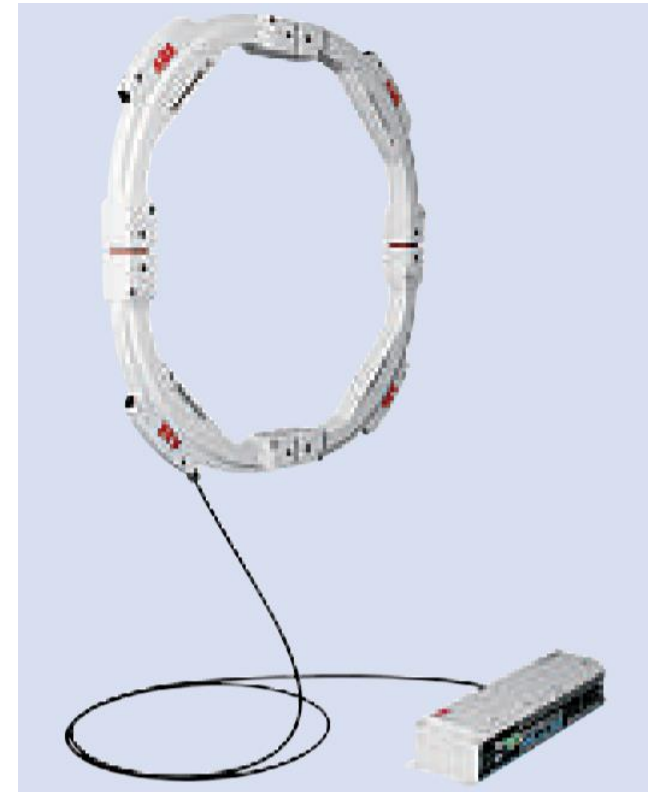
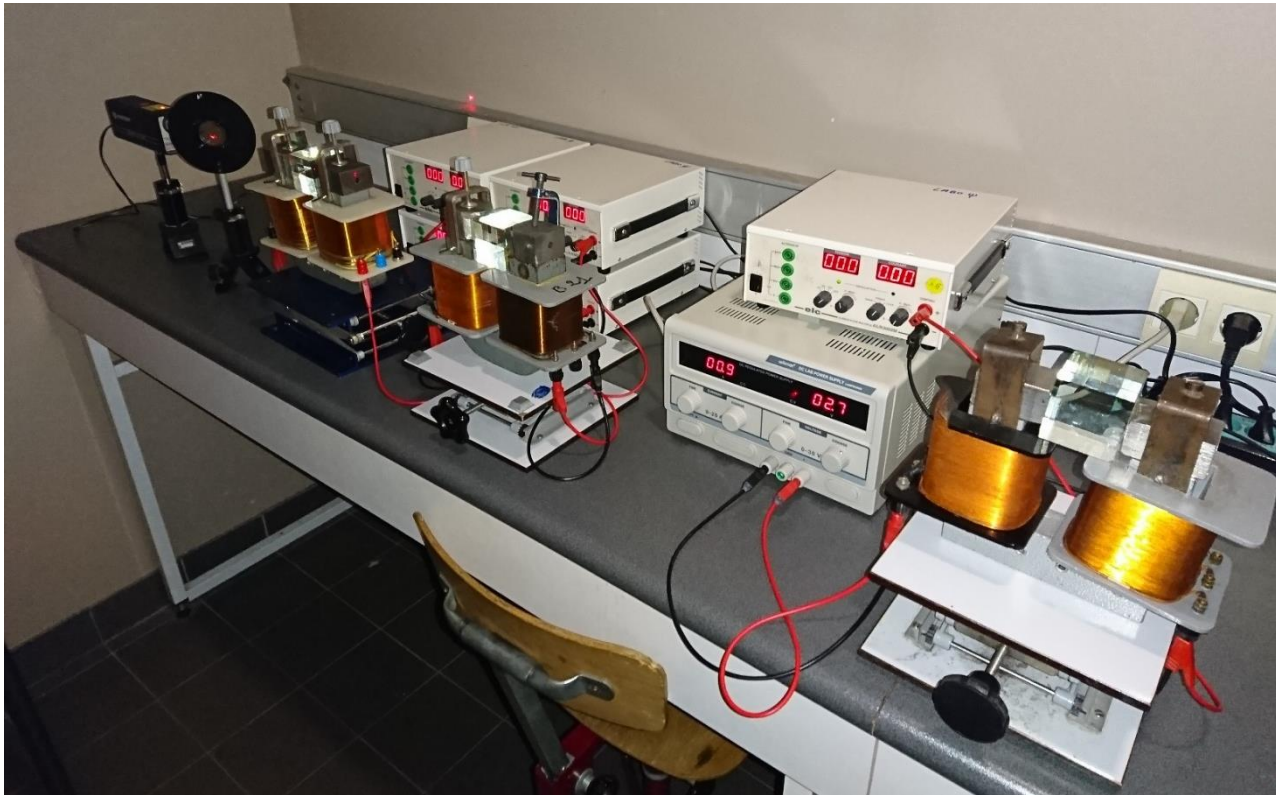
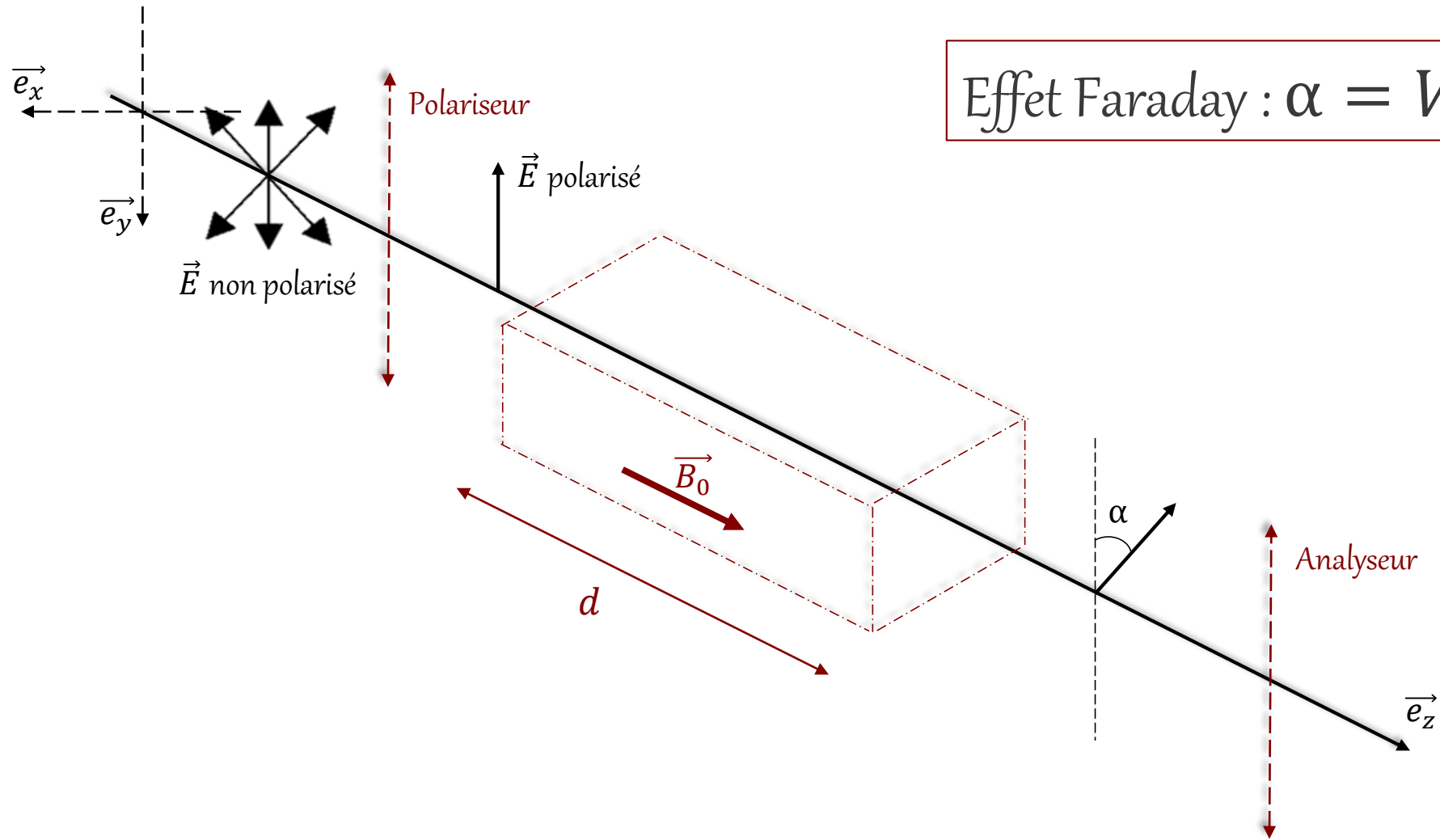


