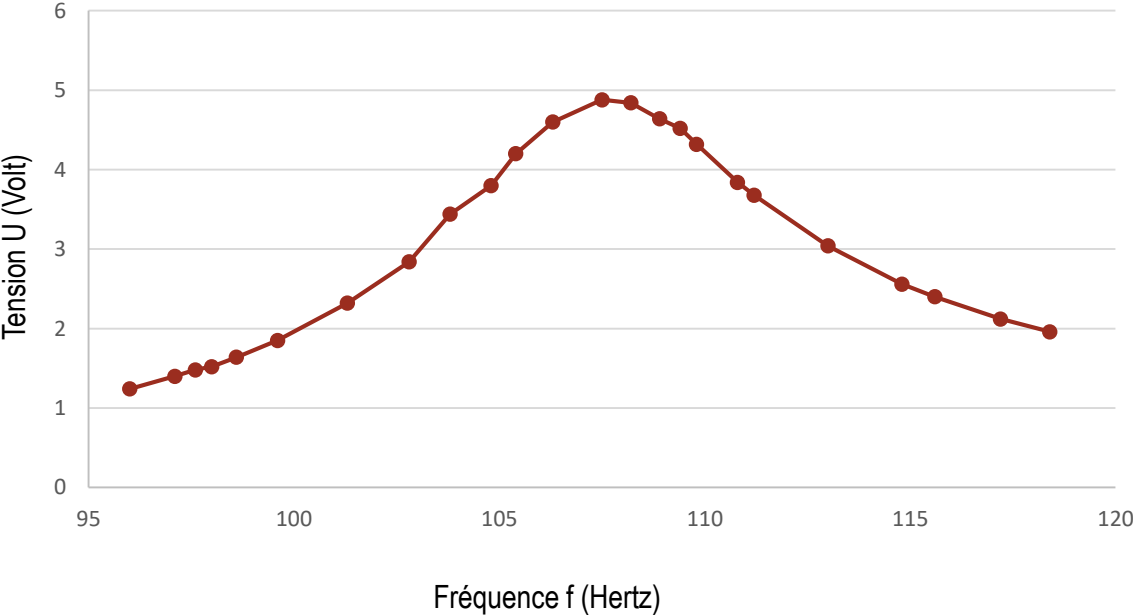
U=g(f) pour une bouteille en verre évasée de 37,5 cl



$f_{exp} = 161 \text{ Hz}$

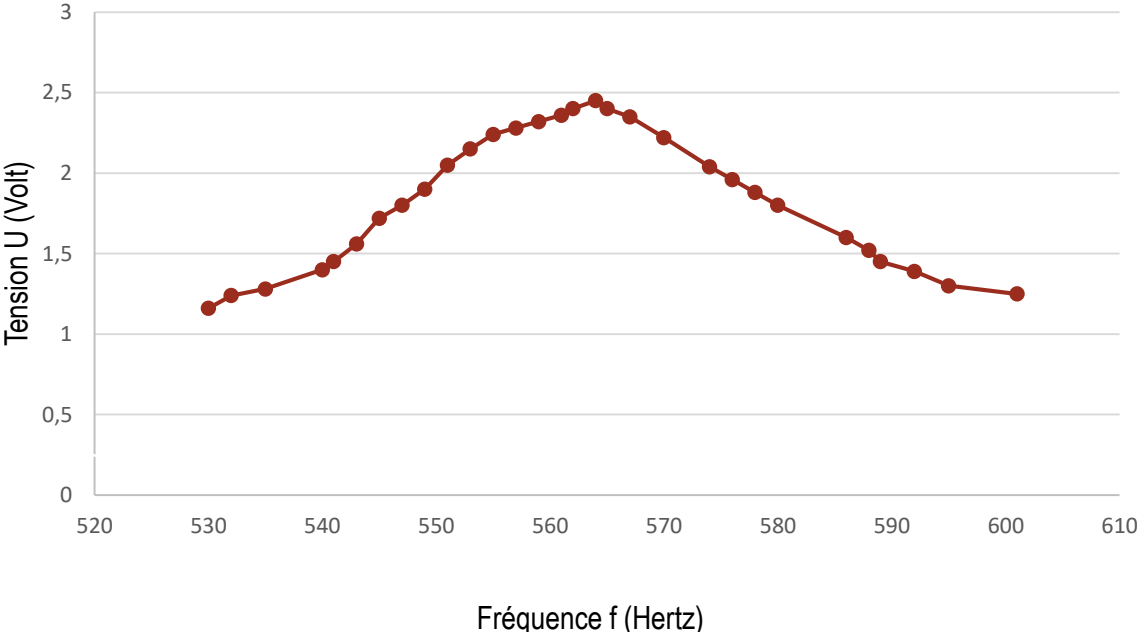
Mesure de fréquence pour deux bouteille d'eau en plastique de volume différent

