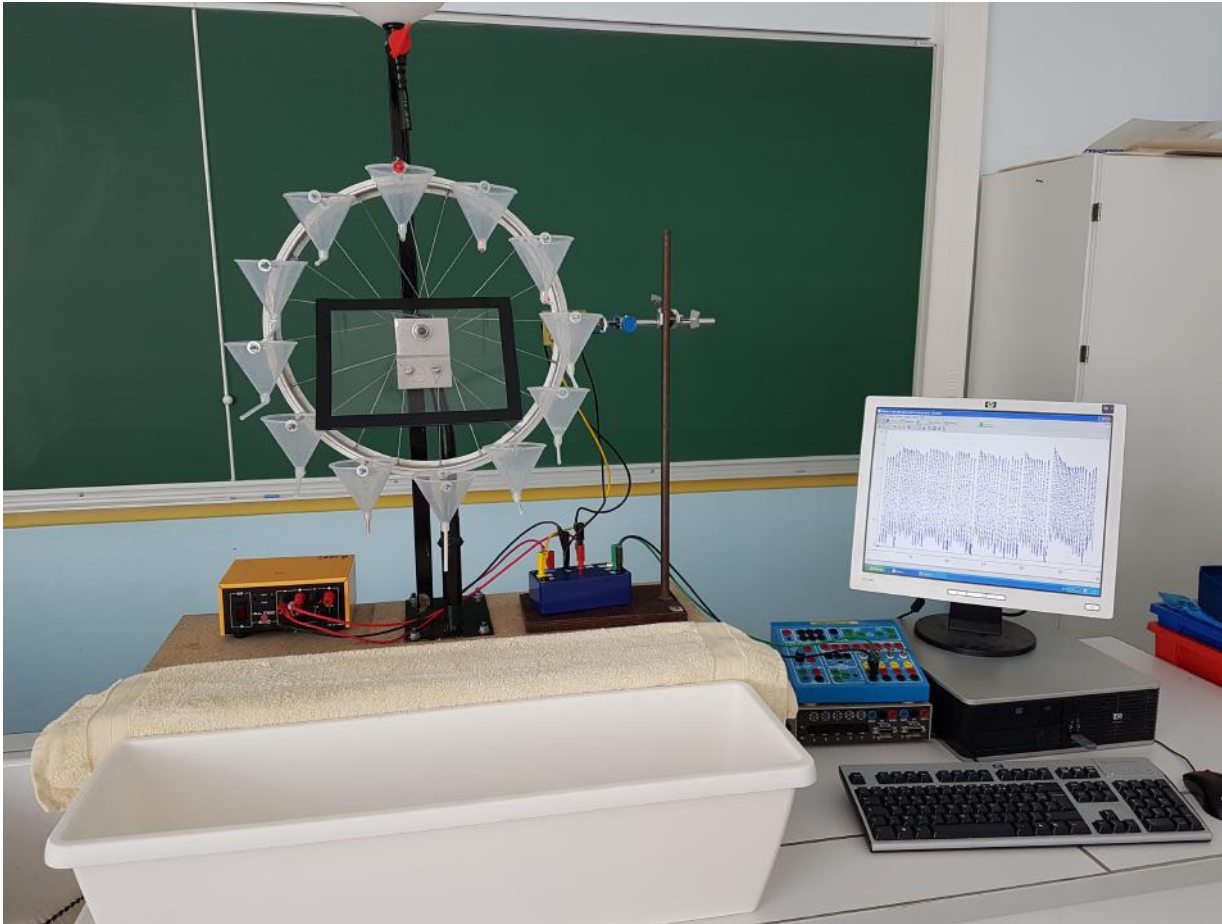




Le moulin à eau d'Edward  
Lorenz

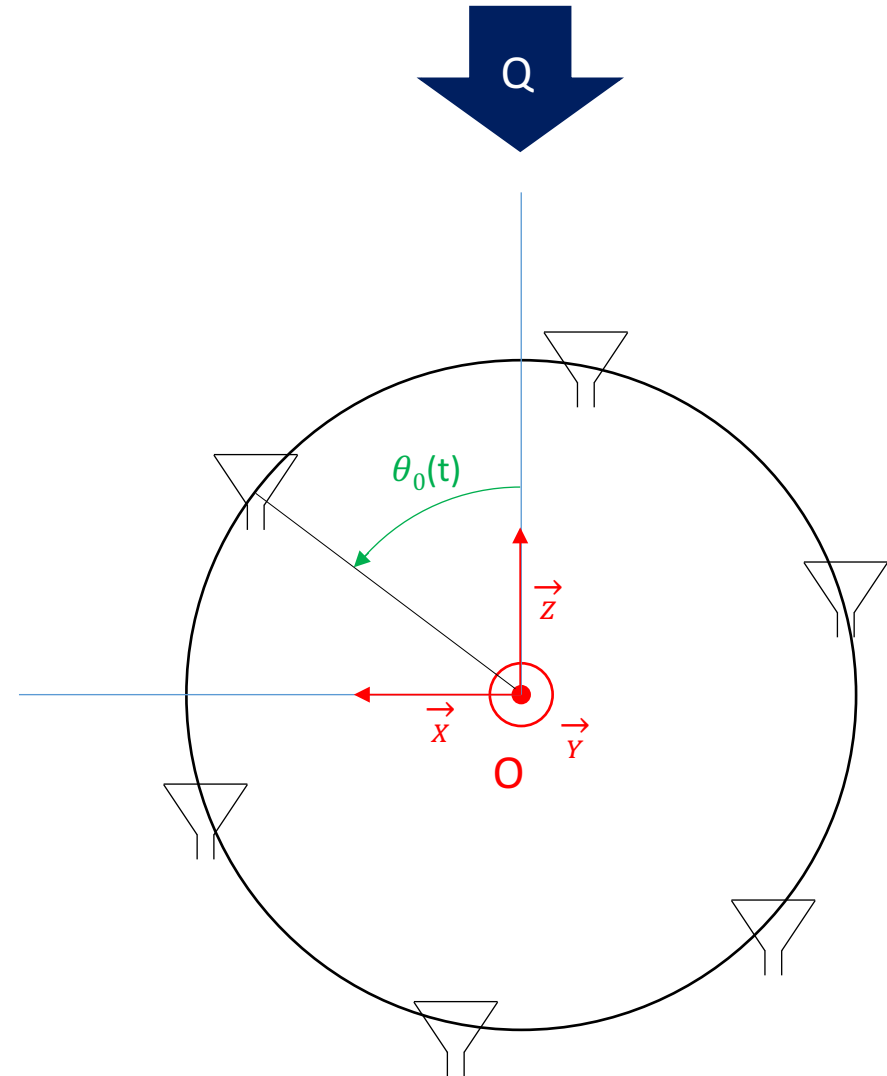
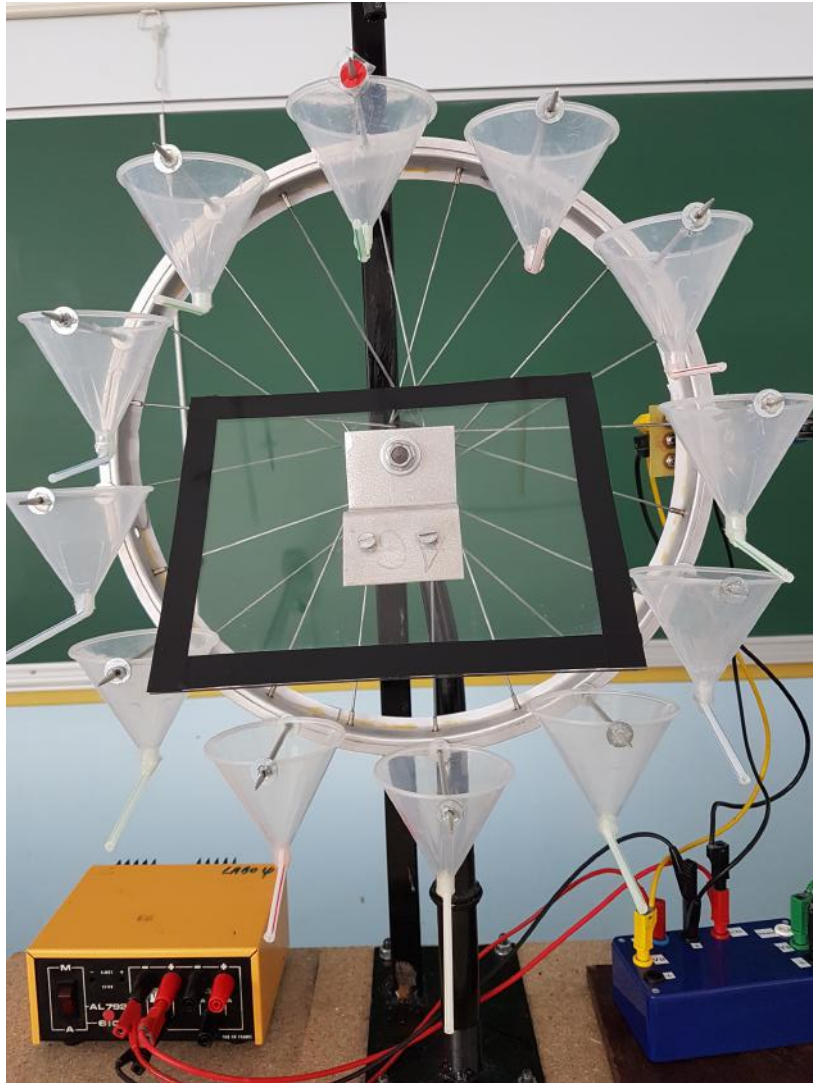
Comment pouvons-nous appréhender les écarts pour expliquer nos différences de comportement au cours de ces expériences ?