Application de l'effet Faraday : l'ampèremètre optique

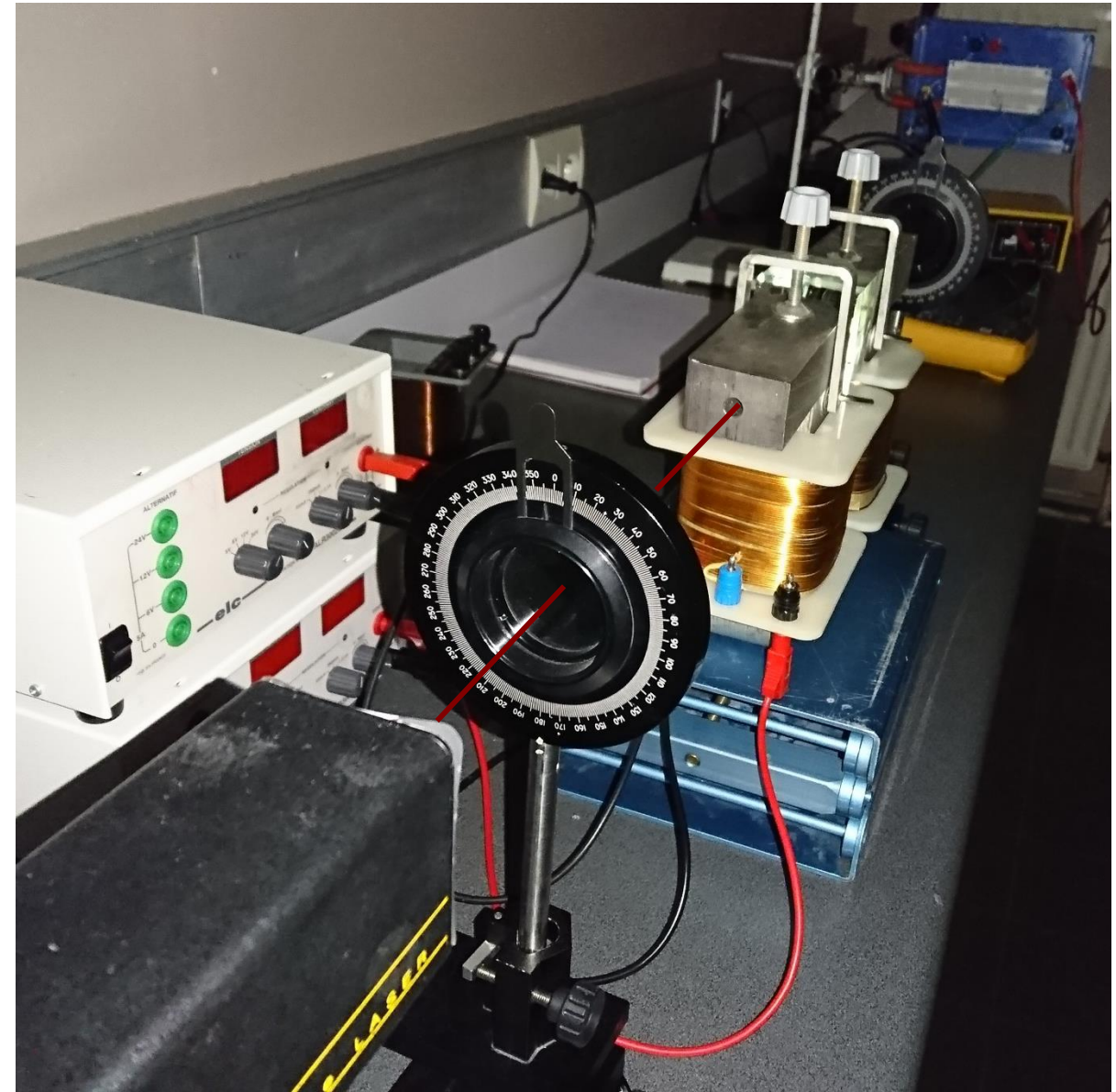
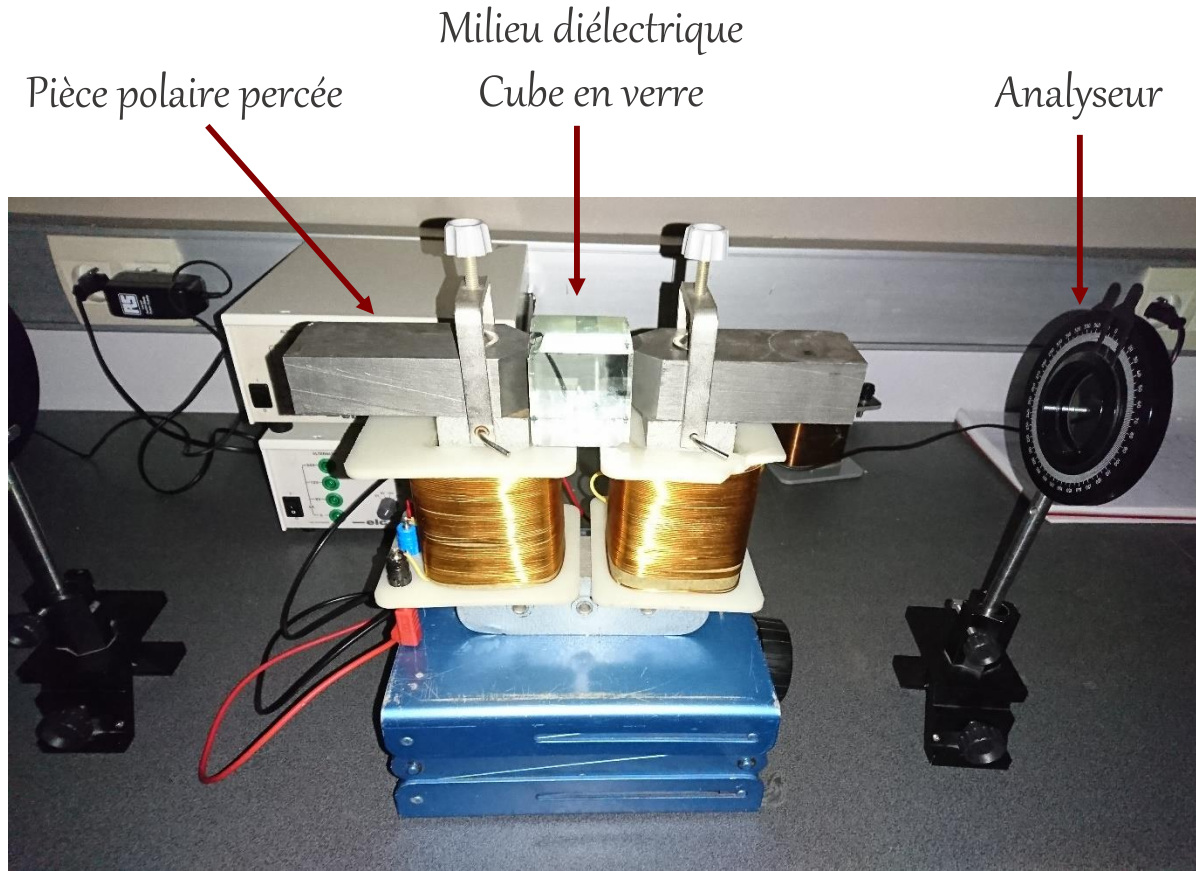


Présentation

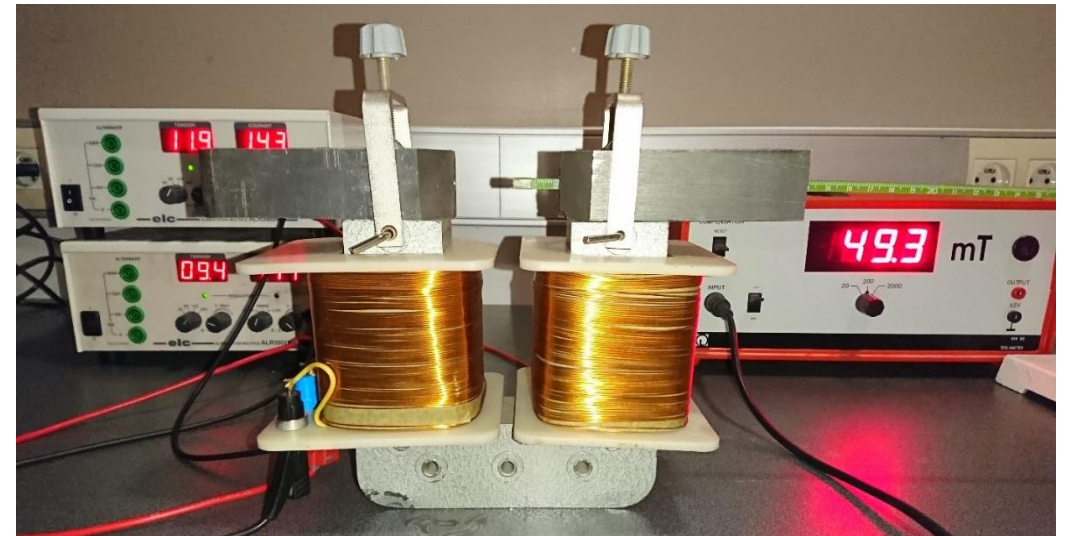
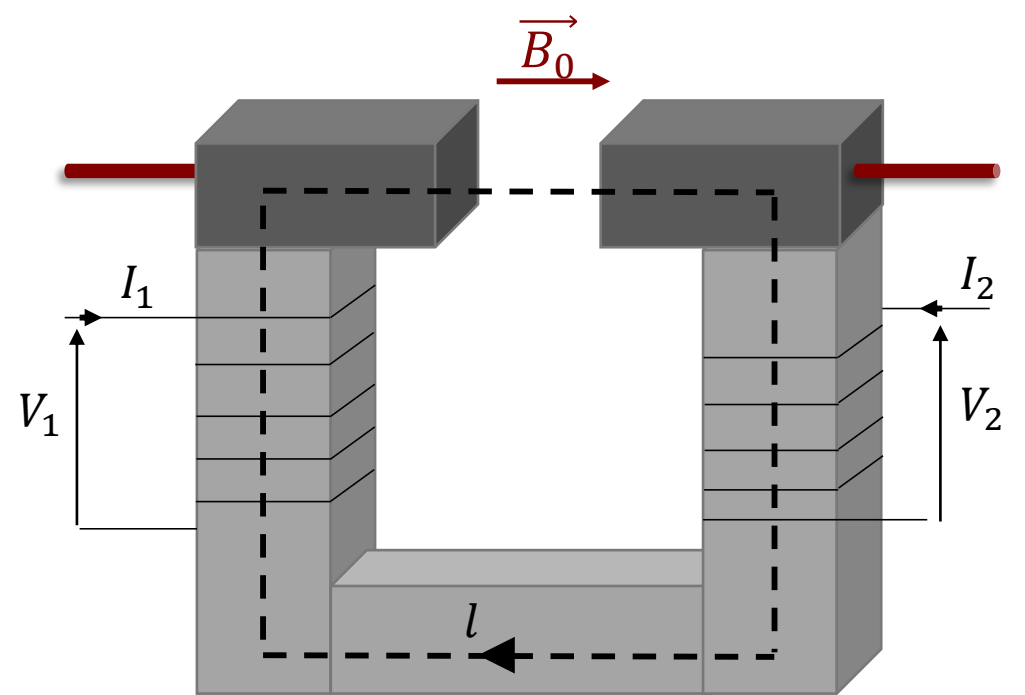
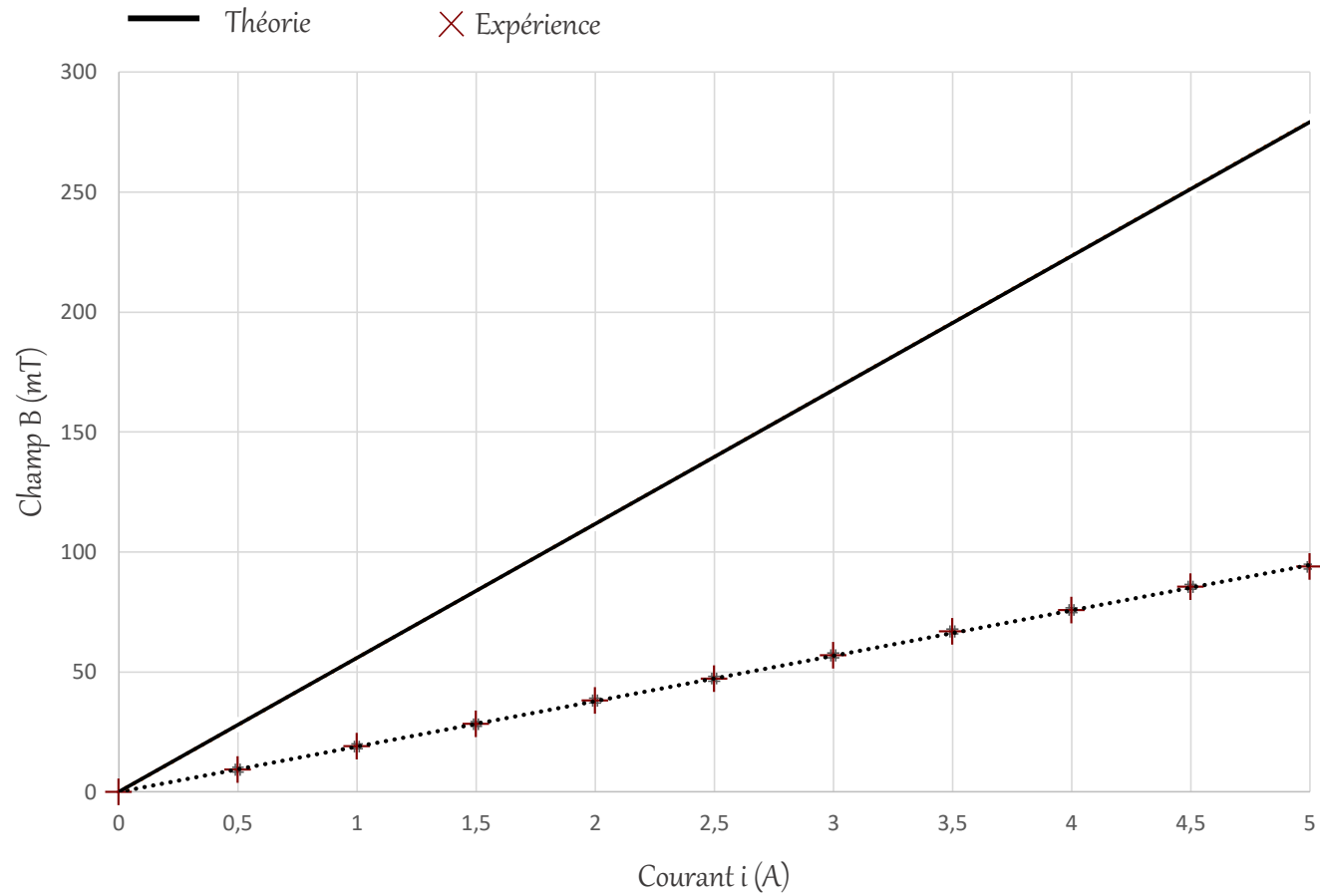