U=g(f) pour une bouteille en plastique 1L



$f_{exp} = 107,5 \text{ Hz}$

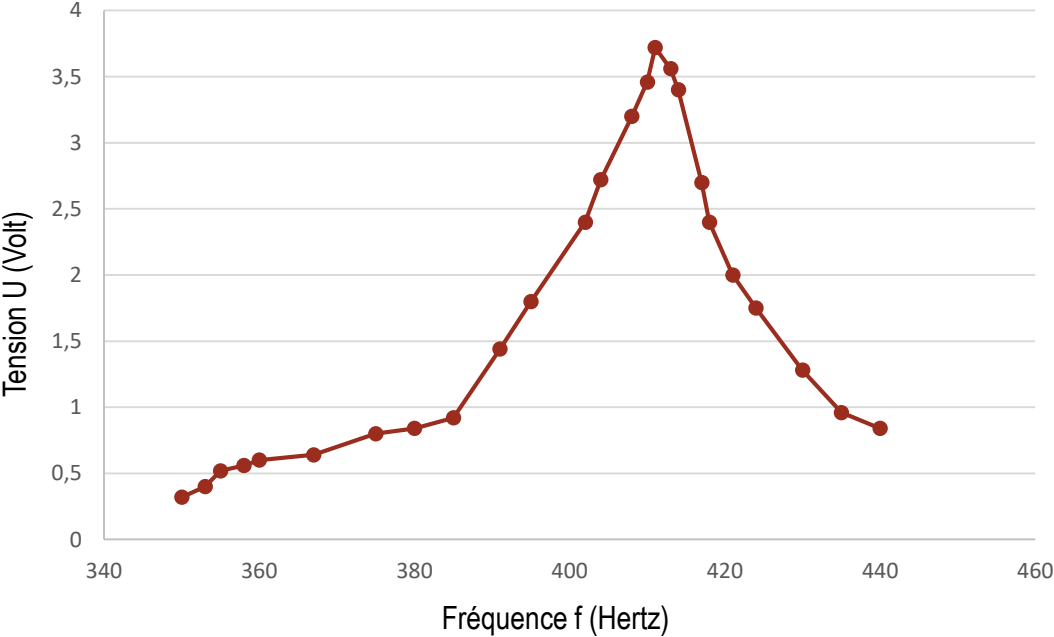
U= g(f) pour une bouteille plastique 50 cl