- I/ Présentation du système
- II/ Modélisation du système
- III/ Paramètres à déterminer
- IV/ Expérimentation
- V/ Conclusion

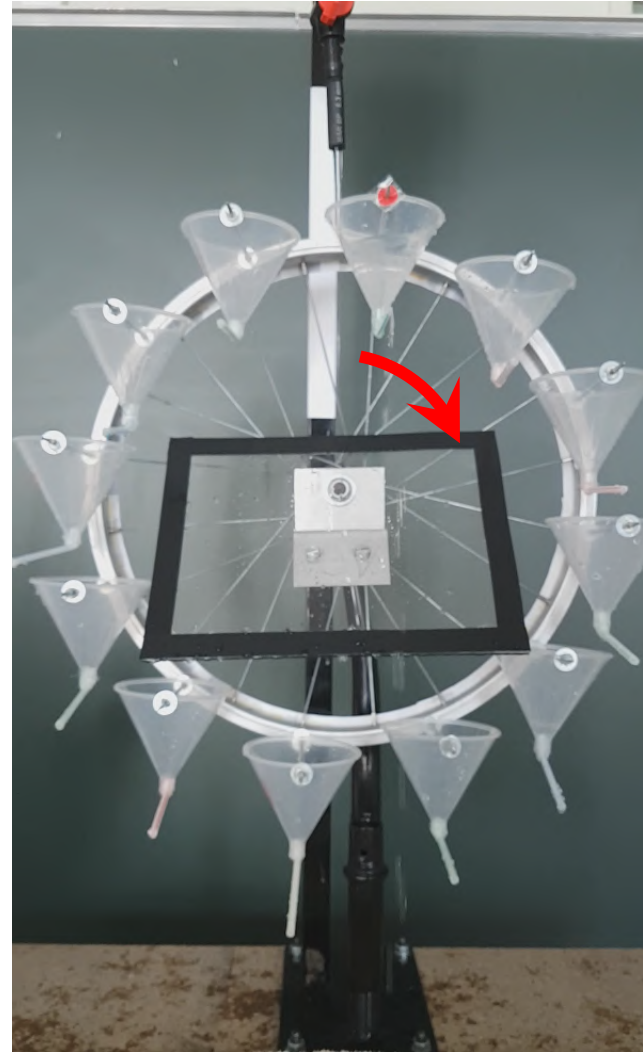
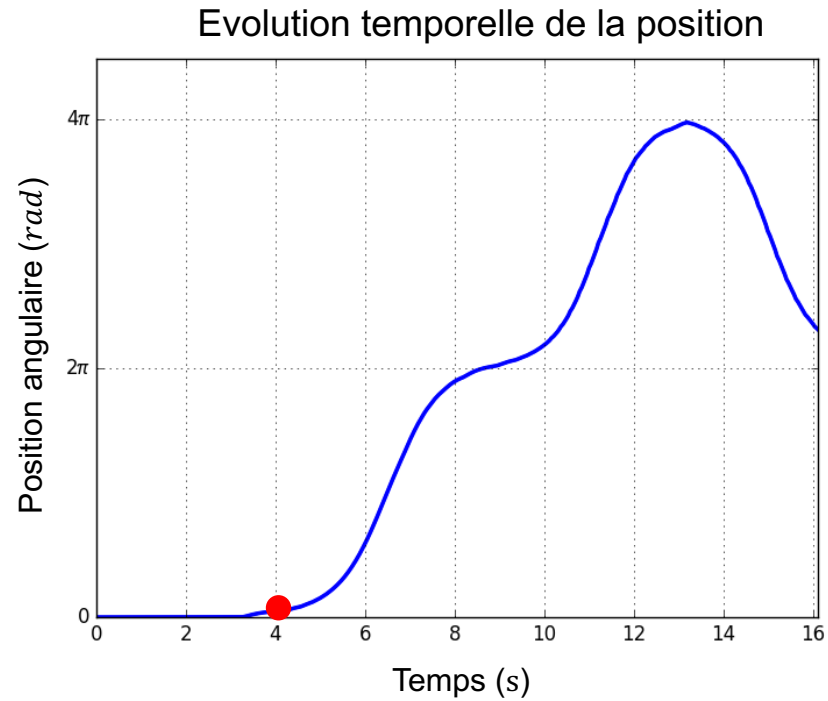
# I/ Présentation du système :

## 1. Notre système :



# I/ Présentation du système :

## 2. Principe de fonctionnement :



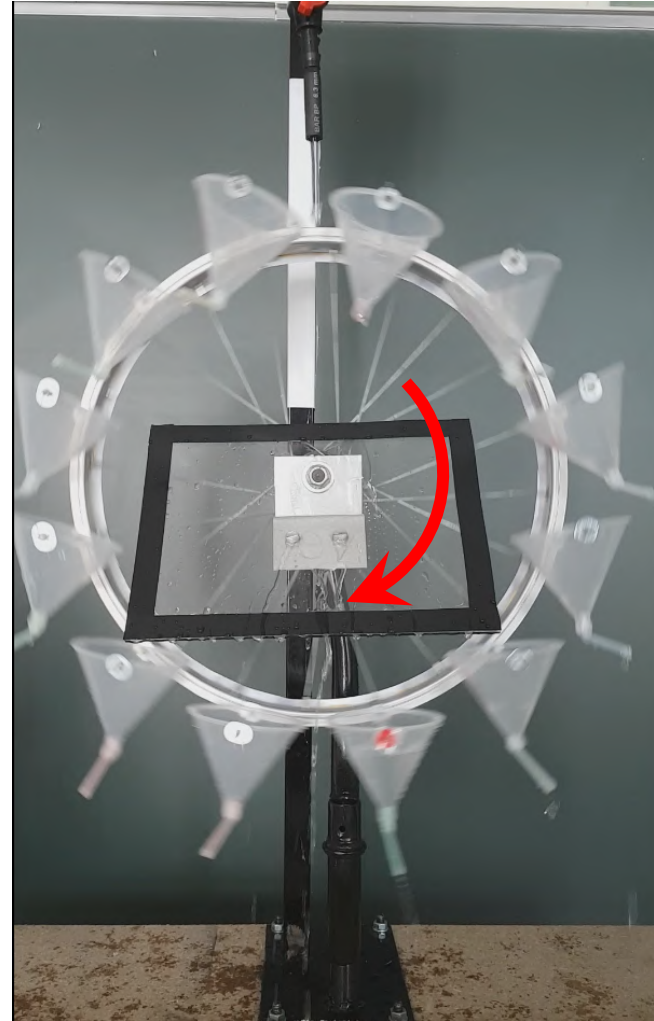
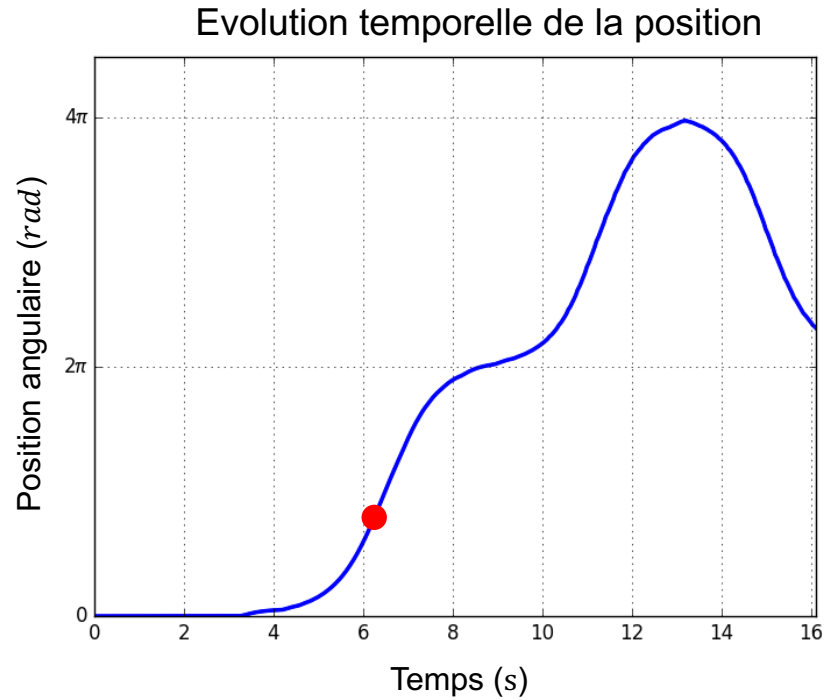
$t = 4 \text{ s}$

