



# Contrainte sur une structure : les voûtes plein cintres

---

COMMENT S'ASSURER QUE LA VOÛTE EST STABLE ?

# Sommaire

- I. Stabilité et mode de rupture
- II. Construction d'une voûte
- III. Analogie voûte et chaînette
- IV. Interprétation des résultats

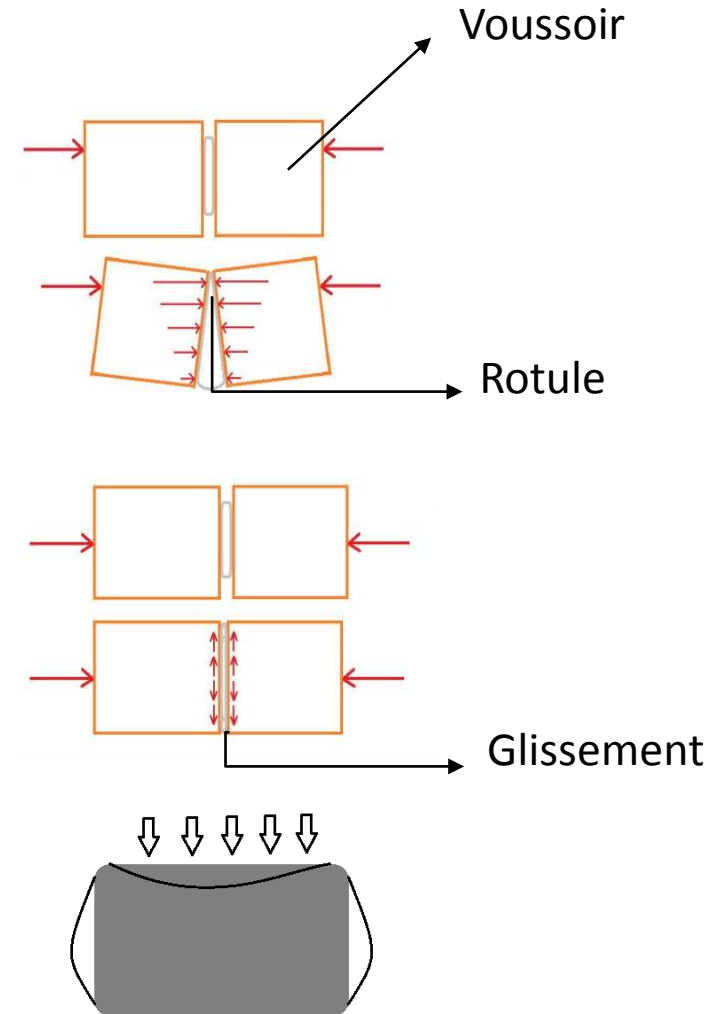
# I. Stabilité et mode de rupture

3 conditions de stabilité :

L'équilibre statique:

Le frottement:

La résistance :