$$\text{Effet Faraday : } \alpha = V d B_0$$

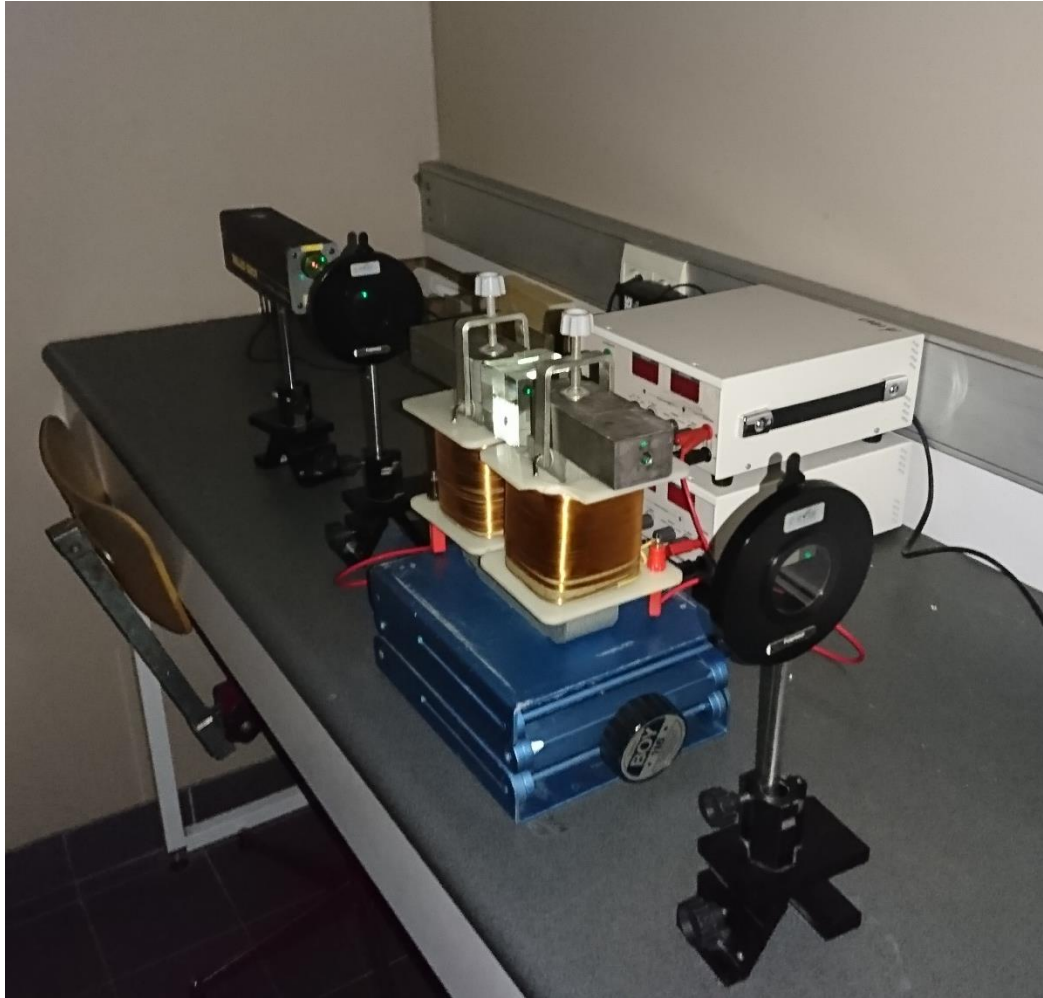
Montage expérimental



Création du champ magnétique

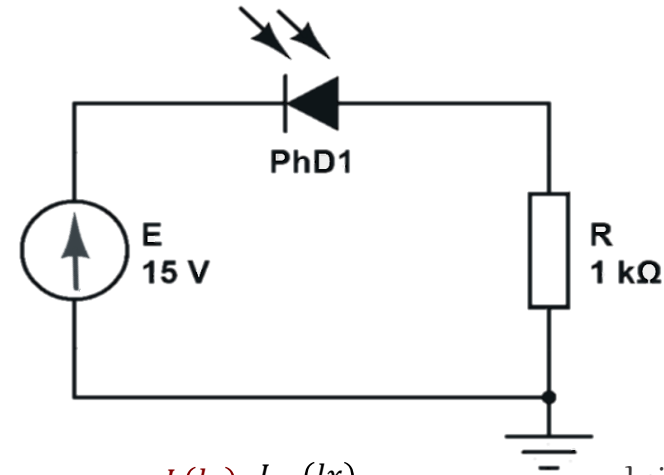


Expérimentation et loi de Malus



Relevés:

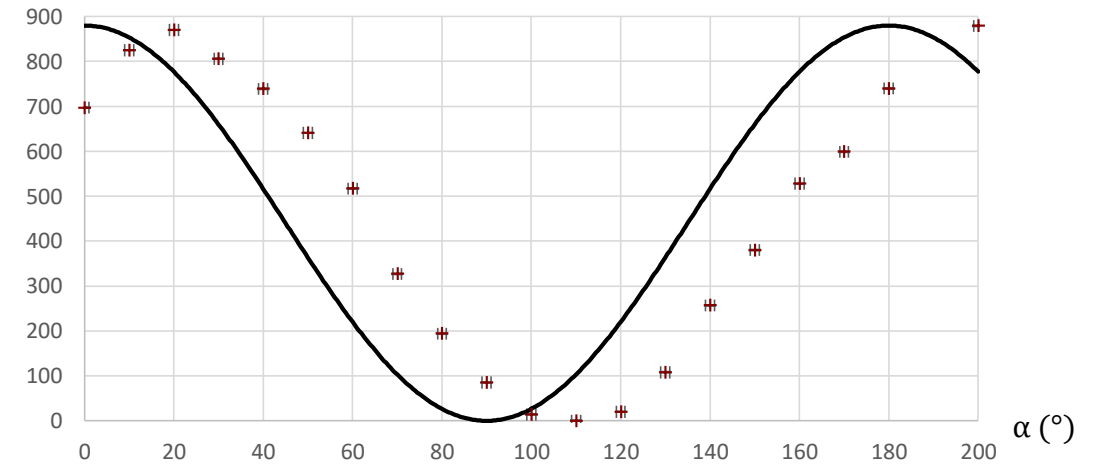
Mesure de la tension aux bornes de la *résistance* dans le montage suivant



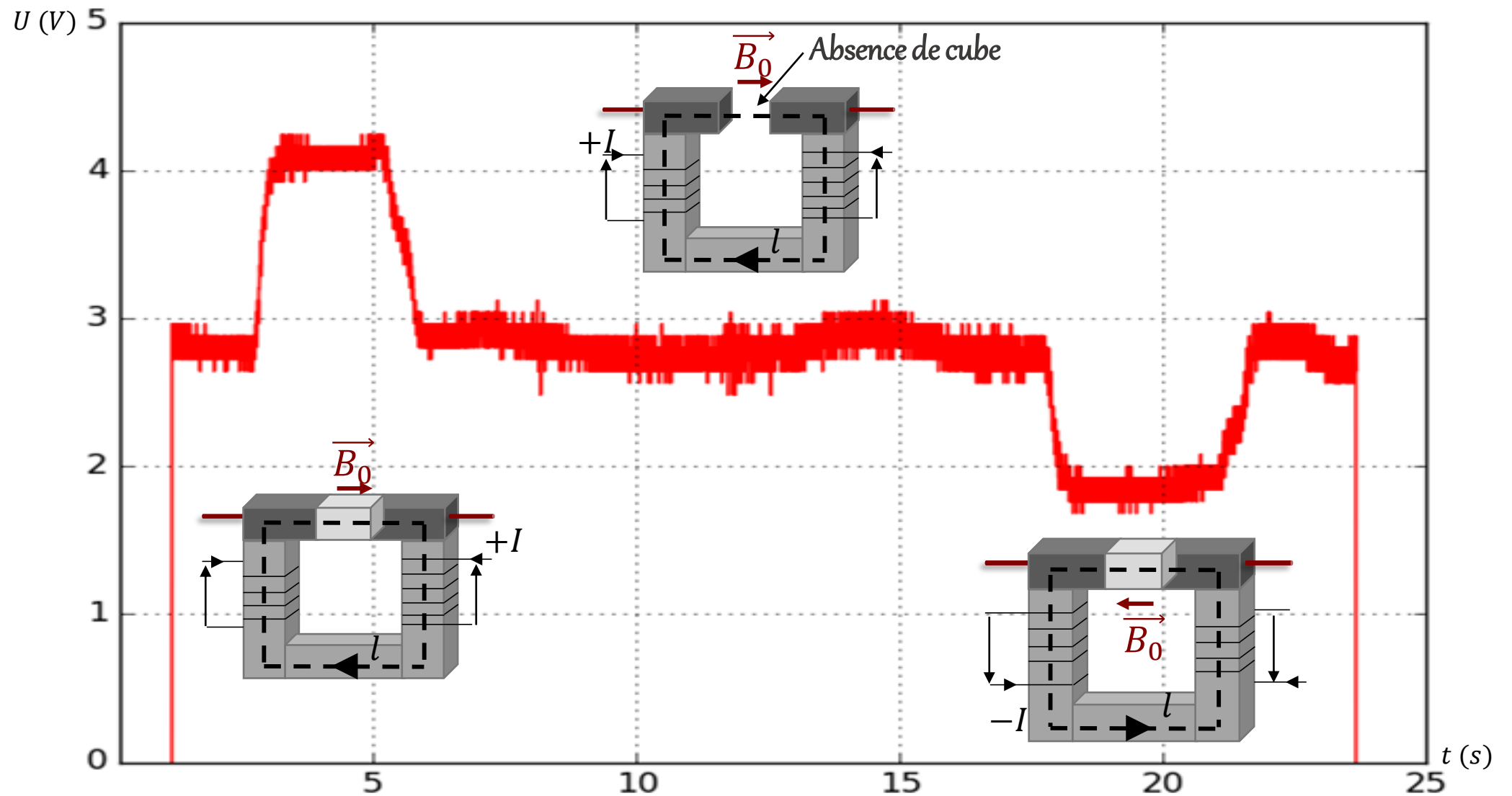
$$I = I_0 \cdot \cos^2(\alpha)$$

$I \text{ (lx)}$ $I_{th} \text{ (lx)}$

Loi de Malus



Effet Faraday



Hypothèse du modèle – Permittivité relative

Hypothèses : - Milieu **LHI** - Aucune **propriété magnétique** - Milieu **isolant** - Milieu **non chargé**

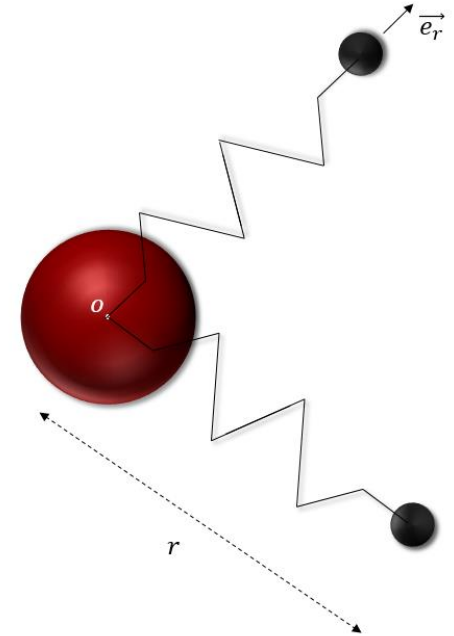
$$\text{D'où : } \operatorname{div}(\vec{D}) = 0 \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

PFD appliqué à un électron:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{e}{m} \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}_0 + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

On a : $\vec{P} = -Ne\vec{r}$, le PFD s'écrit alors: $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 [\underline{\chi}] \underline{\vec{E}}$

$$\text{Or : } \underline{\vec{D}} = \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 [\underline{\varepsilon_r}] \underline{\vec{E}} \text{ avec } [\underline{\varepsilon_r}] = \begin{bmatrix} 1 + \chi(\omega, B_0) & jg(\omega, B_0) & 0 \\ -jg(\omega, B_0) & 1 + \chi(\omega, B_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_0(\omega) \end{bmatrix}$$