$$\theta_0 = 0,5^\circ$$
$$D_{eau} = 5,9 \text{ g.s}^{-1}$$



# I/ Présentation du système :

## 2. Principe de fonctionnement :

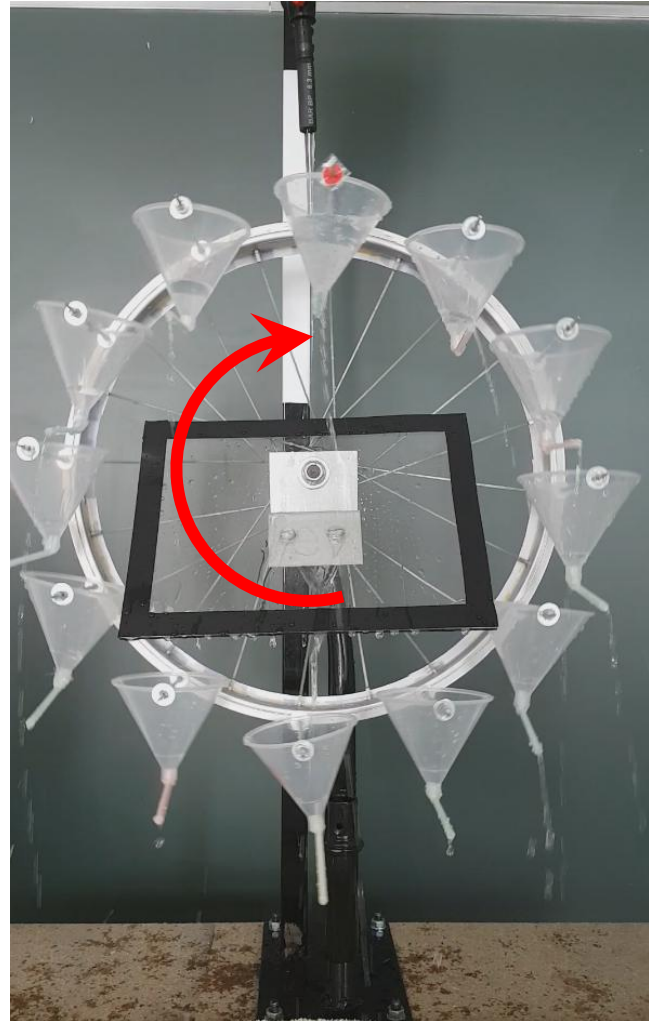
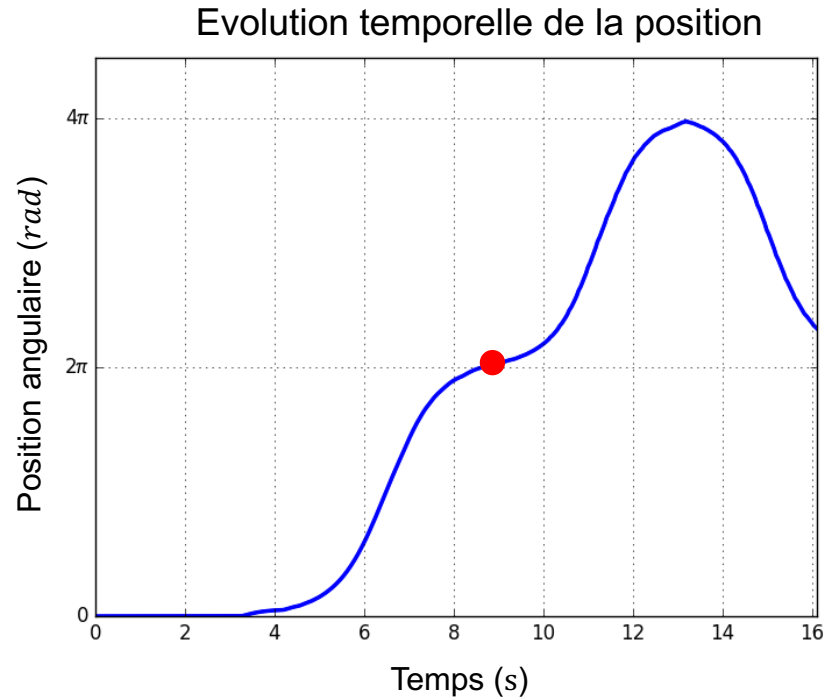


$t = 6,3 \text{ s}$

$$\theta_0 = 0,5^\circ$$
$$D_{eau} = 5,9 \text{ g.s}^{-1}$$

# I/ Présentation du système :

## 2. Principe de fonctionnement :

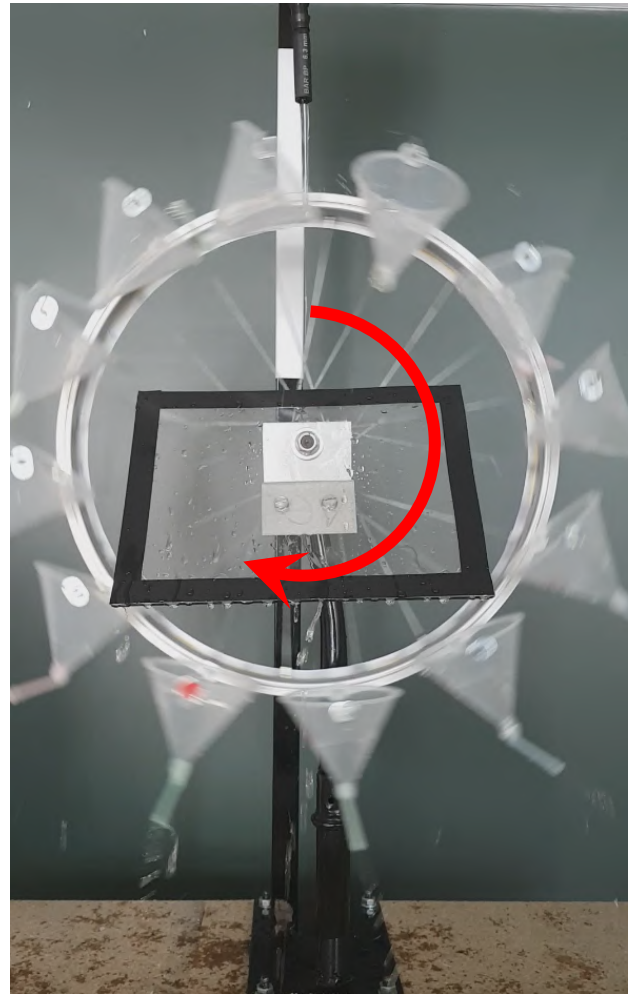
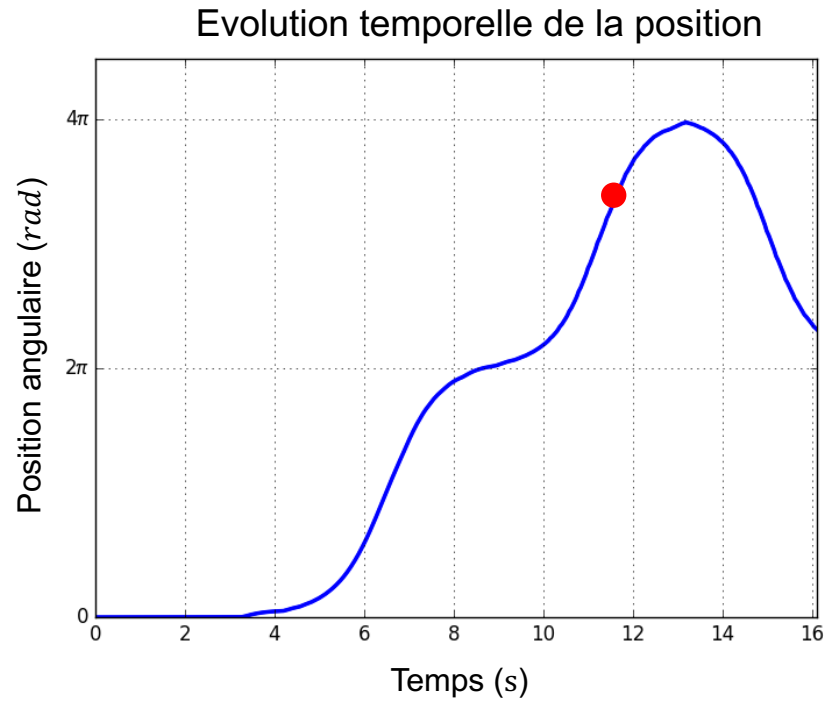


$t = 9 \text{ s}$

$$\theta_0 = 0,5^\circ$$
$$D_{eau} = 5,9 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