## II. Construction d'une voûte



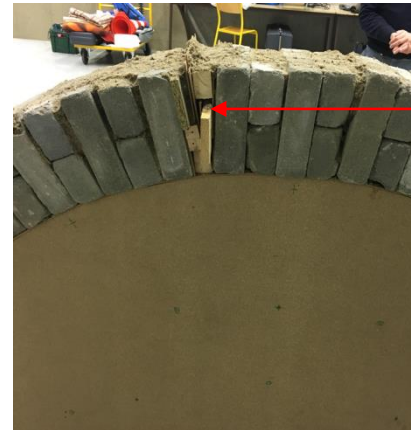
→ mortier

→ Cintre : demi cercle de rayon  $r = 1\text{m}$

→ Briques de béton : 96 de 3 kg chacune

Masse total de la voûte: 288 kg

Manque d'espace →

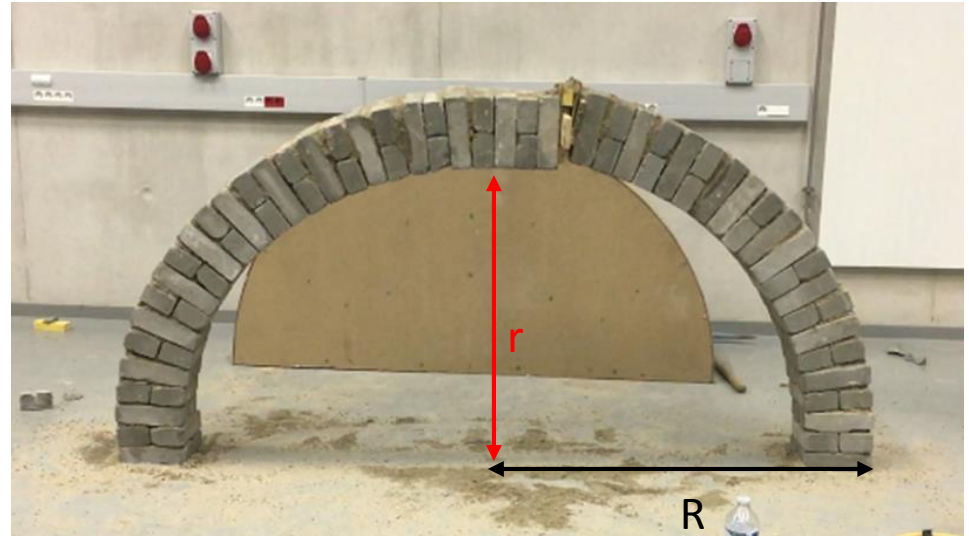


→ Comblé par du bois

# Contrefort

Contrefort

Le contrefort permet de contenir les efforts on a alors une **meilleure stabilité**