Biréfringence

Equation de propagation :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} [\underline{\epsilon}_r] \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \leftrightarrow \begin{cases} \left(\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - (1 + \chi) \right) \underline{E}_x = jg \underline{E}_y \\ \left(\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - (1 + \chi) \right) \underline{E}_y = -jg \underline{E}_x \end{cases} \rightarrow \left(\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - (1 + \chi) \right)^2 = g^2$$

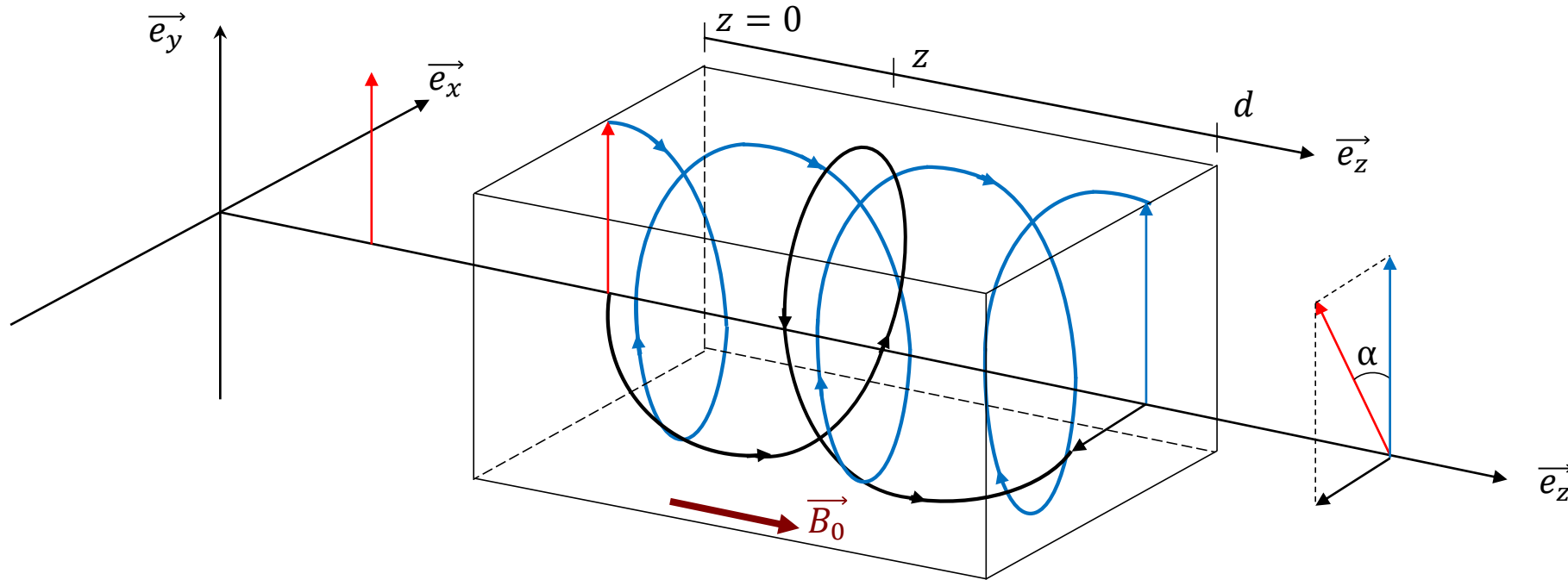
Deux solutions :

$$n_d = \sqrt{1 + \chi + g} \rightarrow \underline{E}_x = j \underline{E}_y \rightarrow \text{Polarisation circulaire à droite}$$

$$n_g = \sqrt{1 + \chi - g} \rightarrow \underline{E}_x = -j \underline{E}_y \rightarrow \text{Polarisation circulaire à gauche}$$

$$\vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 \exp(j(kz - \omega t)) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \exp(j(kz - \omega t) + \frac{\pi}{2}) \\ \exp(j(kz - \omega t)) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \exp(j(kz - \omega t) - \frac{\pi}{2}) \\ \exp(j(kz - \omega t)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

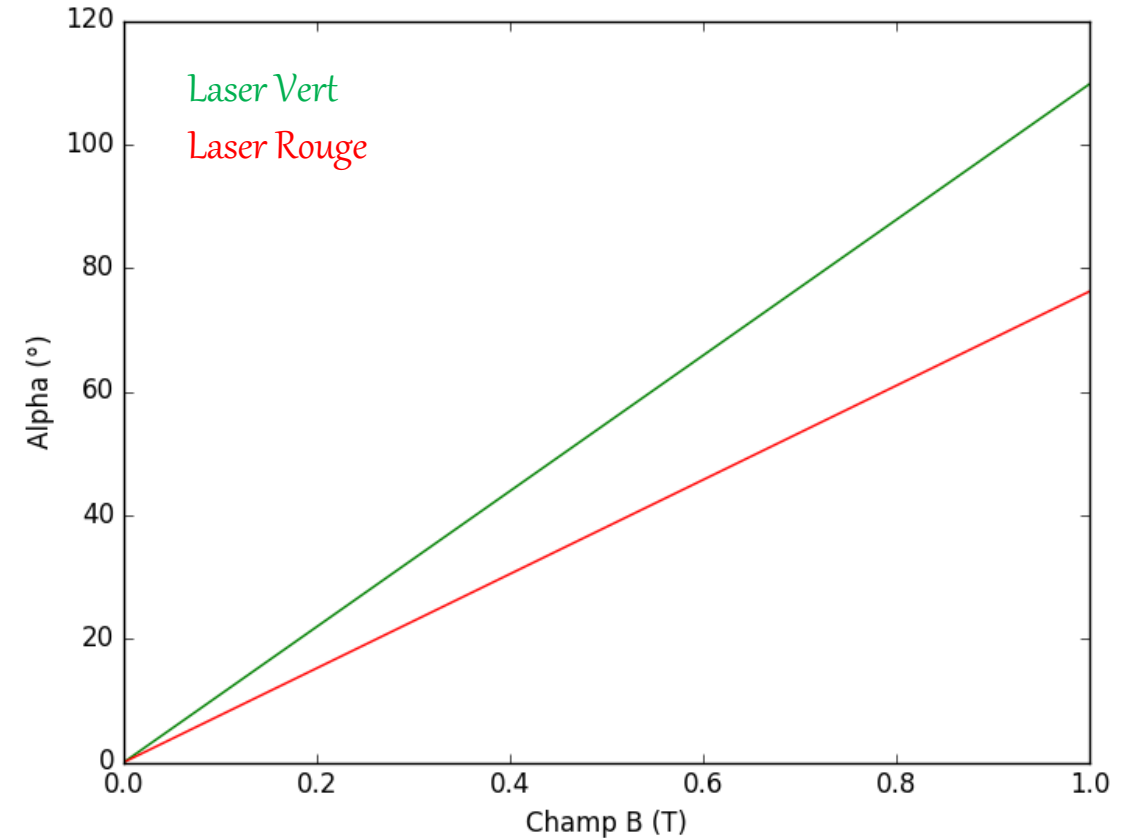
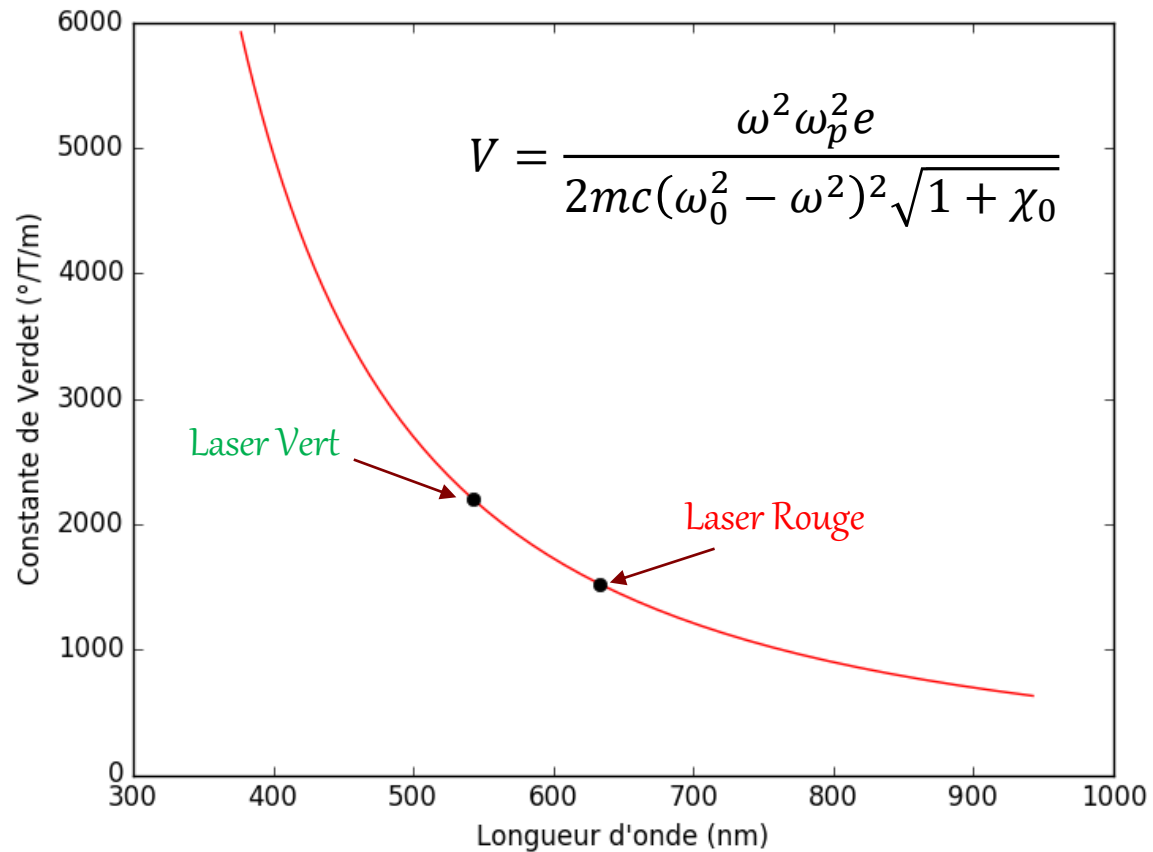
Effet Faraday



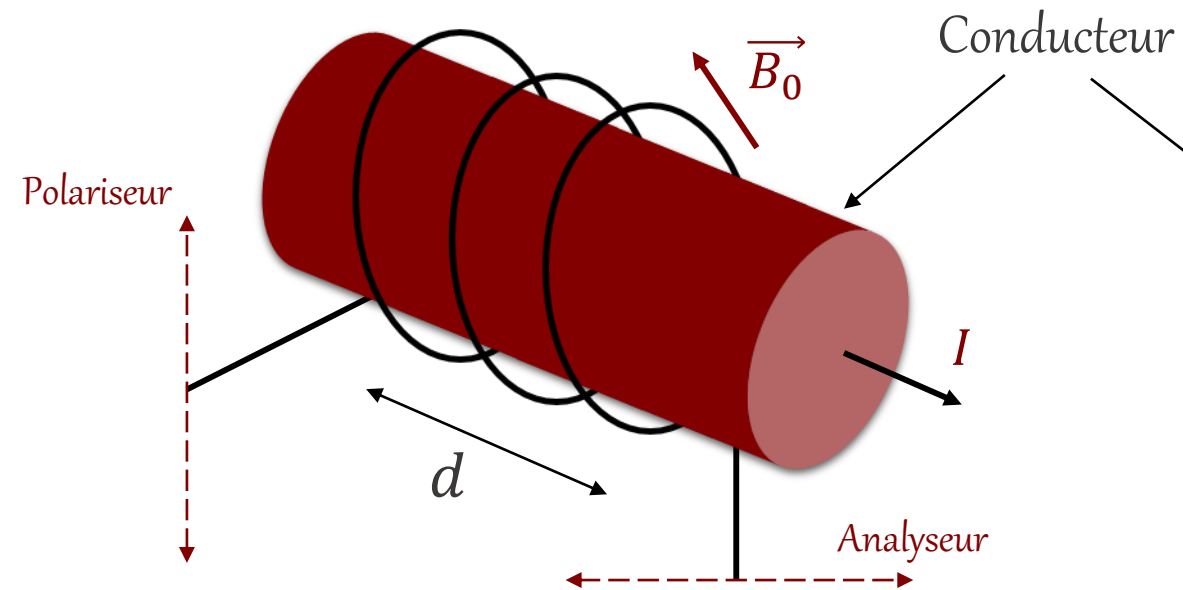
$$\vec{E}(z, t) = E_0 \exp \left(j \left(\frac{\omega}{2c} (n_d + n_g) z - \omega t \right) \right) \vec{u} \text{ avec } \vec{u} = \cos \left(\frac{\omega}{2c} (n_d - n_g) z \right) \vec{e}_y - \sin \left(\frac{\omega}{2c} (n_d - n_g) z \right) \vec{e}_x$$

$$\text{Donc en } d : \alpha = \frac{\omega}{2c} (n_d - n_g) d \approx V d B_0 \text{ avec } V = \frac{\omega^2 \omega_p^2 e}{2mc(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \sqrt{1 + \chi_0}}$$