# I/ Présentation du système :

## 2. Principe de fonctionnement :

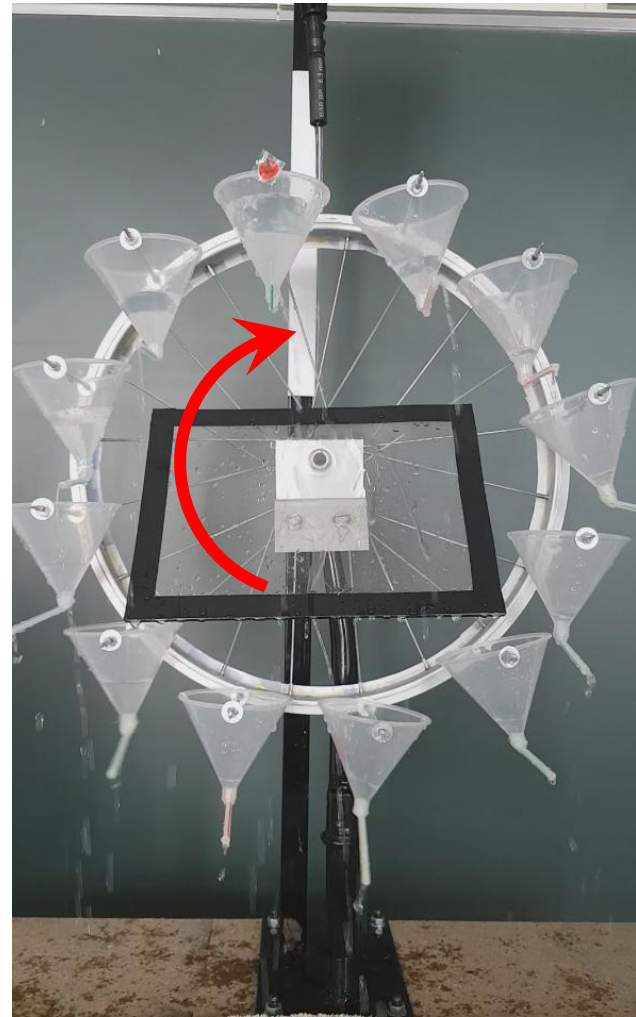
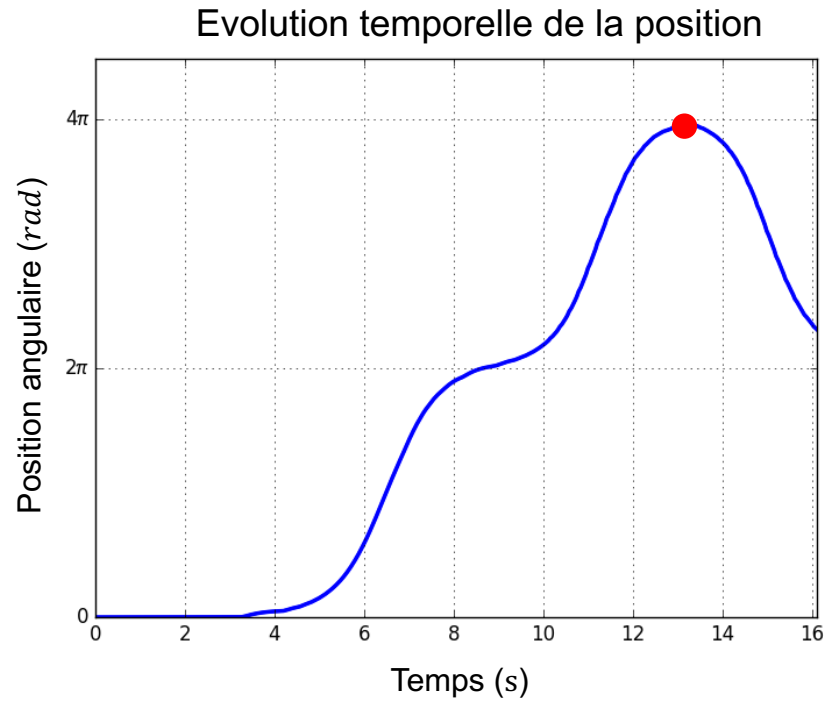


$t = 11,5 \text{ s}$

$$\theta_0 = 0,5^\circ$$
$$D_{eau} = 5,9 \text{ g.s}^{-1}$$

# I/ Présentation du système :

## 2. Principe de fonctionnement :



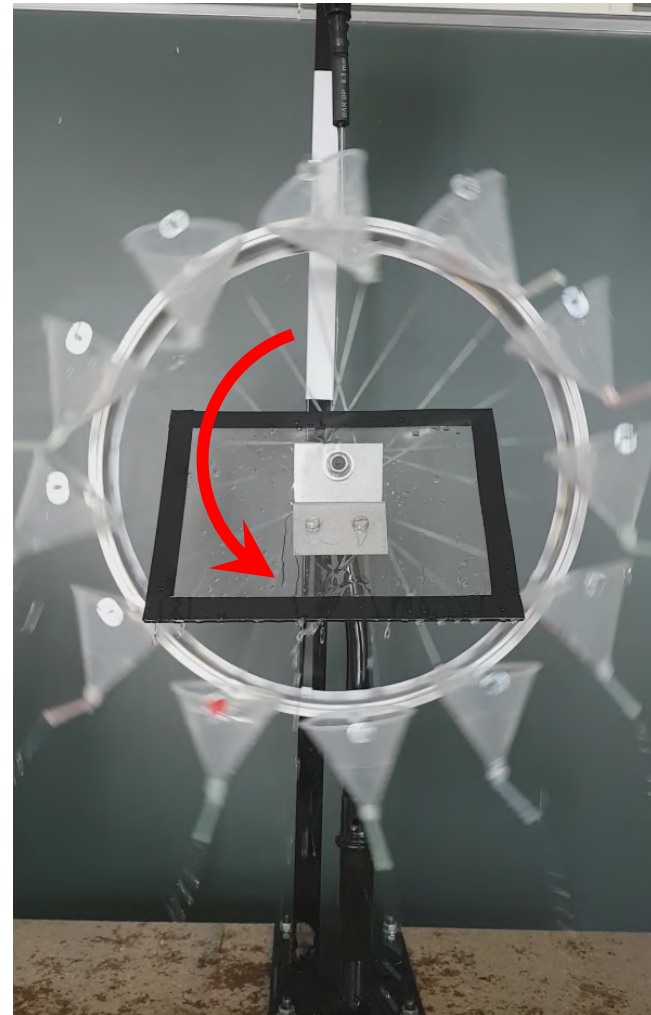
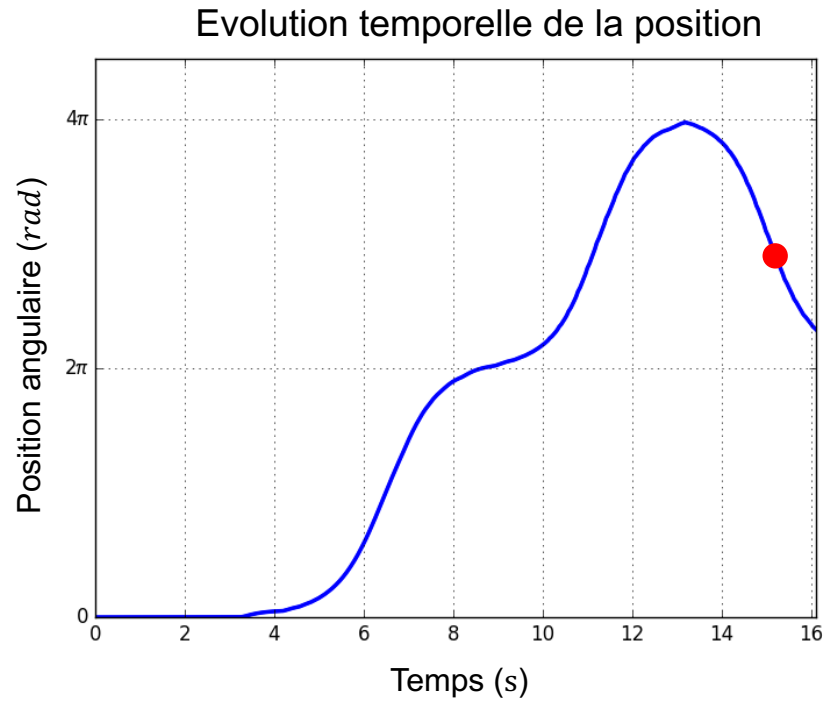
$t = 10 \text{ s}$

$$\theta_0 = 0,5^\circ$$
$$D_{eau} = 5,9 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$