$R = 1,22\text{m}$  et  $r = 1\text{m}$



# Masses additionnelles



Glissement

Poids propre stable  
Léger glissement



Poids propre + 3kg  
Léger abaissement



Poids propre + 6kg : effondrement



Stabilité et rupture

Voûte

Analogie

Interprétation

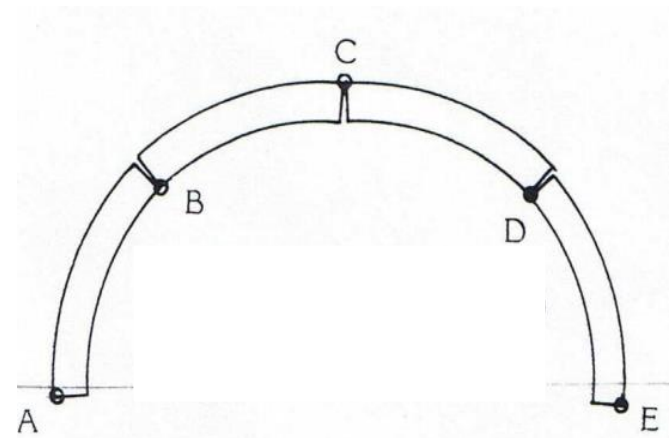
# Rupture



Rotule

Il y a glissement entre le bois et les briques

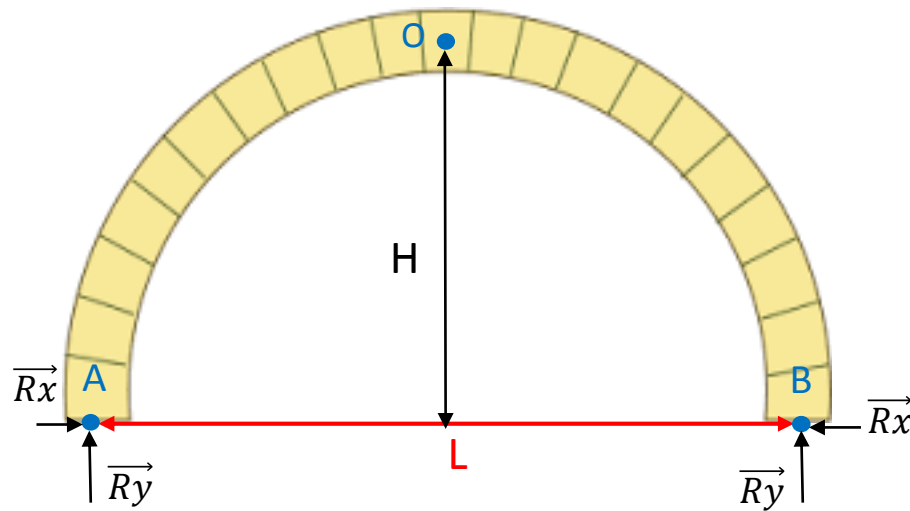
Rupture à 5 rotules



# Calcul des réactions



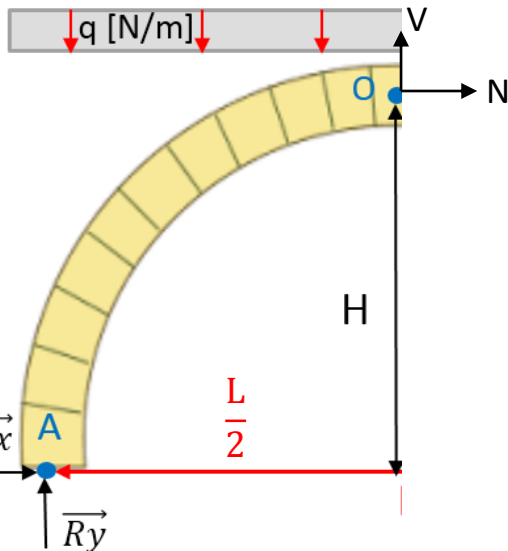
Modélisation masse uniforme



$\vec{R}_x$  : réaction tangentielle

$\vec{R}_y$  : réaction normale

$q = \frac{m g}{L}$  : force linéique



Principe fondamentale de la statique  
appliqué à la voûte puis à la demi voûte :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$