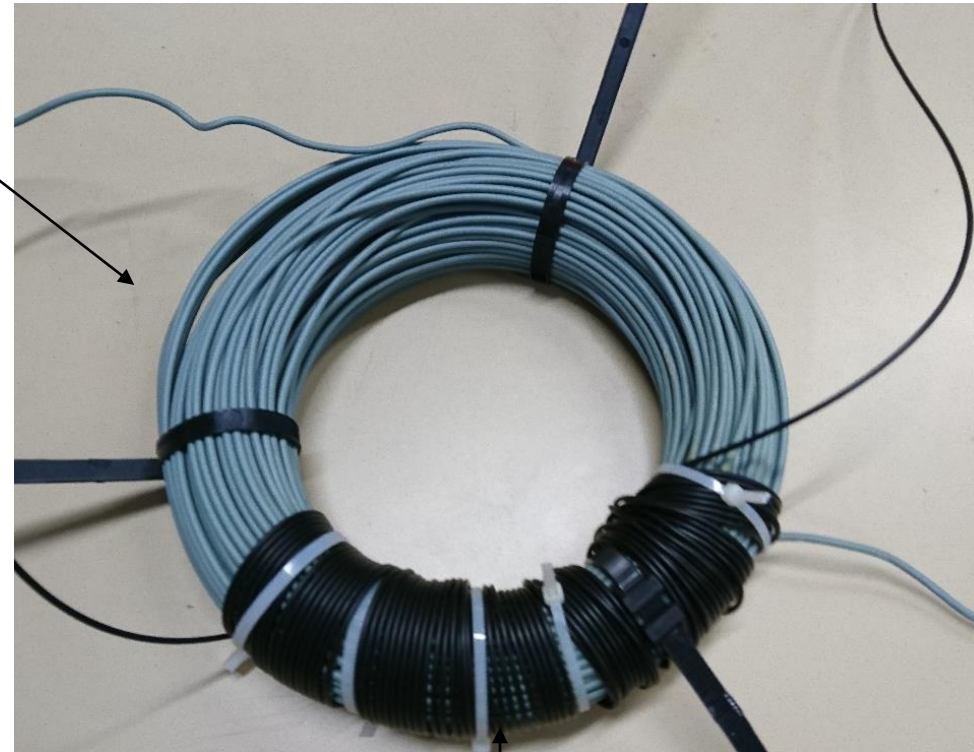
Rotation théorique



Expérience 1 – Fibre Optique



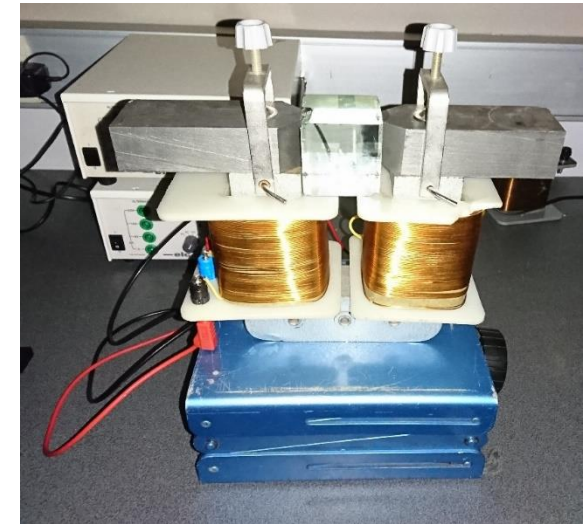
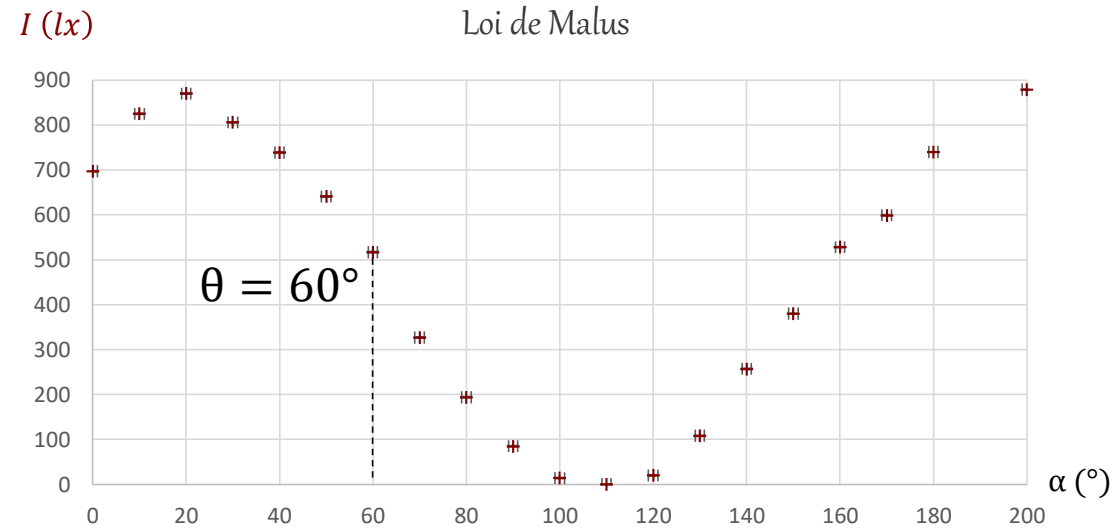
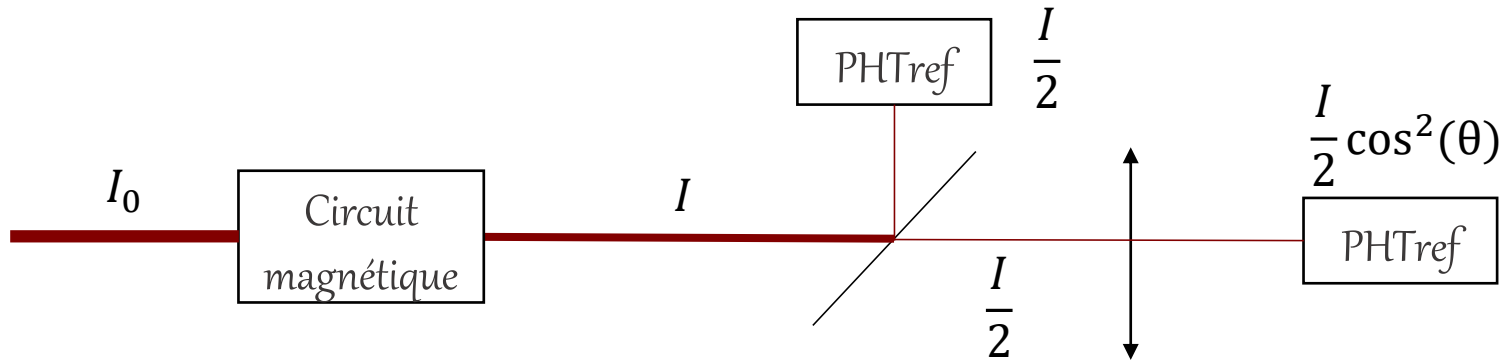
$$\text{Effet Faraday : } \alpha = NVdB_0$$