# I/ Présentation du système :

## 2. Principe de fonctionnement :

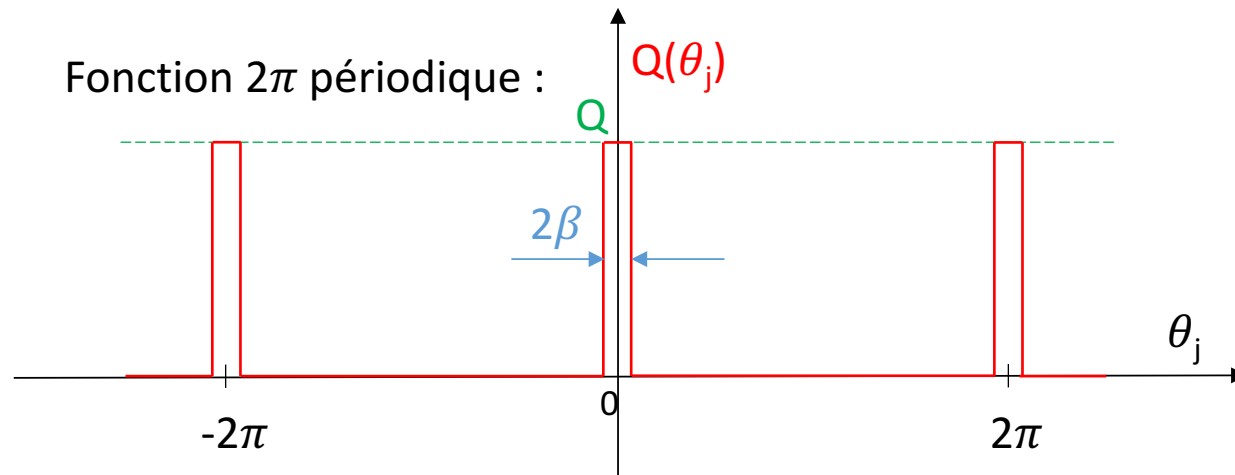


$t = 15 \text{ s}$

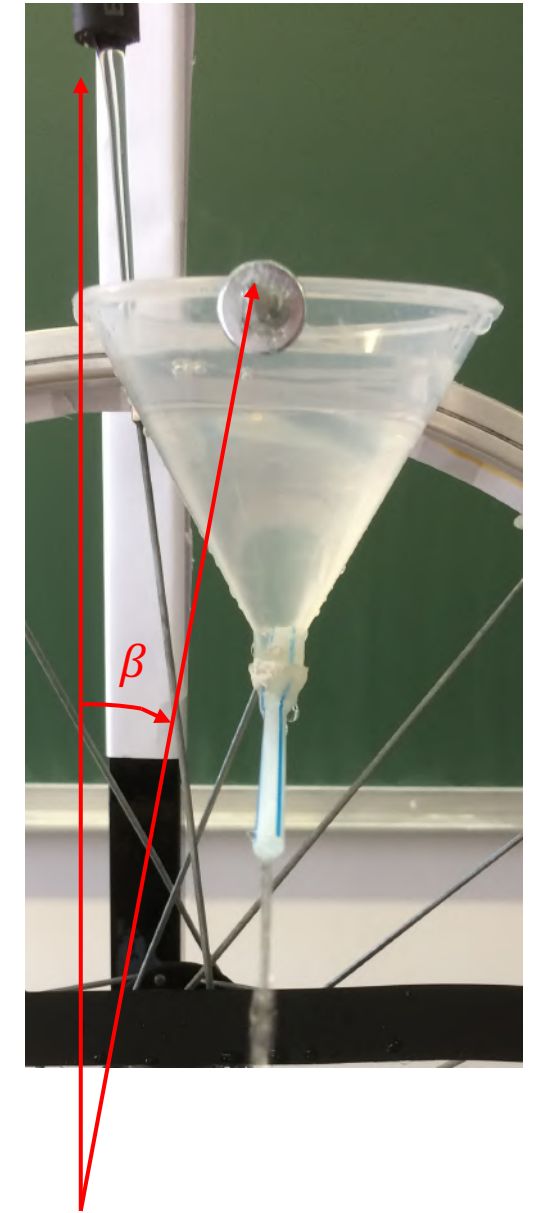
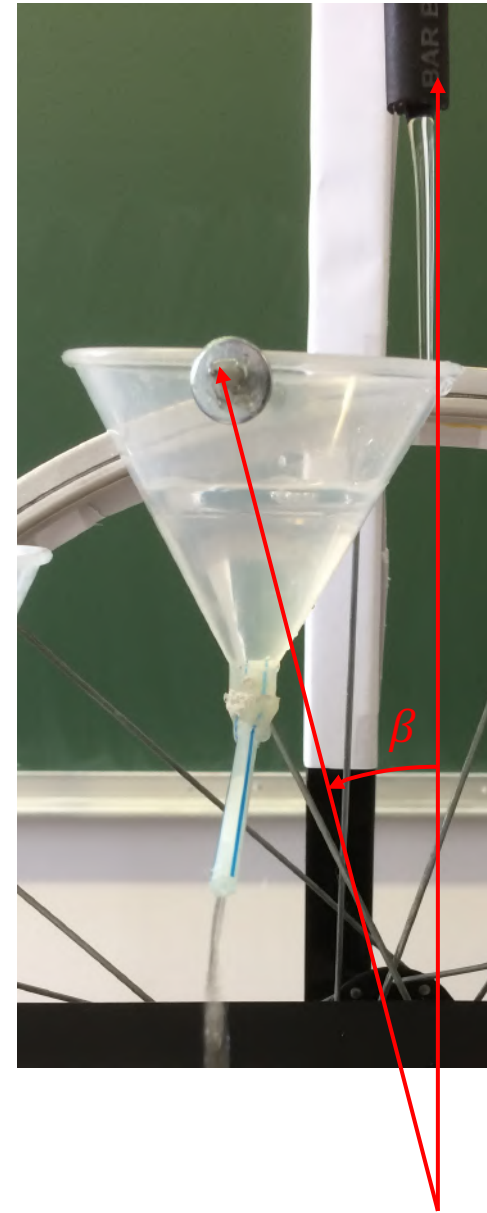
$$\theta_0 = 0,5^\circ$$
$$D_{eau} = 5,9 \text{ g.s}^{-1}$$

## II/ Modélisation du système :

### 1. Modélisation du remplissage des cônes :

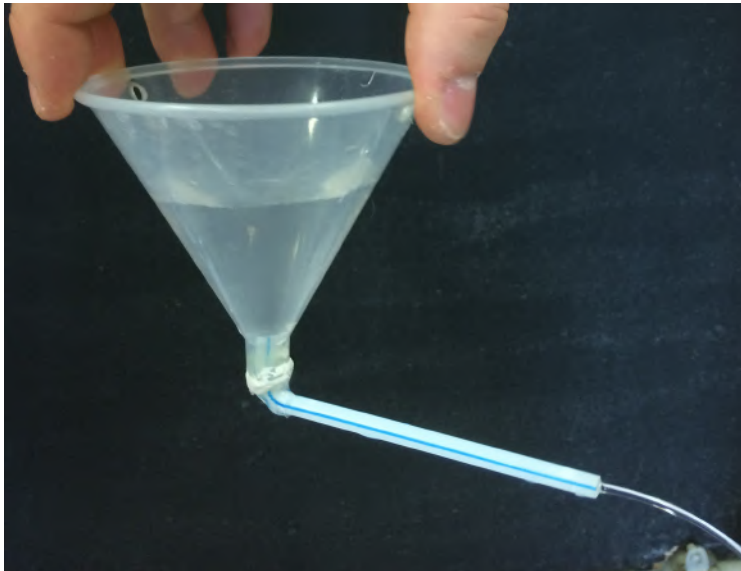
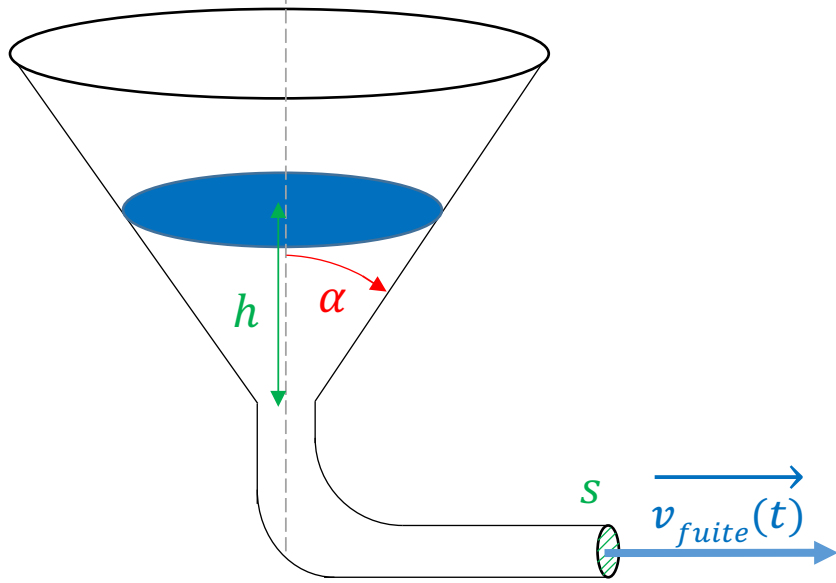


$$\beta = 0,227 \text{ rad}$$



## II/ Modélisation du système :

### 2. Modélisation des fuites d'eau :



Loi de Torricelli :

$$v_{fuite}(t) = \sqrt{2gh}$$

Expression de  $h$  :

$$h = \sqrt[3]{\frac{3m}{\rho\pi \tan^2(\alpha)}}$$

Débit de fuite :

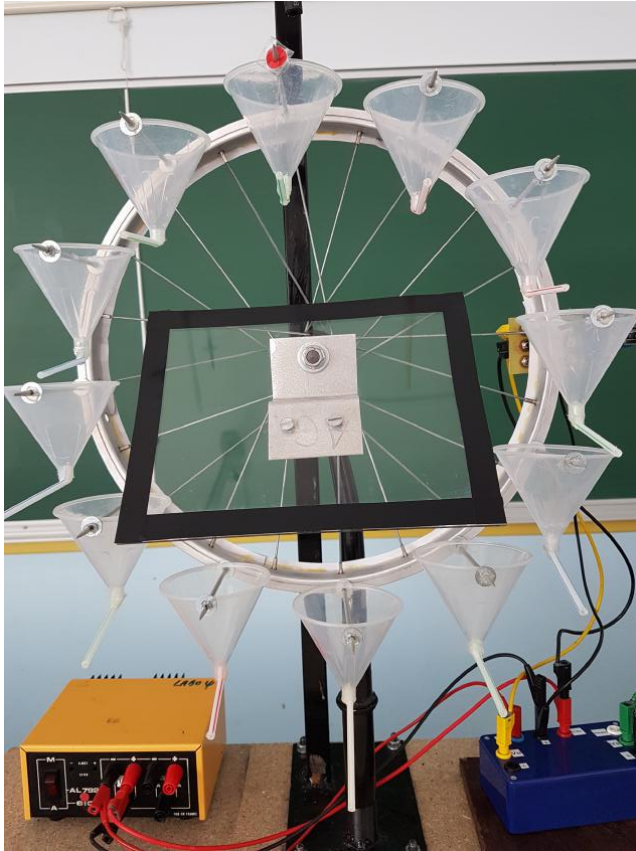
$$D_{fuite} = \rho s v_{fuite}(t)$$

$$D_{fuite,j} = K_j \sqrt[6]{m_j}$$

$$\text{avec } K_j = \frac{\rho s \sqrt{2g}}{\sqrt[6]{\rho \frac{\pi \tan^2(\alpha)}{3}}}$$

## II/ Modélisation du système :

### 3. Equations obtenues :



#### Équation d'évolution des masses d'eau :

Bilan de masse global appliqué à la masse d'eau dans les cônes

$$\forall j \in \llbracket 0; 11 \rrbracket \quad \frac{dm_j}{dt} = Q(\theta_j(t)) - D_{fuite, j}$$