$$R_y = \frac{qL}{2}$$

$$R_x = \frac{qL^2}{8H}$$

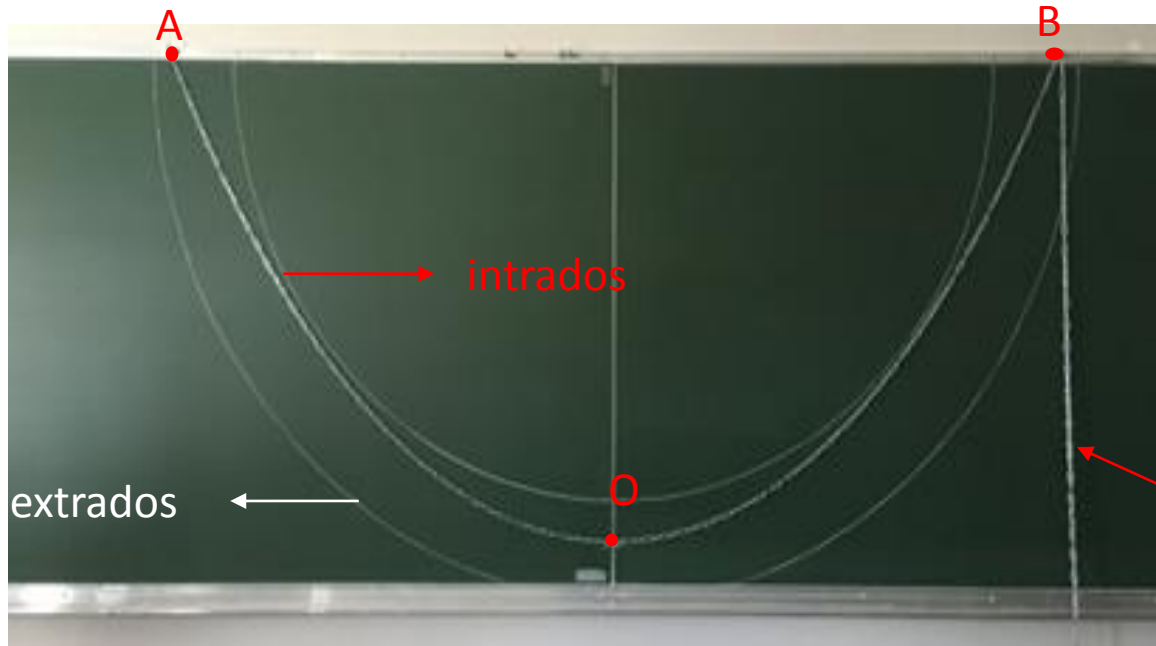


$$R_y = 1284 \text{ N}$$

$$R_x = 642 \text{ N}$$

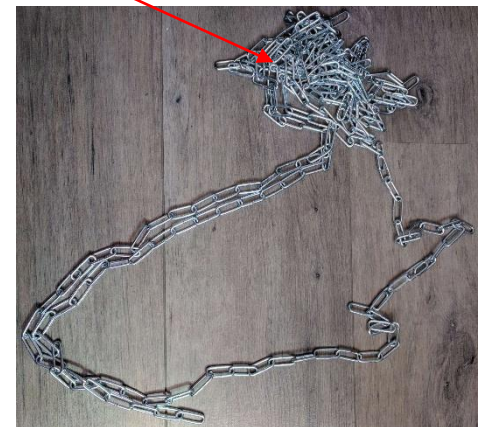


# III. Analogie voûte et chaînette

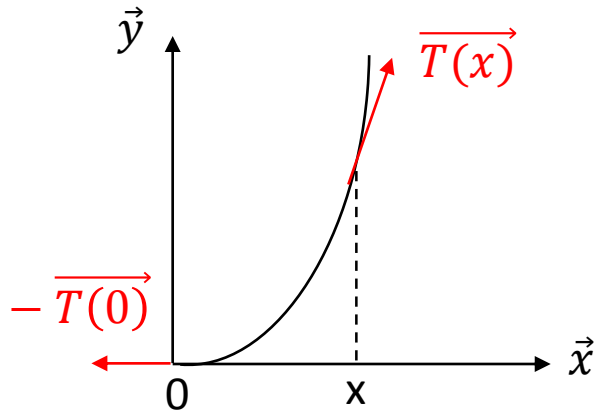


Dessin de la voûte en taille réelle

Chaîne de masse linéique :  $\mu = 101 \text{ g/m}$   
et de longueur :  $l = 3,38 \text{ m}$



# Cosinus hyperbolique



Principe fondamentale de la statique :

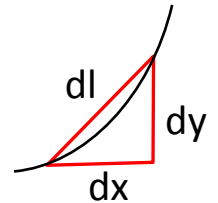
$$\text{sur } \vec{x} : T_x(x) = T_x(0)$$

$$\text{Sur } \vec{y} : T_y(x) = \mu dl g \quad (1)$$

Théorème de Pythagore :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\text{donc } \frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2)$$