N tours de fibre optique

Expérience 2

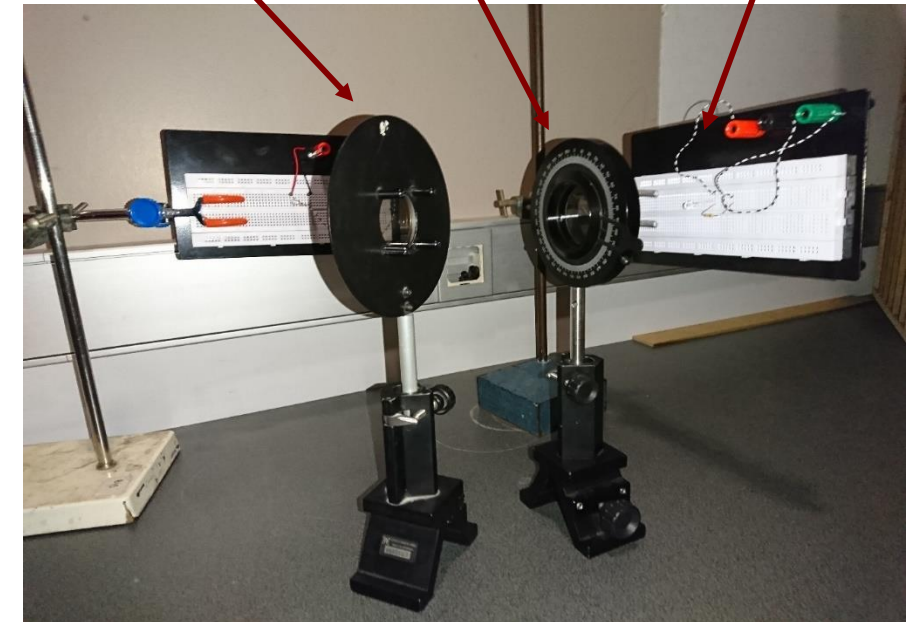
1^{er} cas : Champ nul



Lame semi réfléchissante

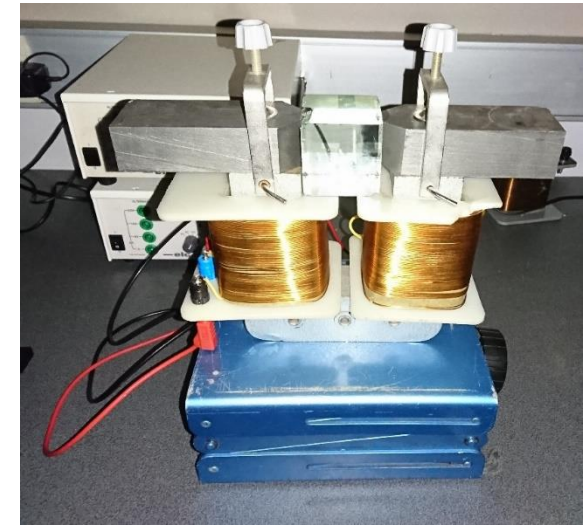
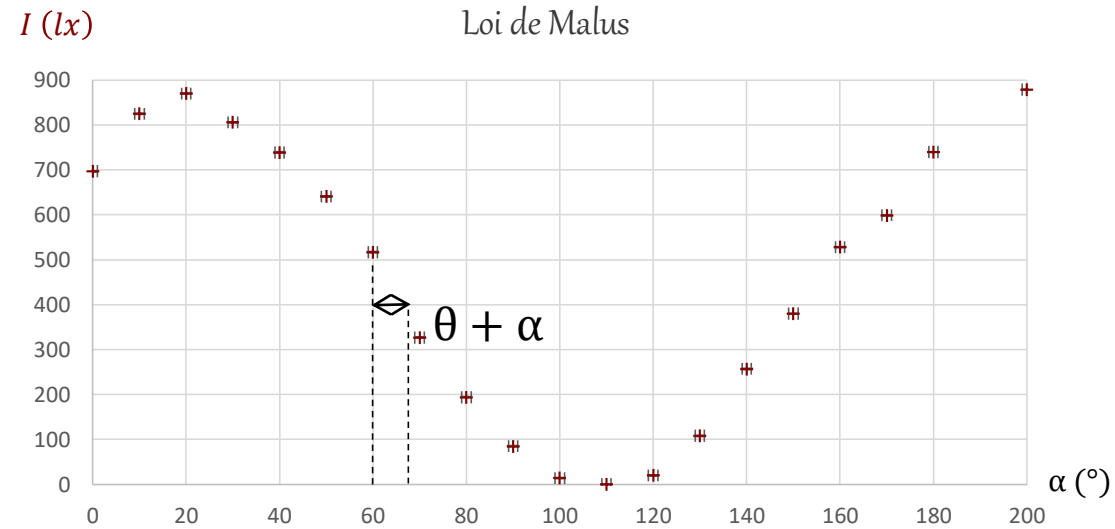
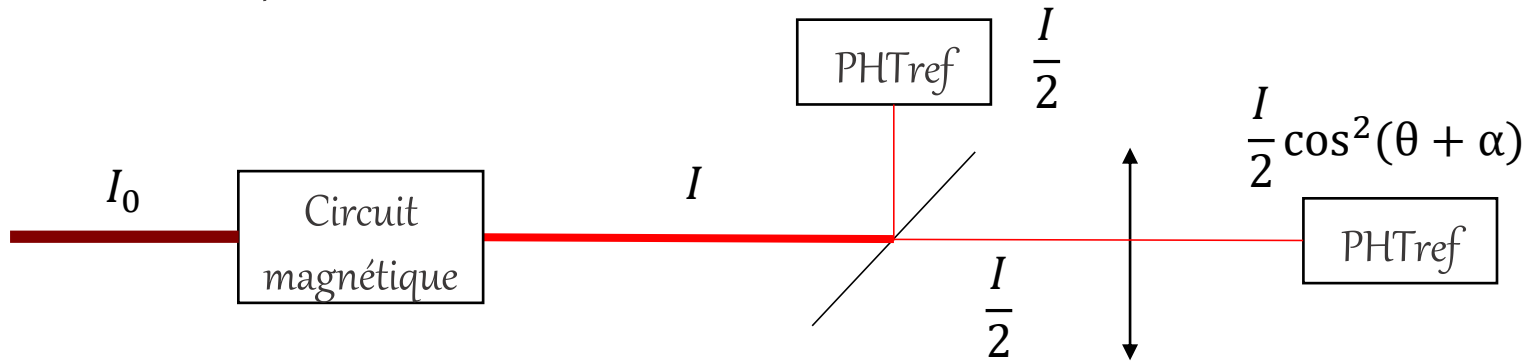
Analyseur