#### Équation d'évolution des angles :

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega$$



## II/ Modélisation du système :

### 3. Equations obtenues :

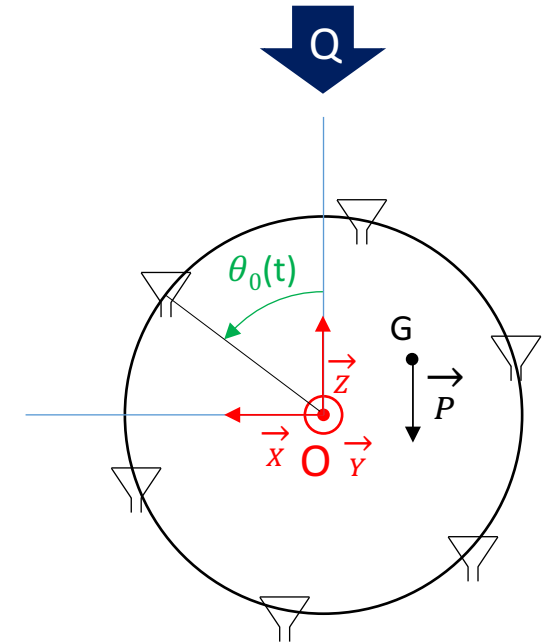
#### Équation d'évolution de la vitesse angulaire :

Théorème du moment cinétique (appliqué à l'ensemble des parties tournantes en O suivant y) :

$$\frac{d(J_{\Delta} + R^2 \sum_{j=0}^{11} m_j(t))\omega(t)}{dt} = -\gamma\omega(t) + Rg \sum_{j=0}^{11} m_j(t)\sin(\theta_j(t))$$

$$\text{En notant : } M(t) = \sum_{j=0}^{11} m_j(t)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{R^2 \dot{M}(t) + \gamma}{J_{\Delta} + R^2 M(t)}\omega(t) + \frac{Rg}{J_{\Delta} + R^2 M(t)} \sum_{j=0}^{11} m_j(t) \sin(\theta_j(t))$$



## II/ Modélisation du système :

### 3. Programme informatique :

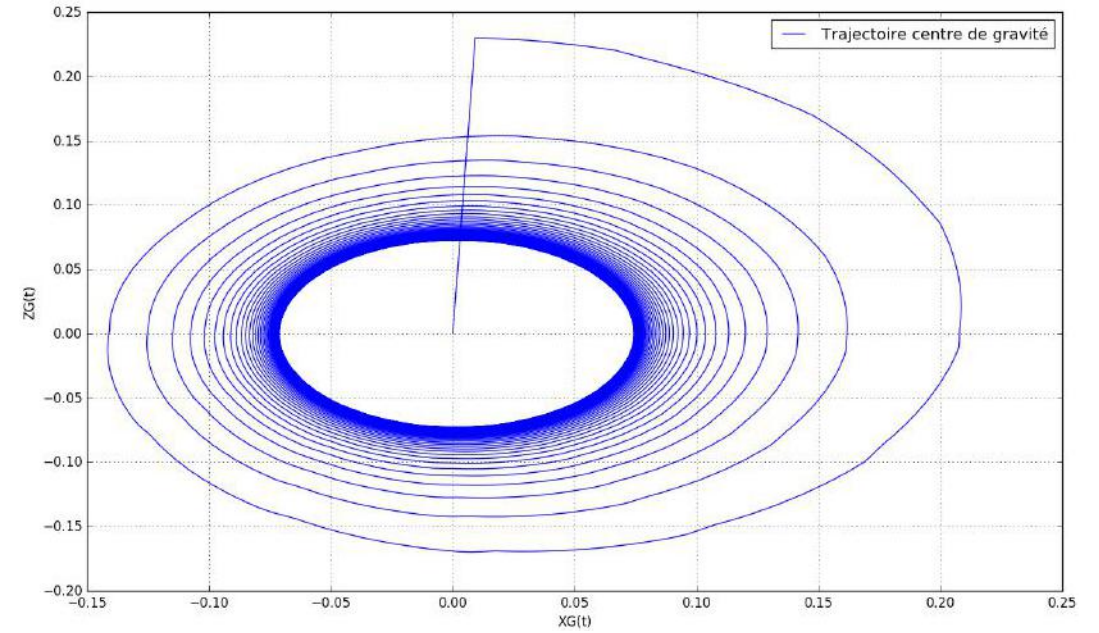
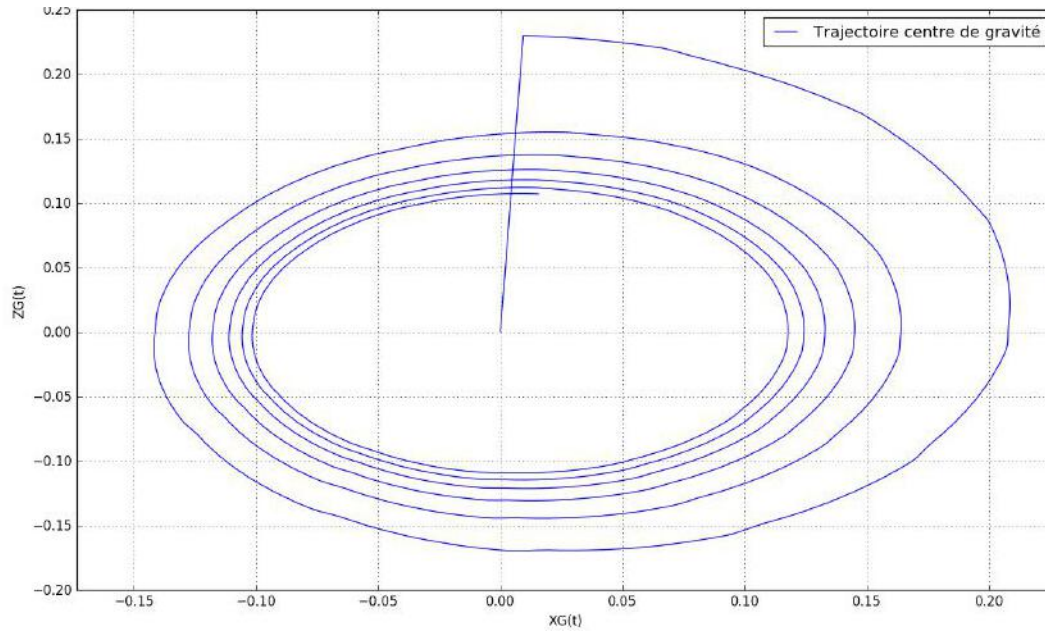
Résoudre le  
système  
différentiel.



Trouver le centre  
de gravité à  
chaque instant.



Afficher les  
résultats  
obtenus.



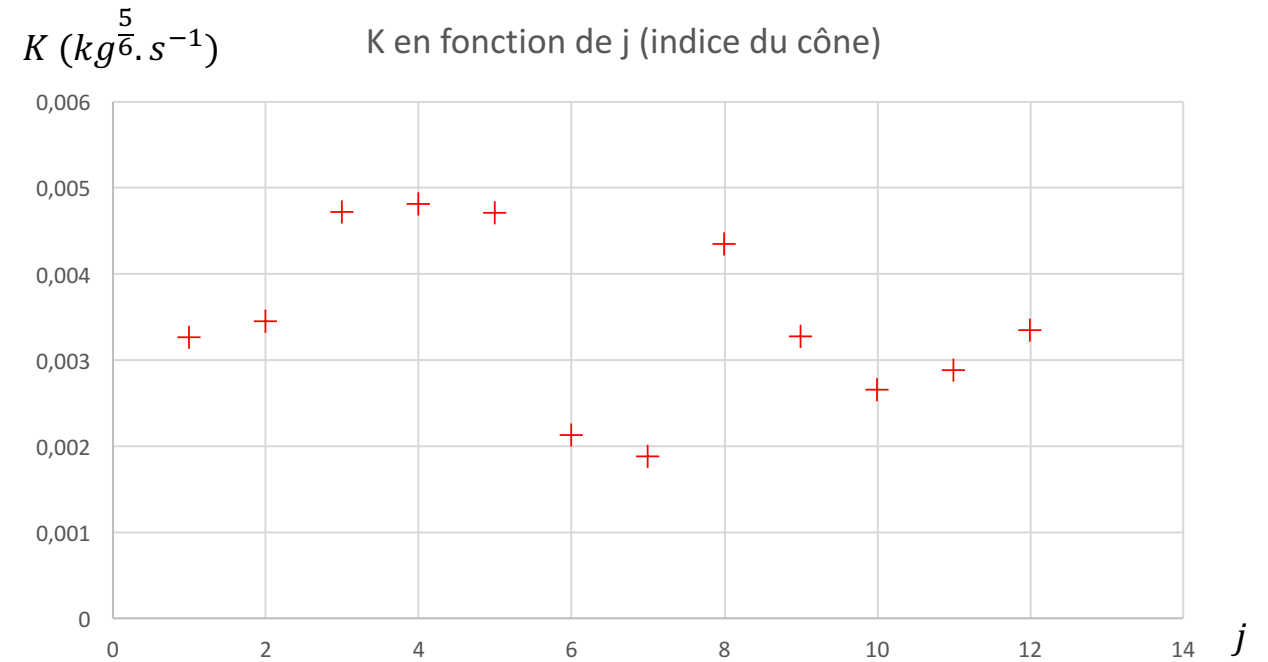
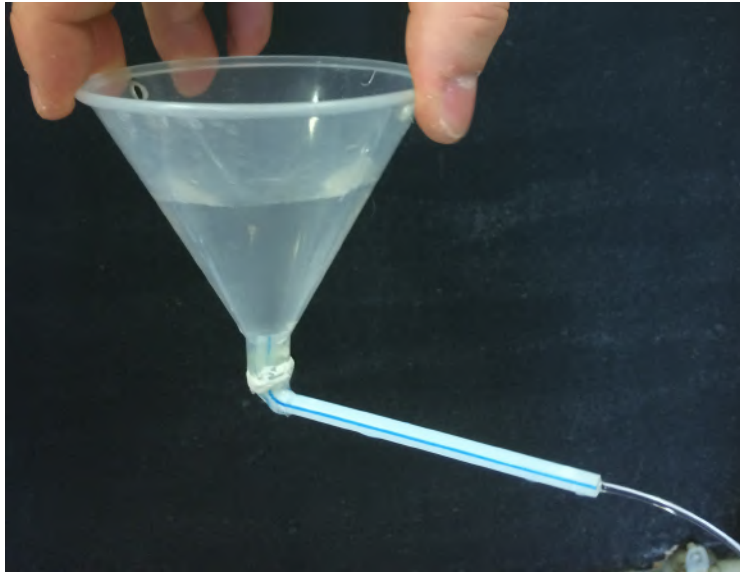
### III/ Paramètres à déterminer :