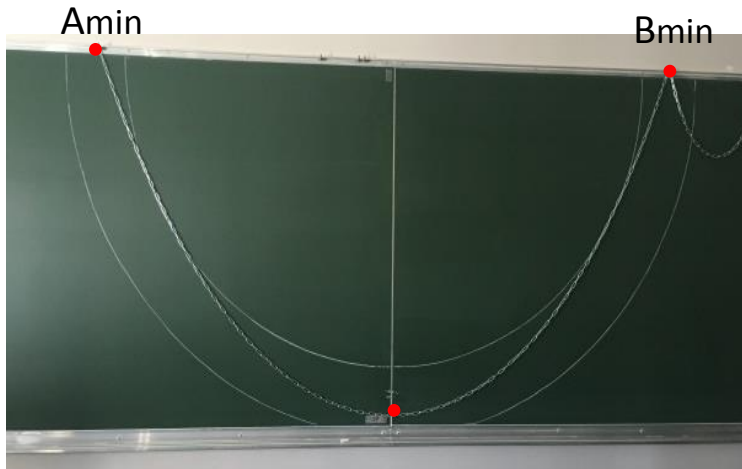


$$\text{De plus : } \frac{T_y}{T_x} = \frac{dy}{dx} = y'(x) \quad (3)$$

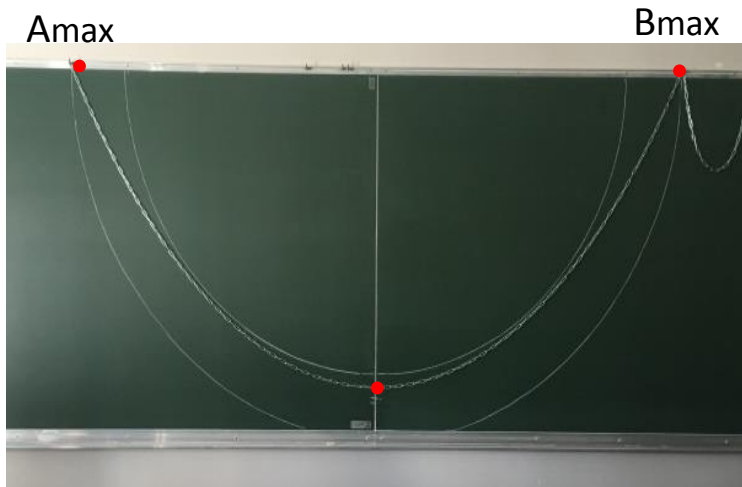
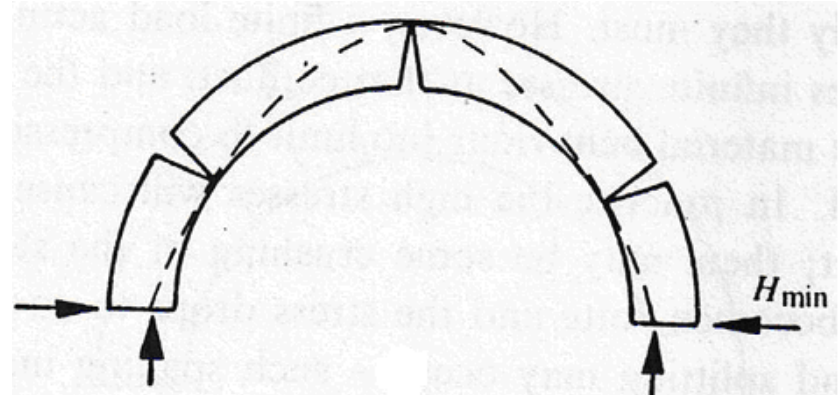
En remplaçant (2) et (3) dans l'équation (1) ça nous conduit à une équation différentielle qu'on résout.

$$\text{Ainsi } y(x) = \frac{T_x}{\mu g} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu g}{T_x} x\right)$$