$f_{exp} = 263 \text{ Hz}$

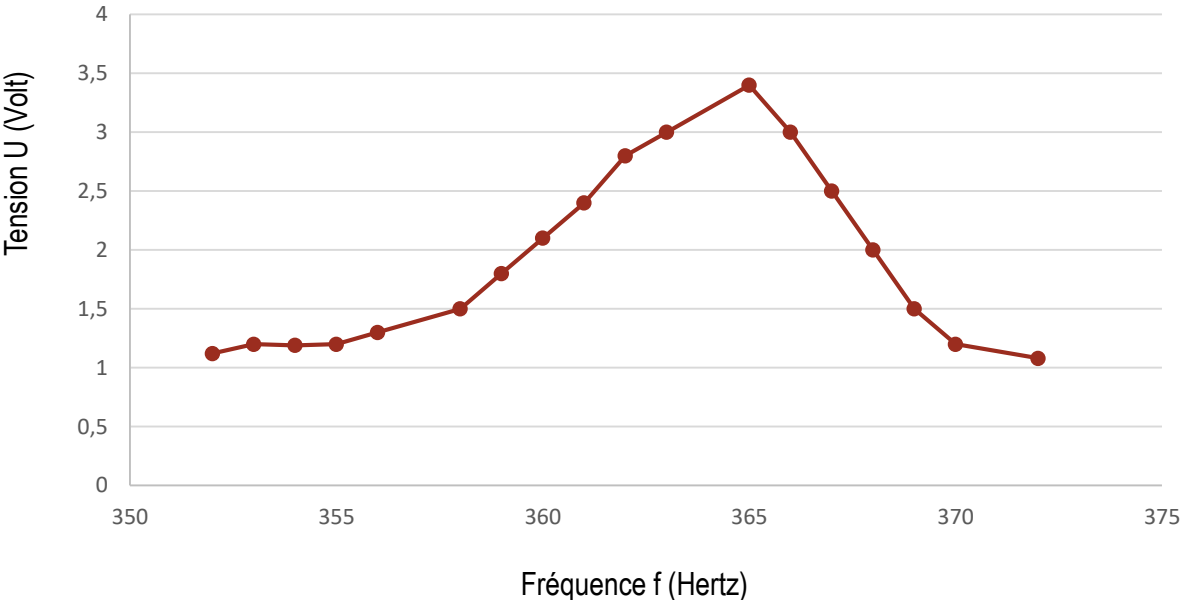
Mesure de fréquence pour deux canettes de géométrie différente

U=g(f) pour une canette de 33cl normale



$f_{exp} = 411 \text{ Hz}$

U=g(f) pour une canette 33cl allongée vide



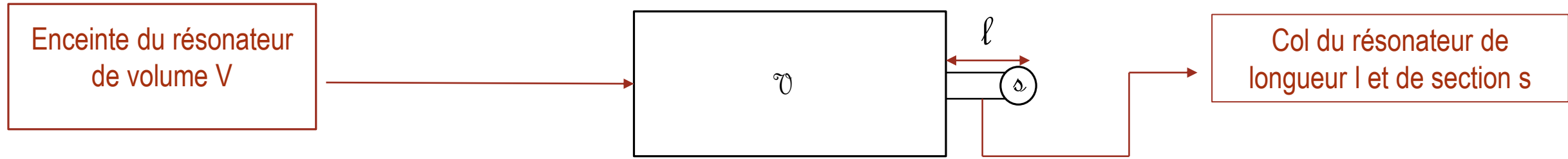
$f_{exp} = 365 \text{ Hz}$

Entre théorie et résultats, analyse des phénomènes

- Théorie des résonateurs
- Calculs des principales caractéristiques et leurs incertitudes
- Analyse des résultats
- Dernière expérience : influence de la variation du volume d'air dans un résonateur

Théorie des résonateurs à partir du système masse-ressort:

Le modèle le plus simple est de considérer que l'air situé dans le col oscille. On considère le résonateur comme analogue à un système masse-ressort d'après le modèle simplifié suivant:



La masse d'air contenue dans le col :

$$M = l * s * \rho$$

La masse M peut se mettre à vibrer à la fréquence :

$$f = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{K}{M}}$$

La constante de raideur notée K :

$$K = \frac{s^2 * \rho * c^2}{V}$$

La fréquence de résonance d'un résonateur d'Helmholtz est :

$$f = \frac{c}{2\pi} * \sqrt{\frac{s}{l * V}}$$

Calculs des grandeurs caractéristiques théoriques et incertitudes:

Résonateur d'Helmholtz	Volume de l'enceinte (m^3)	Longueur du col (cm)	Section du col (cm^2)	Fréquence de résonance théorique f_{th} (Hz)
Bouteille de vin en verre 75 cl	$6,25 \cdot 10^{-4}$	7,10	2,83	133,21
Bouteille en verre évasée	$3,54 \cdot 10^{-4}$	6,05	2,83	176,10
Bouteille d'eau en plastique 1L	$7,25 \cdot 10^{-4}$	7,50	4,90	155,83
Bouteille d'eau en plastique 0,5 cl	$4,03 \cdot 10^{-4}$	4,00	3,46	247,64
Canette 33cl	$2,94 \cdot 10^{-4}$	1,50	3,40	465,56
Canette 33cl allongée	$2,94 \cdot 10^{-4}$	1,01	3,40	539,48

Incertitude sur la fréquence de résonance des résonateurs:

On a comme fréquence théorique de résonance:

$$f = \frac{c}{2\pi} \times \sqrt{\frac{s}{l*V}}$$

D'où une incertitude de la forme:

$$\frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\frac{\Delta^2 s}{4*s^2} + \frac{\Delta^2 l}{4*l^2} + \frac{\Delta^2 V}{4*V^2}}$$

Avec:

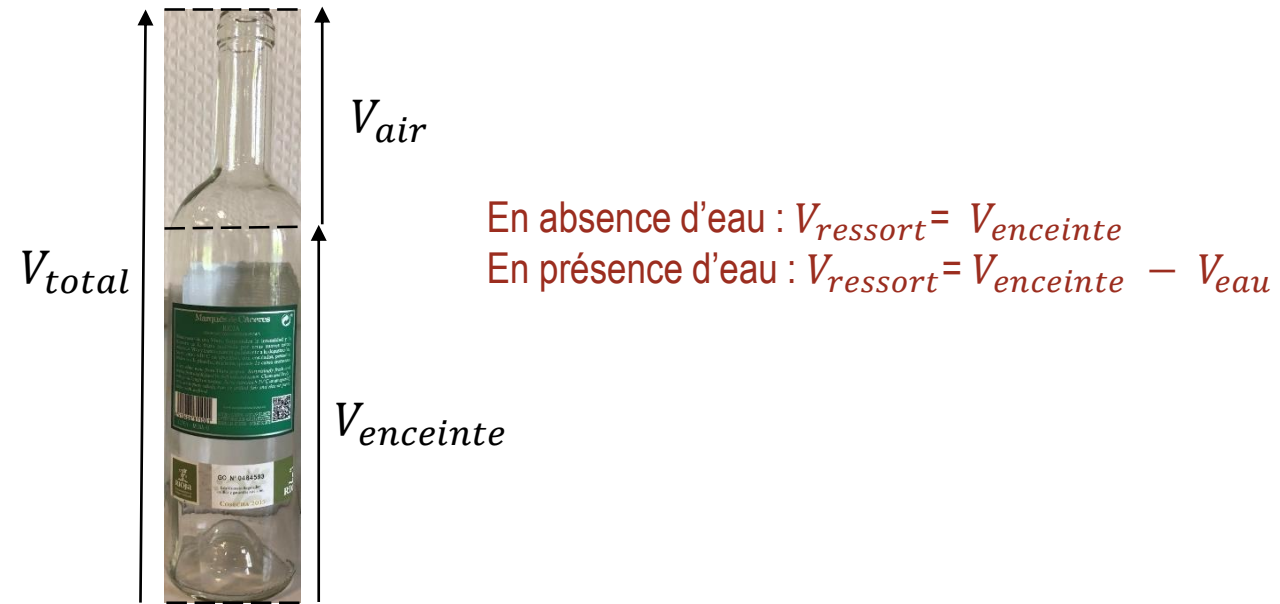
$$\begin{cases} \Delta(s) = 0,05 \text{ cm}^{-2} \\ \Delta(l) = 0,05 \text{ cm} \\ \Delta(V) = 5,77 * 10^{-5} m^3 \end{cases}$$