#### 1. Identification des paramètres :

- Coefficient de fuite  $K_j$  ----->  $D_{fuite,j} = K_j \sqrt[6]{m_j}$
- Facteur de frottements secs  $f$  ----->  $M_{en\ 0\ frottements} = -\gamma\omega - f$
- Facteur de frottements fluides  $\gamma$
- Moment d'inertie de la roue  $J_\Delta$  -----> *Intervient dans le TMC*
- Capteur de vitesse

### III/ Paramètres à déterminer :

#### 2. Mesure et comparaison de K :



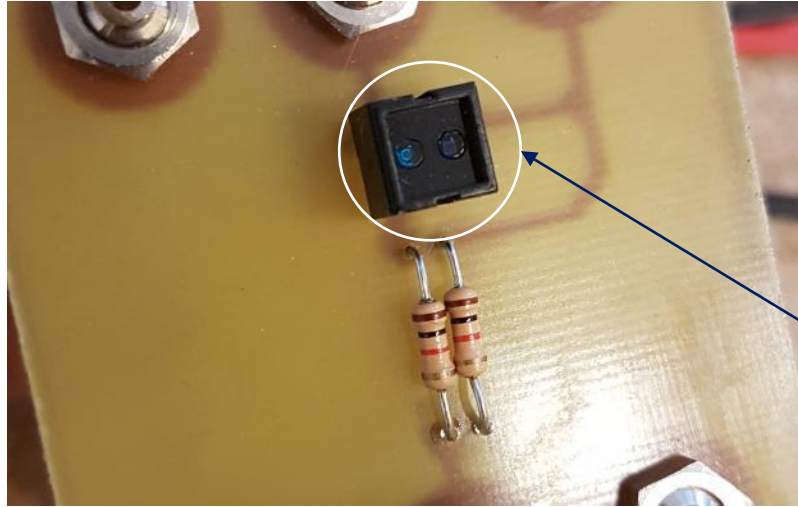
$$K_{j, \text{moyen}} = 0,0035$$
$$\sigma_{Kj} = 0,001$$

$$\Rightarrow \forall j \in \llbracket 1; 12 \rrbracket K_j = 0,0035$$

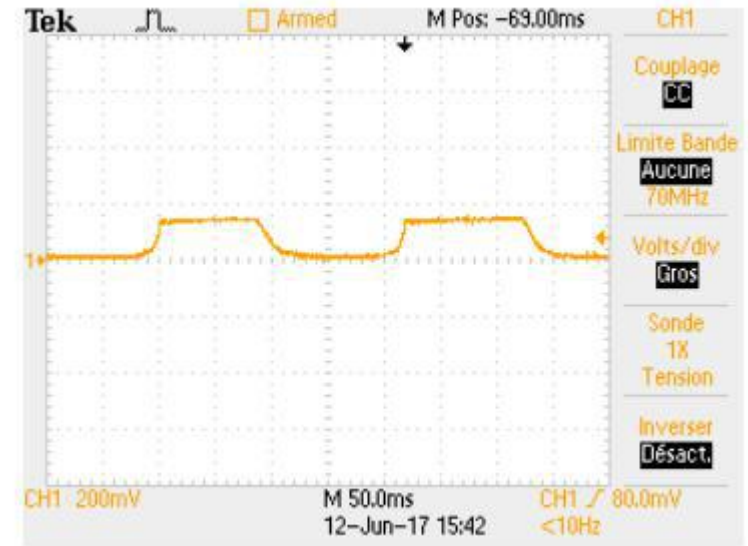


# III/ Paramètres à déterminer :

## 3. Principe du capteur de vitesse :

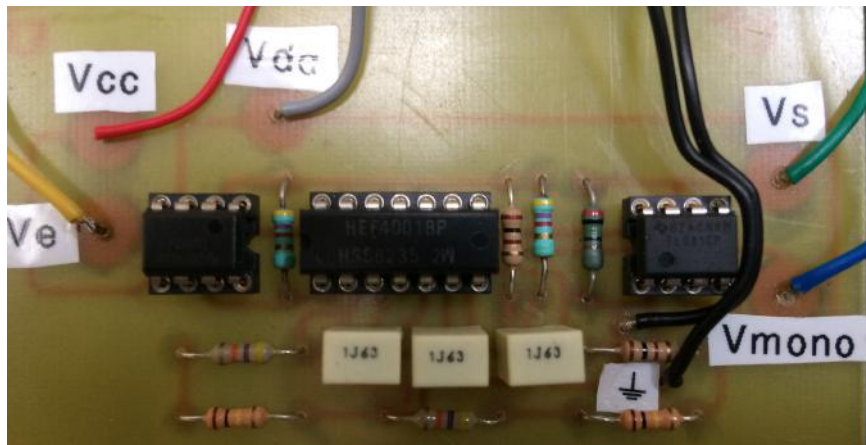
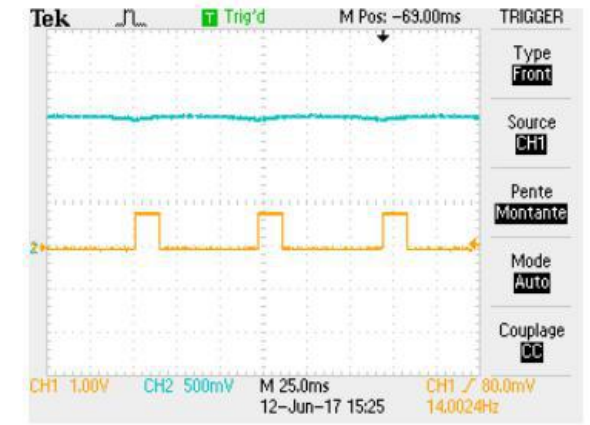


Optocoupleur



### III/ Paramètres à déterminer :

### 3. Principe du capteur de vitesse :



$$0 < f_{roue} < 2$$

$$0 < f_{elec} < 72$$

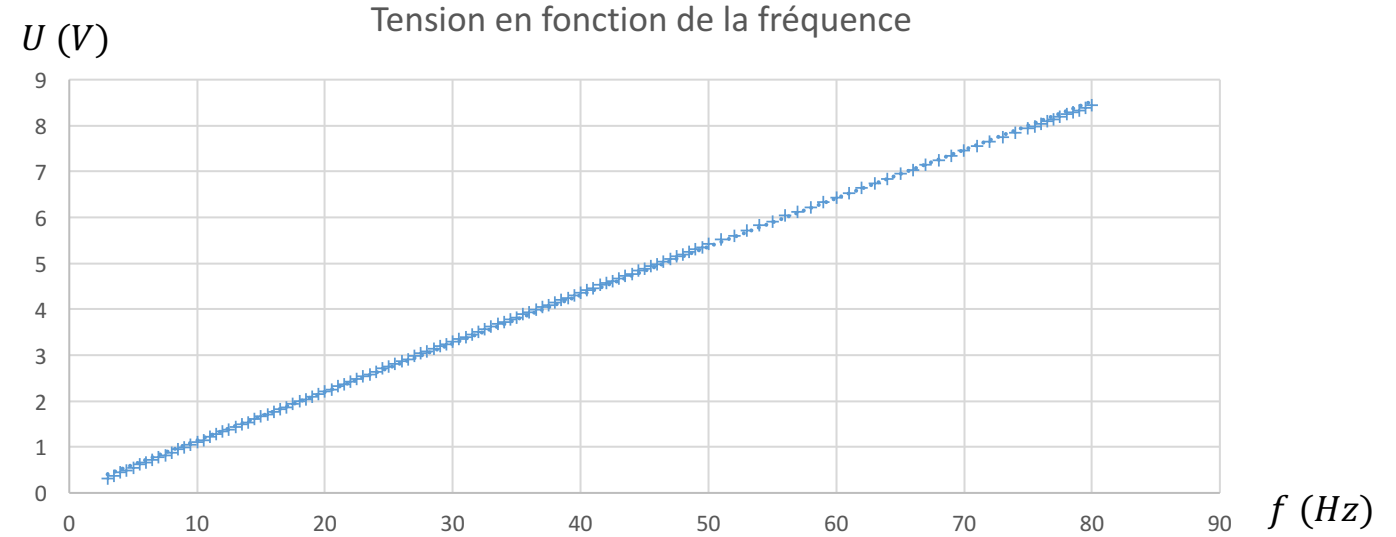
$$f_{max, \text{elec}} = 72 \text{ Hz}$$