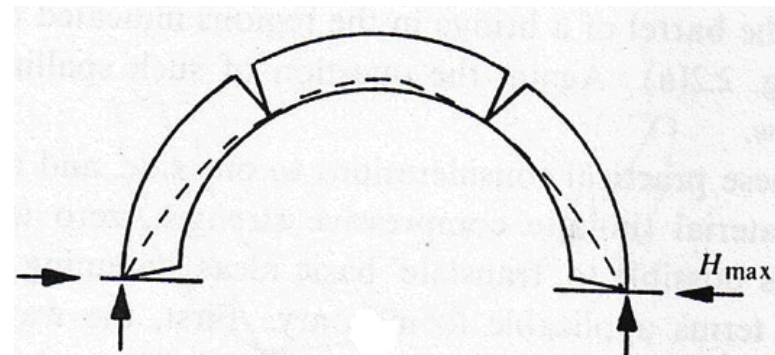
# Positions limites



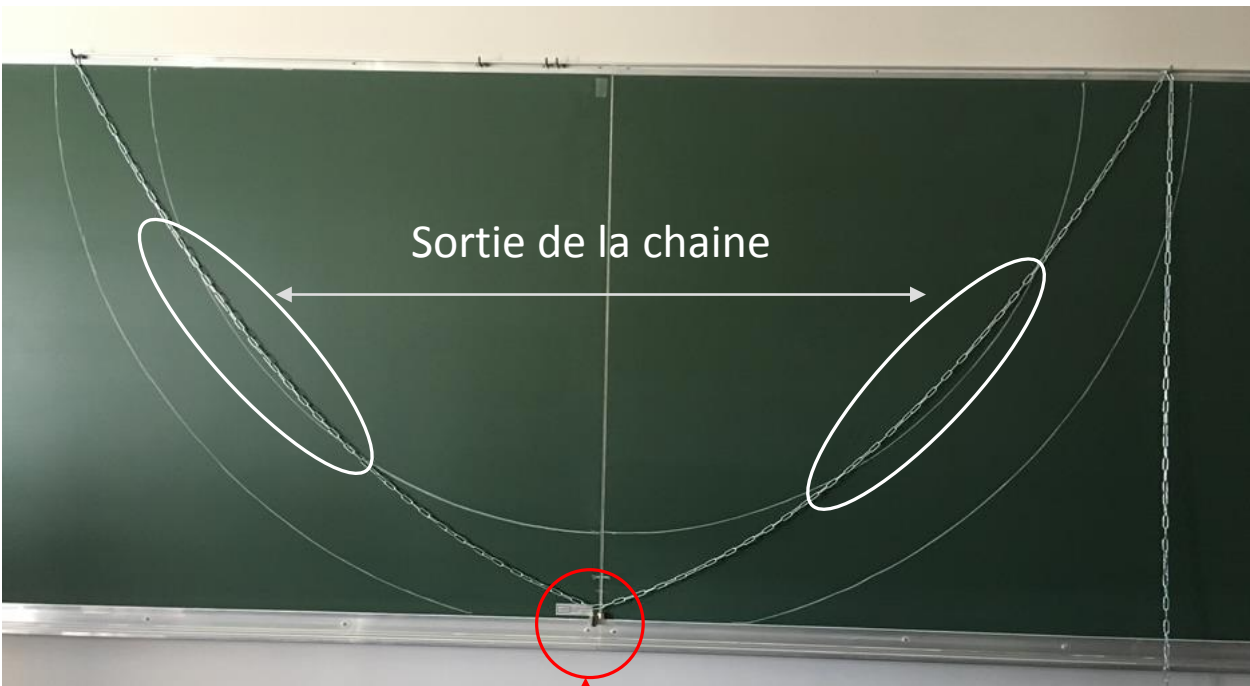
$A_{min} = B_{min} = 9,5 \text{ cm}$  et  $O = 117 \text{ cm}$