Résonateur	Bouteille en verre 75cl	Bouteille évasée	Bouteille plastique 1L	Bouteille plastique 50cl	Canette 33cl	Canette 33cl évasée
Fréquence (Hz)	(133 ± 12)	(176 ± 24)	(156 ± 13)	(248 ± 30)	(466 ± 81)	(540± 117)

Analyse des résultats:

Résonateur	Fréquences expérimentales/ théoriques	Observations
Bouteille en verre 75 cl	91,6 Hz / (133 ± 12) Hz	<ul style="list-style-type: none">➤ A longueur de col et section identiques, si le volume augmente, la fréquence de résonance diminue.➤ Lorsque la section, la longueur du col et le volume de l'enceinte sont identiques, fréquence varie en fonction de la géométrie.➤ Cohérence entre les résultats théoriques et expérimentaux.
Bouteille en verre évasée	161 Hz / (176 ± 24) Hz	
Bouteille en plastique 1L	165 Hz / (156 ± 13) Hz	
Bouteille en plastique 50 cl	263 Hz / (248 ± 30) Hz	
Canette 33 cl	411 Hz / (466 ± 81) Hz	
Canette 33cl allongée	365 Hz / (540 ± 117) Hz	

Evolution de la fréquence en fonction du volume d'eau ajouté:

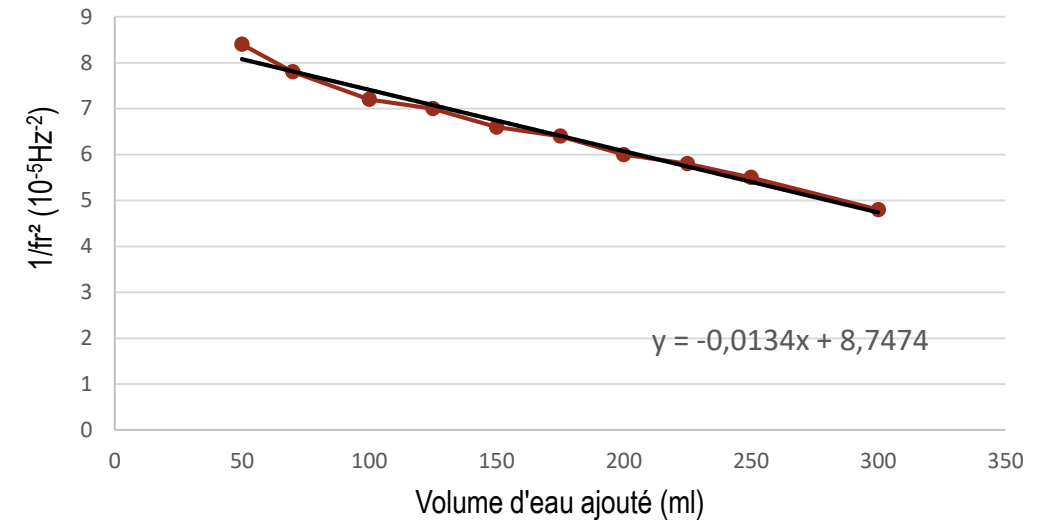


Rappel : $f_r^2 = \frac{c^2}{4\pi^2} * \frac{s}{l * V}$,

En remplaçant V par $V_{résonant}$ on obtient : $f_r^2 = \frac{c^2}{4\pi^2} * \frac{s}{l * (V_{enceinte} - V_{eau})}$

$$\frac{1}{f_r^2} = \frac{(V_{enceinte} - V_{eau})}{\frac{c^2 * s}{4\pi^2 * l}}$$

Evolution fréquence en fonction volume d'eau



Equation droite : $\frac{1}{f_r^2} = -1,34 * 10^{-4} * V_{eau} + 8,74 * 10^{-5}$

Avec $A = -1,34 * 10^{-4} = \frac{-4\pi^2 * l}{c^2 * s}$ et $B = 8,74 * 10^{-5} = \frac{4\pi^2 * l}{c^2 * s} * V_{eau}$