Phototransistor



Expérience 2

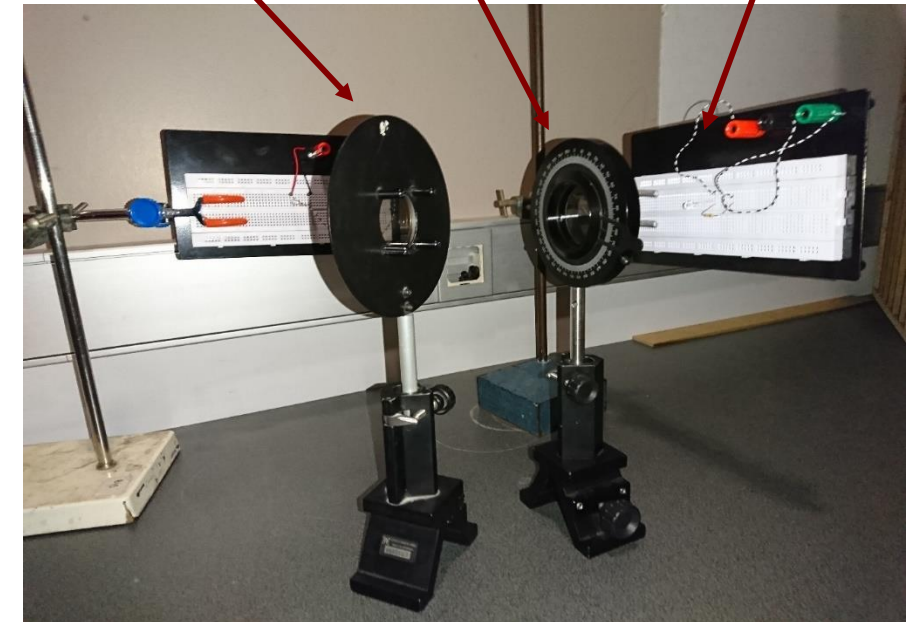
2^{ème} cas : Champ non nul



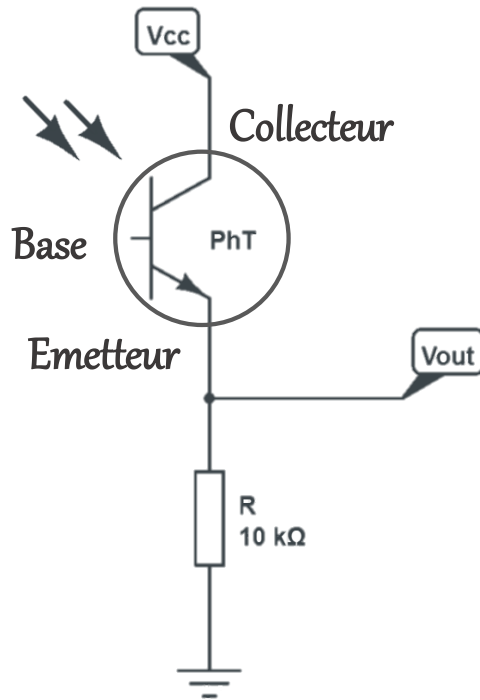
Lame semi réfléchissante

Analyseur

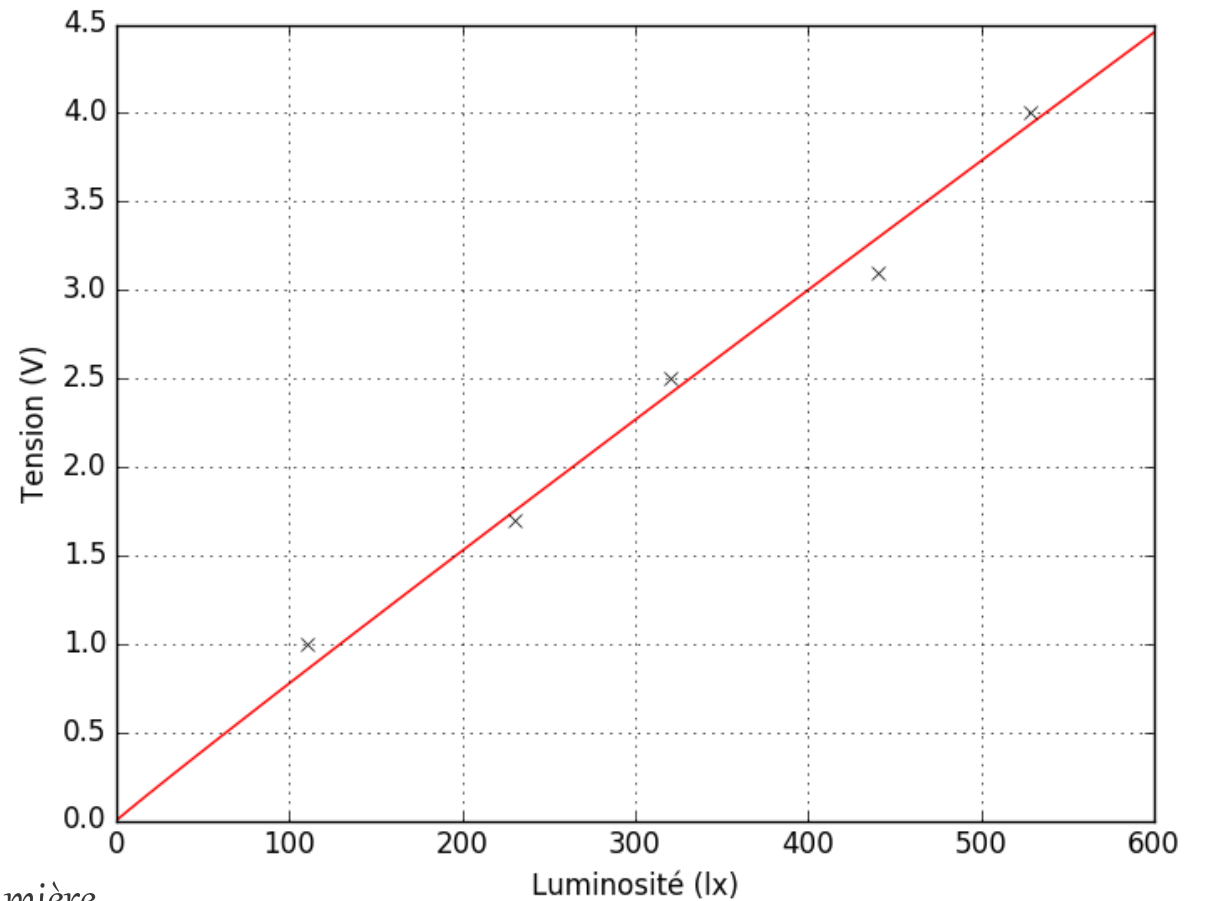
Phototransistor



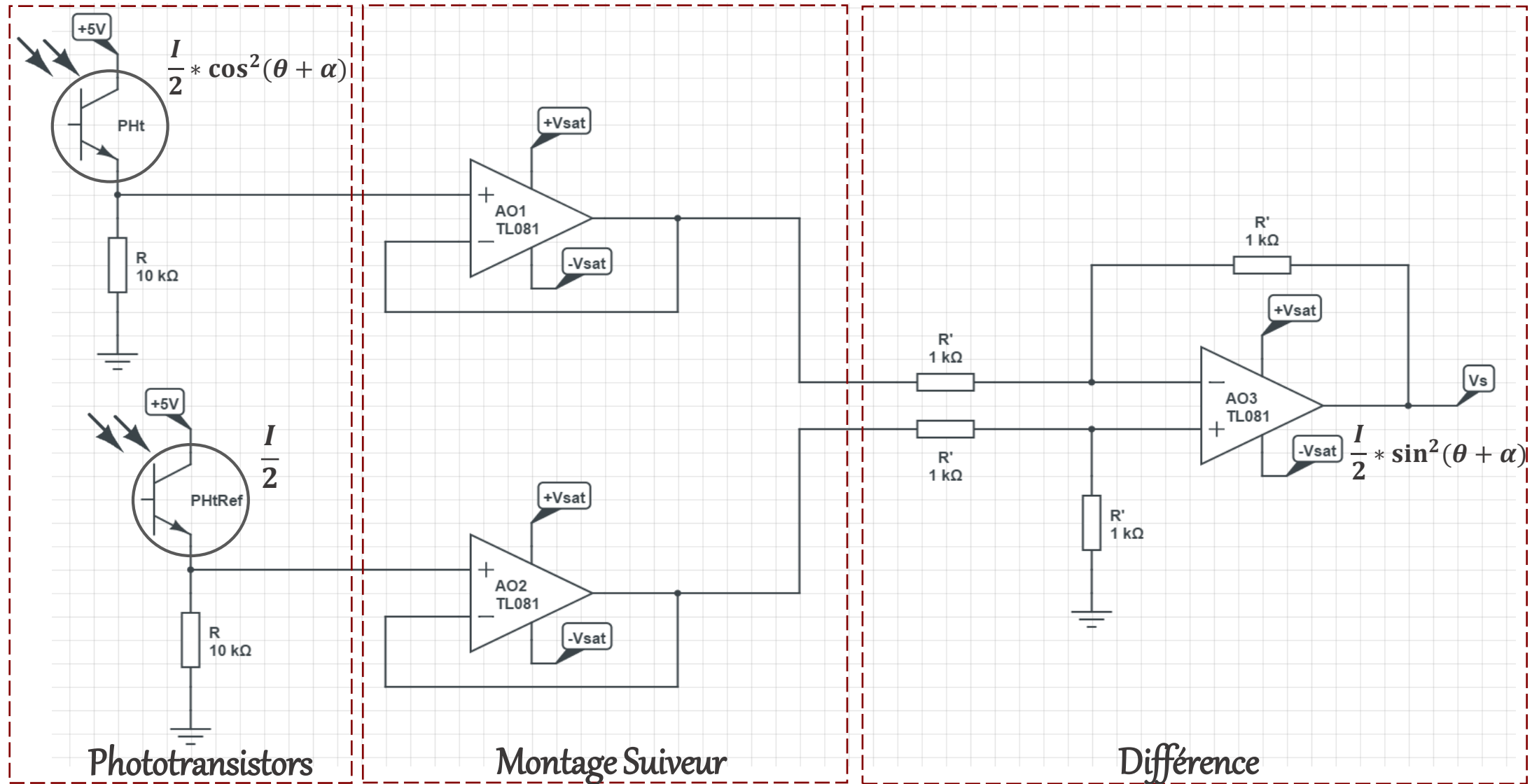
Phototransistor



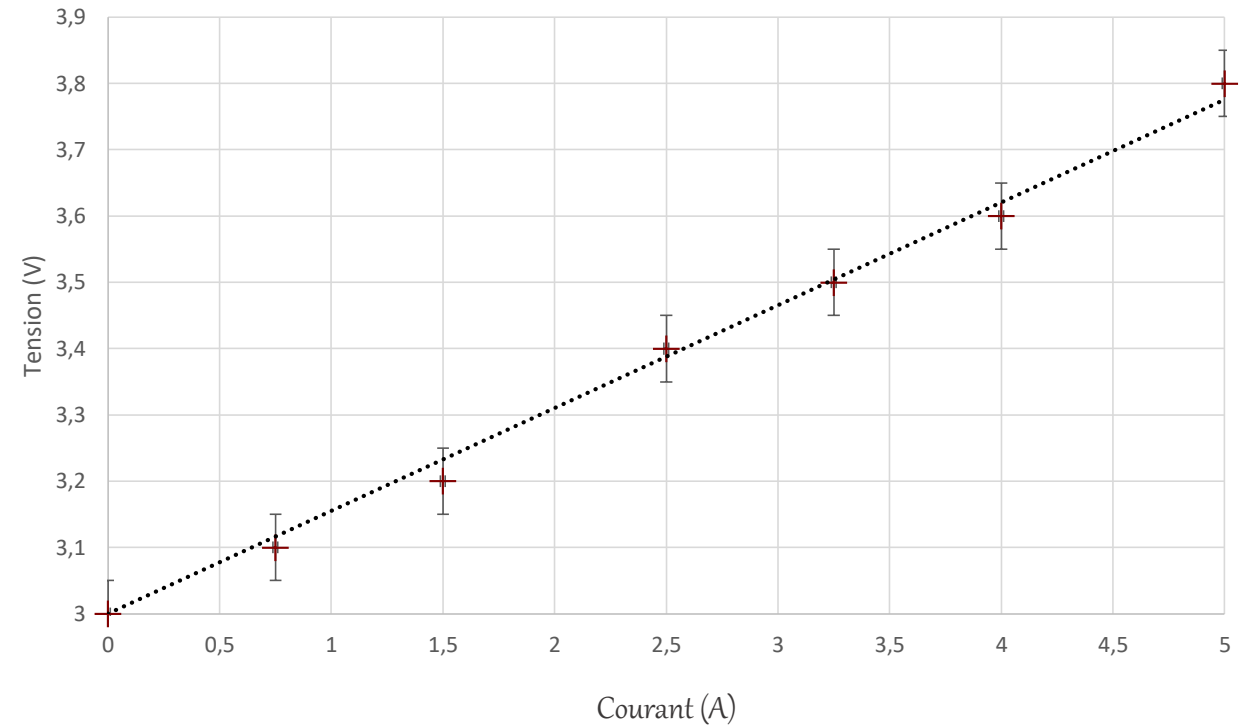
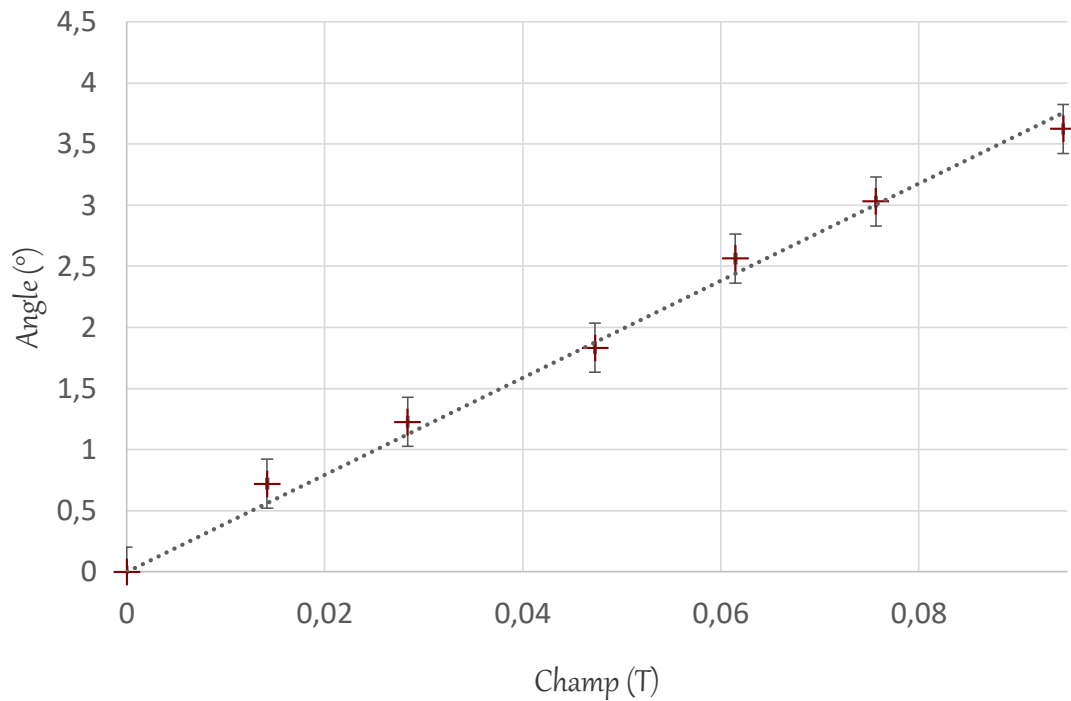
Même fonctionnement qu'un transistor avec une base sensible à la lumière



Traitement

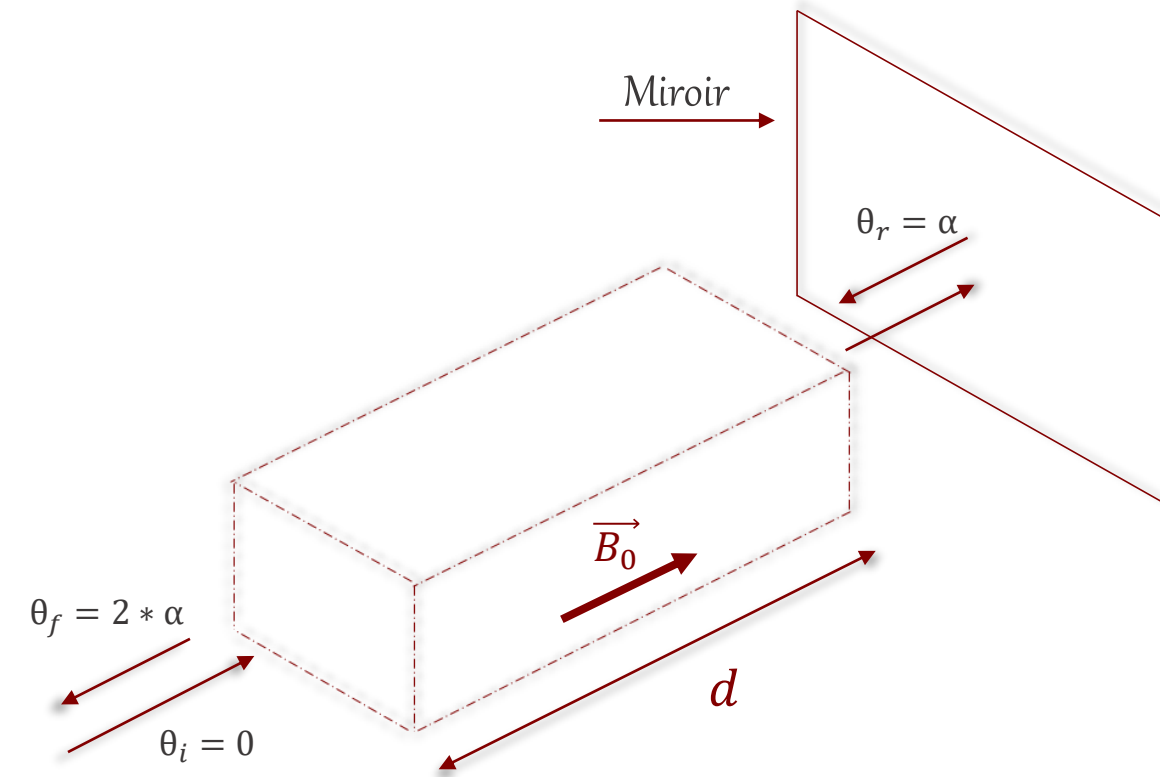


Résultat et caractéristique de l'ampèremètre



$$\alpha = V_{exp} B_0 d \text{ avec } V_{exp} = 794 \pm 36 \text{ } ^\circ . T^{-1} . m^{-1}, d = 5 \text{ cm et l'utilisation d'un laser rouge}$$

Amélioration – Non réciprocity



L'*atténuation* est trop importante

Conclusion

Capteur	Ampèremètre Optique
Type de Capteur	Capteur analogique, passif, mesurant un courant continu
Etendue de mesure	Jusqu'à $\alpha = 90^\circ$ i.e. $i = 125\text{ A}$ (Saturation du milieu ferromagnétique, Limitation du courant dans les bobines)
Sensibilité ($S = \frac{\Delta U}{\Delta I}$)	$S = 0,16\text{ V/A}$
Erreur de linéarité	Très faible
Erreur de mesure	Pour les faibles variations de courants le capteur n'est pas très précis Dépend de l'angle initial

Hypothèses du modèle – Equations de Maxwell

On définit : $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\rho_p = -\text{div}(\vec{P})$ $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

Equations de Maxwell :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho^+ \rho_p}{\epsilon_0} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_p + \vec{j}_a + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

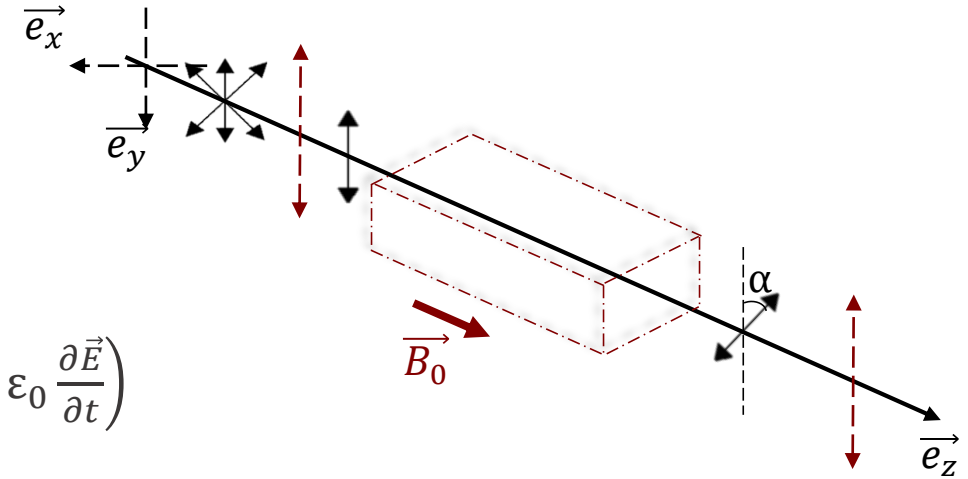
Hypothèses : - Milieu **LHI** - Aucune **propriété magnétique** - Milieu **isolant** - Milieu **non chargé**

D'où :

$$\text{div}(\vec{D}) = 0 \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

RSF : $\vec{D} = \epsilon_0 \underline{\epsilon_r(\omega)} \vec{E}$ $\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\chi_e(\omega)} \vec{E}$