$A_{max} = B_{max} = 22 \text{ cm}$  et  $O = 104 \text{ cm}$



# Résultat :

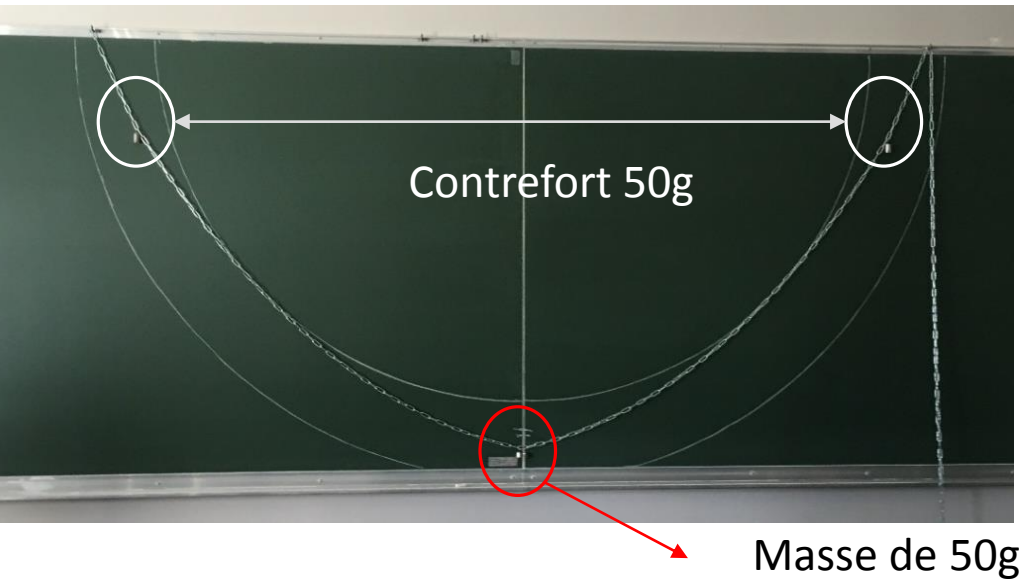


Stabilité non assuré à partir de 30g de masse additionnelle

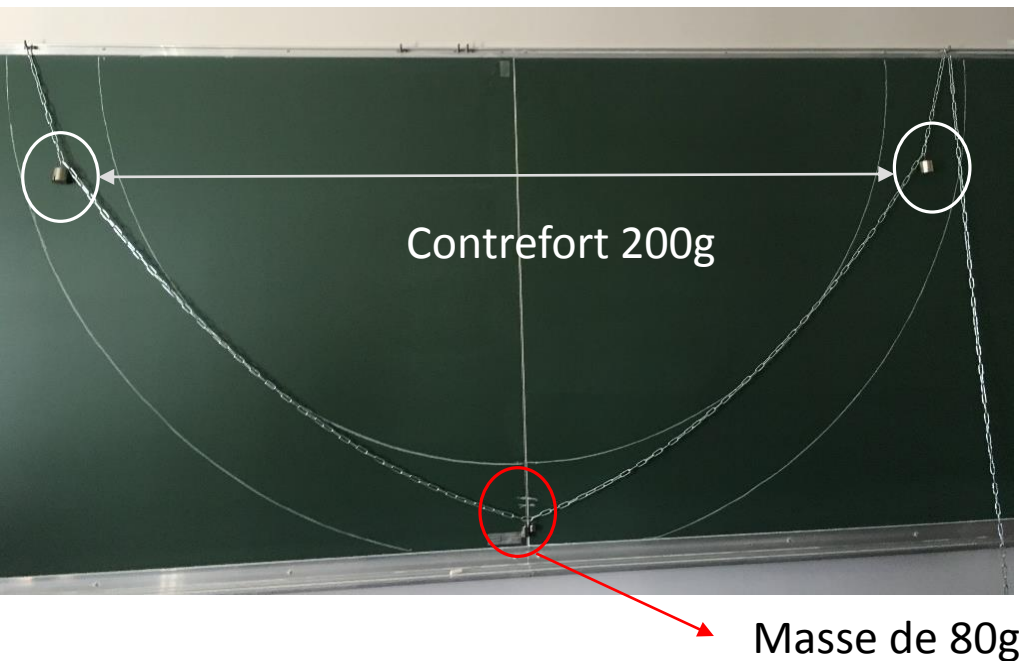
Masse de 35g

Comparaison avec la voûte:  $\mu_{\text{funiculaire}} = 0,1\text{kg/m}$  supporte 30g maximum

$\mu_{\text{voûte}} = 118\text{kg/m}$  supportera 35,4kg maximum



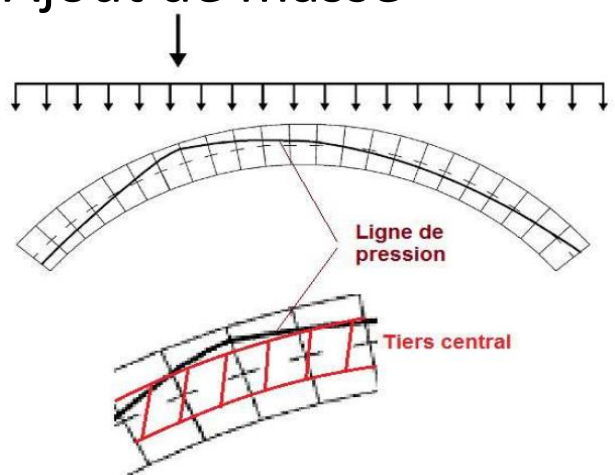
Contrefort de 50g voûte stable  
jusqu'à **55g** de masse additionnelle



Contrefort de 200g voûte stable  
jusqu'à **85g** de masse additionnelle



# IV. Interprétation des résultats

Stabilité	Instabilité
<ul style="list-style-type: none"><li>• la ligne de pression contenue en intrados et l'extrados</li><li>• Favorisé par la règle du tiers centrale</li><li>• Les contreforts lors d'ajout de masse sur la clé de voute</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Plus d'équilibre statique</li><li>• Apparition de 4 rotules</li><li>• Ajout de masse</li></ul> 

Les résultats obtenues expérimentalement sont très inférieures à ceux attendus.