Incertitudes : $A = (-1,34 \pm 0,20) * 10^{-4} L^{-1} . Hz^{-2}$
 $B = (8,74 \pm 0,41) * 10^{-5} Hz^{-2}$

Lien avec l'acoustique des vases



Orifices dans les murs des églises



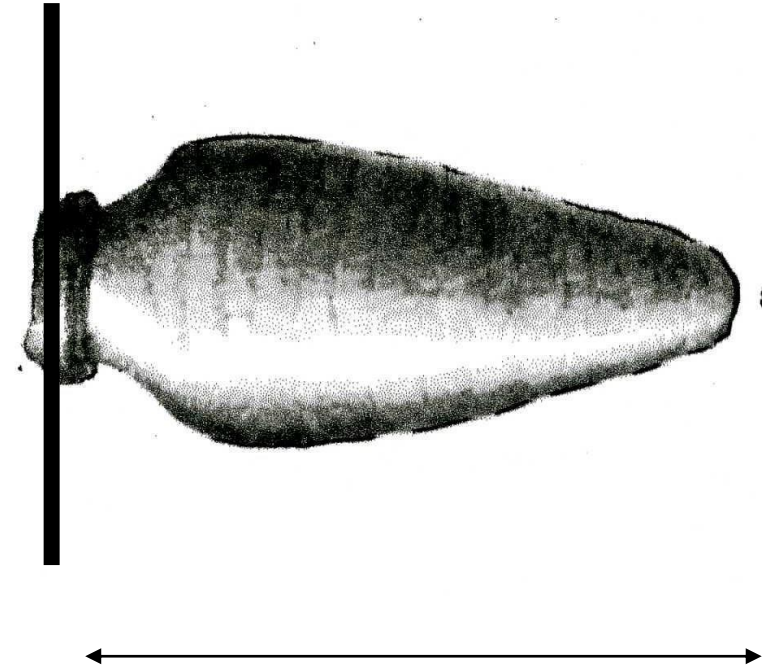
Différents vases acoustiques présents dans les églises

Comment sont-ils disposés ?



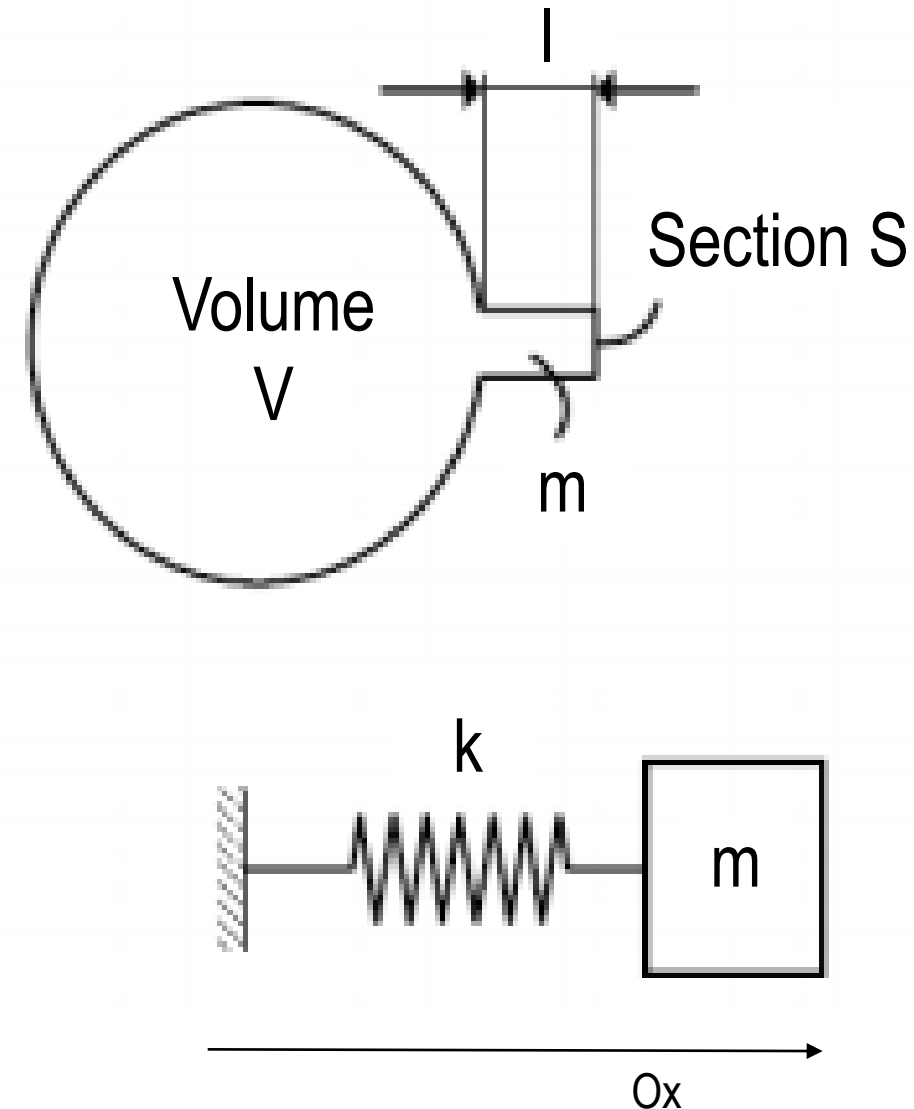
Vase noyé dans le blocage en lieu et place d'une pierre