Milieu traversé par $\vec{E}(z, t) = \underline{E}_0 \exp(j(kz - \omega t))$ en présence de $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$



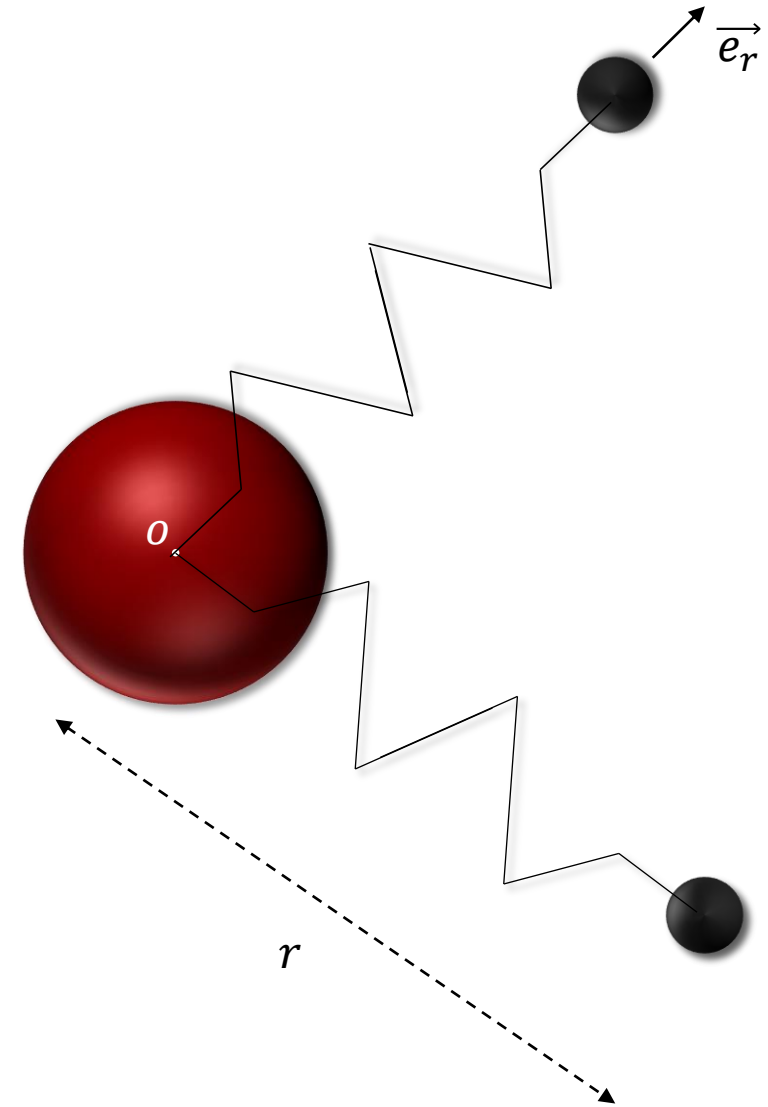
Principe fondamental de la dynamique

Milieu composé de $N e^- / m^3$ de masse m et de charge $-e$:

On isole un e^- , bilan des forces:

- $\vec{P} = m\vec{g}$ *négligée* devant \vec{F}_{elec}
- $\vec{F}_{rappel} = -m\omega_0^2\vec{r}$
- $\vec{F}_{elec} = -e\vec{E}$
- $\vec{F}_{mag} = -e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}$ *négligée* devant \vec{F}_{mag}^0
- $\vec{F}_{mag}^0 = -e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}_0$
- $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$ *négligée* devant \vec{F}_{rappel}

$$\text{PFD : } \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{e}{m} \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}_0 + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$



Permittivité relative

On a : $\vec{P} = -Ne\vec{r}$

PFD + RSF : $-\omega^2 \vec{P} - j\omega \frac{e}{m} \vec{P} \wedge \vec{B}_0 + \omega_0^2 \vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \vec{E}$

On trouve alors : $\vec{P} - j\eta \vec{P} \wedge \vec{e}_z = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E}$

Ce qui se traduit par : $\vec{P} = \epsilon_0 [\underline{\chi}] \vec{E}$ avec $[\underline{\chi}] = \begin{bmatrix} \frac{\chi_0}{1-\eta^2} & \frac{j\eta\chi_0}{1-\eta^2} & 0 \\ -\frac{j\eta\chi_0}{1-\eta^2} & \frac{\chi_0}{1-\eta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_0 \end{bmatrix}$

Posons :

$$\chi_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\eta = \frac{\omega * \omega_c}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$g = \frac{\eta\chi_0}{1-\eta^2} \quad \chi = \frac{\chi_0}{1-\eta^2}$$

$$\text{Or : } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 [\underline{\epsilon_r}] \vec{E} \text{ avec } [\underline{\epsilon_r}] = \begin{bmatrix} 1 + \chi & jg & 0 \\ -jg & 1 + \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_0 \end{bmatrix}$$

Propagation

Maxwell-Gauss : $\text{div}(\vec{D}) = \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$ donc $\frac{\partial E_z}{\partial z} = jk \underline{E_z} = 0$ donc \vec{E} est **transverse**

Equation de propagation :

$$\vec{\Delta} \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} [\underline{\epsilon_r}] \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \leftrightarrow \begin{cases} \left(\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - (1 + \chi) \right) \underline{E_x} = jg \underline{E_y} \\ \left(\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - (1 + \chi) \right) \underline{E_y} = -jg \underline{E_x} \end{cases}$$

Relation de dispersion:

$$\left(\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - (1 + \chi) \right)^2 = g^2$$

Donc :

$$n^2 = 1 + \chi \pm g \text{ avec } n = \frac{kc}{\omega}$$

$$\text{Deux solutions : } n_d = \sqrt{1 + \chi + g} \quad n_g = \sqrt{1 + \chi - g}$$

Polarisation circulaire

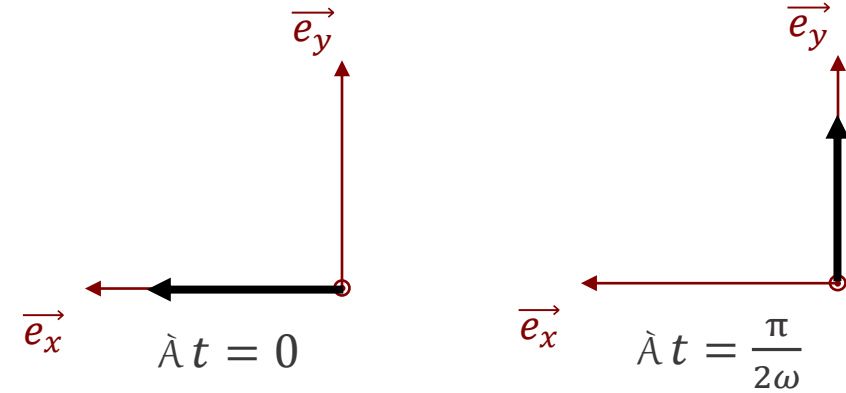
$n = n_d$ alors $\underline{E}_x = j\underline{E}_y \rightarrow$ Onde polarisée *circulairement à droite*

$n = n_g$ alors $\underline{E}_x = -j\underline{E}_y \rightarrow$ Onde polarisée *circulairement à gauche*

Exemple : Polarisation *circulaire à droite*

$$\vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}(0, 0) = \begin{bmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{E}\left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Cas général :

En $z = 0$

$$\underline{\vec{E}}(0, t) = \begin{bmatrix} E_0 \exp(-j\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

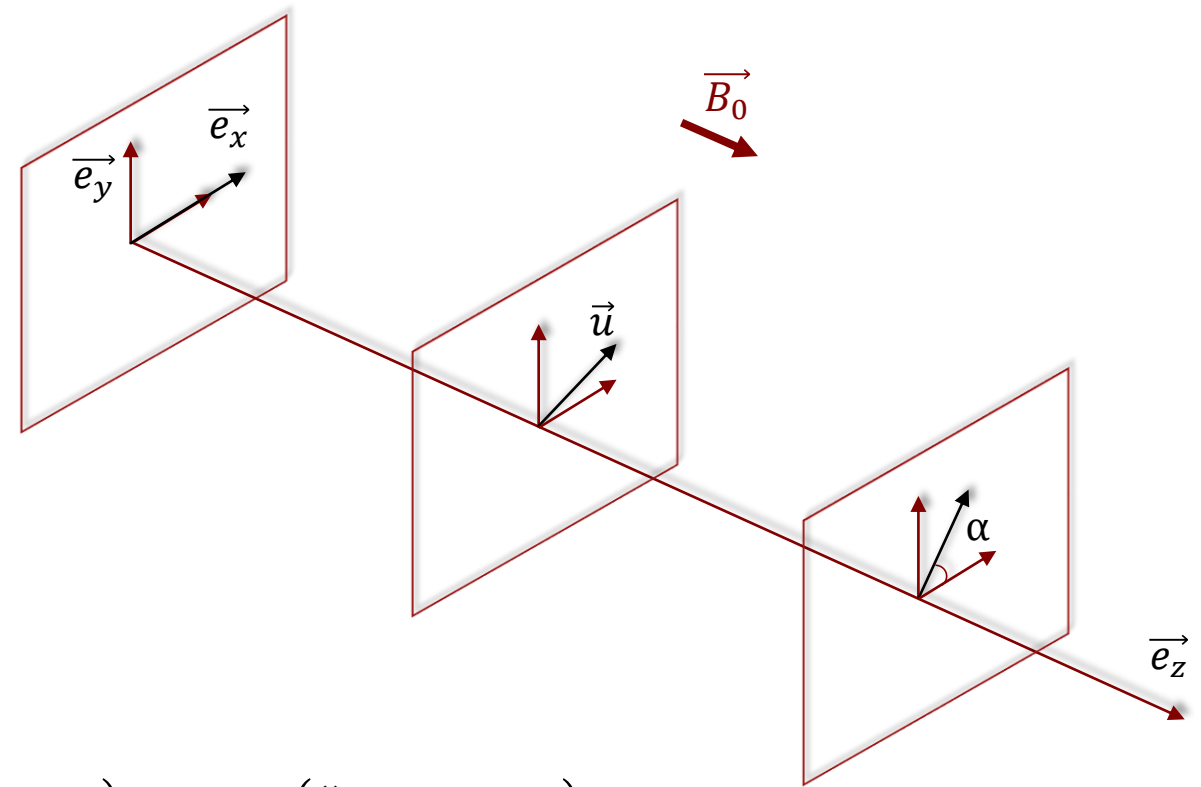
$$\underline{\vec{E}}(0, t) = \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \exp(-j\omega t) \\ \exp\left(-j\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \exp(-j\omega t) \\ \exp\left(-j\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Effet Faraday

$$\vec{E}(z, t) = \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \exp\left(j\left(\frac{\omega}{c}n_g z - \omega t\right)\right) \\ \exp\left(j\left(\frac{\omega}{c}n_g z - \omega t\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \exp\left(j\left(\frac{\omega}{c}n_d z - \omega t\right)\right) \\ \exp\left(j\left(\frac{\omega}{c}n_d z - \omega t\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Re } \vec{E}(z, t) = E_0 \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{2c}(n_d - n_g)z\right) \cos\left(\frac{\omega}{2c}(n_d + n_g)z - \omega t\right) \\ \sin\left(\frac{\omega}{2c}(n_d - n_g)z\right) \sin\left(\frac{\omega}{2c}(n_d + n_g)z - \omega t\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Re } \vec{E}(z, t) = E_0 \exp\left(j\left(\frac{\omega}{2c}(n_d + n_g)z - \omega t\right)\right) \vec{u} \text{ avec } \vec{u} = \cos\left(\frac{\omega}{2c}(n_d - n_g)z\right) \vec{e}_x + \sin\left(\frac{\omega}{2c}(n_d - n_g)z\right) \vec{e}_y$$



$$\text{Donc en } d : \alpha = \frac{\omega}{2c} (n_d - n_g) d \approx V d B_0 \text{ avec } V = \frac{\omega^2 \omega_p^2 e}{2mc(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \sqrt{1 + \chi_0}}$$