Mur affleurant le col du vase



Partie du vase noyé dans le mur au milieu des pierres

ANNEXE 1



On applique PFD au système masse-ressort de masse m .

Forces : $\begin{cases} F_p = \text{Force de pr  ssion} \\ F_k = \text{Force de rappel du ressort} \end{cases}$

Sur Ox on a : $\boxed{m \cdot x''(t) = -K \cdot x(t)}$ (1) $\longleftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Et    l  quilibre on a $\boxed{F_p = F_k}$ (2)

ANNEXE 1

On introduit le coefficient de compressibilité adiabatique : $\chi_s = \frac{\delta V}{V * \delta P} = \rho * c^2$

$$\text{où } \begin{cases} \delta V = s * x(t) \\ \delta P = p \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \delta V = s * x(t) \\ p = \frac{-s * x(t)}{\chi_s * V} \end{cases}$$

A l'équilibre, (2) permet d'écrire $K = \frac{s^2}{\chi_s * V}$ or $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Soit après calculs, la fréquence de résonance suivante :

$$f_r = \frac{c}{2\pi} * \sqrt{\frac{s}{V * l}}$$

ANNEXE 2

Equation de la droite : $Y = A * V_{eau} + B = \frac{-1}{a} * V_{eau} + \frac{1}{a} * V_{enceinte}$ avec $a = \frac{4 * \pi^2 * l}{c^2 * s}$

Etude du coefficient directeur A et à l'ordonnée à l'origine B :

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} A = \frac{-1}{a} \\ B = \frac{V_{enceinte}}{a} = -V_{enceinte} * A \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{a} \\ V_{enceinte} = \frac{-B}{A} \end{cases}$$

Pour la bouteille en verre de 75 cl on a

$$\begin{cases} V_{enceinte} = \frac{-8,74 * 10^{-5}}{-1,34 * 10^{-4}} = 65,2 \text{ cl} \\ l_{col} = \frac{4 * \pi^2 * 1,34 * 10^{-4}}{345^2 * (1,9 * 10^{-4})} = 7,6 \text{ cm} \end{cases}$$

Valeurs expérimentales	$l_{col} = 7,6 \text{ cm}$	$V_{enceinte} = 65,2 \text{ cl}$
Valeurs théoriques	$l_{col} = 7,10 \text{ cm}$	$V_{enceinte} = 75 \text{ cl}$