$$T_{min,elec} = 0,014 \text{ s}$$

$$\tau_{mono} \leq \frac{T_{min \text{ \textit{elec}}}}{4}$$

### III/ Paramètres à déterminer :

#### 4. Bilan :

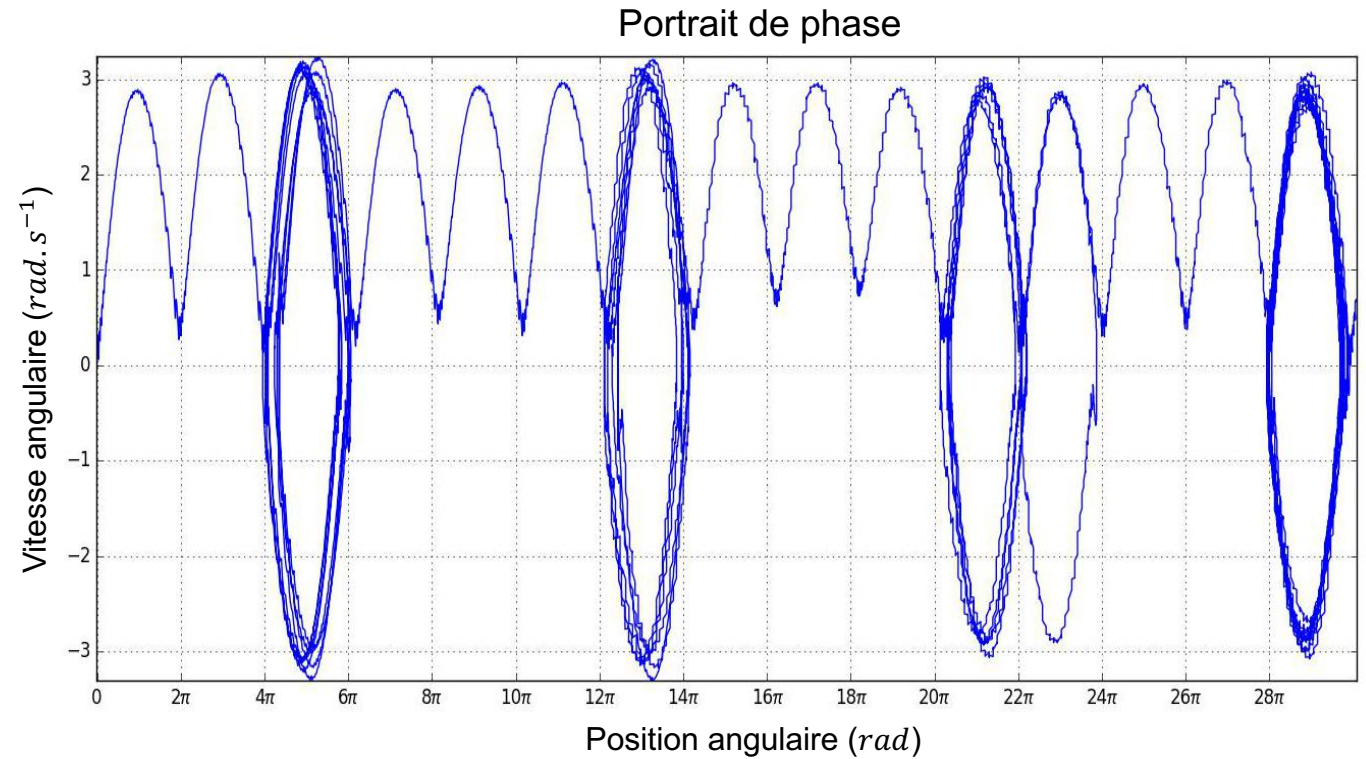
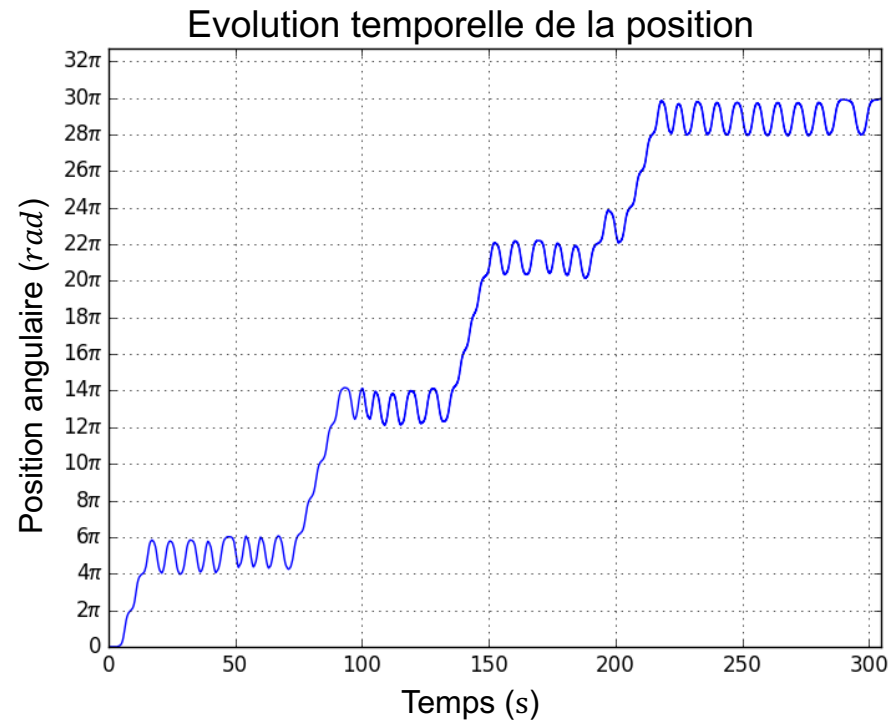


$$U = 0,1055f_{\text{elec}} + 0,0884 \text{ avec } f = 36f_{\text{roue}} = \frac{36}{2\pi}\omega_{\text{roue}}$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{roue}} = \frac{2\pi}{36 \times 0,1055} U$$

# IV/ Expérimentation :

## 1. Exemple de régime périodique avec bifurcations :



$$\theta_0 = 2,4^\circ$$
$$D_{eau} = 9,8g \cdot s^{-1}$$



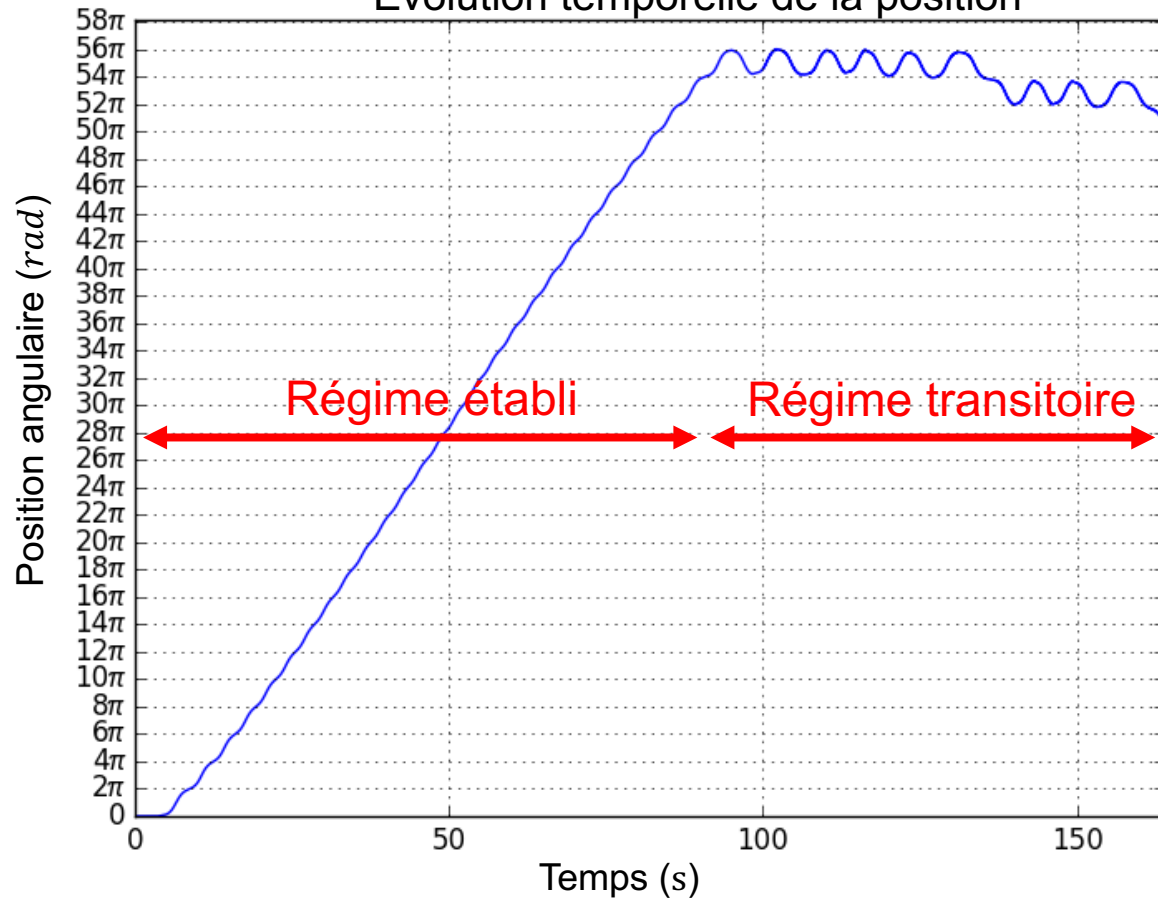
# IV/ Expérimentation :

## 2. Exemple de régime établi puis transitoire :

$$\theta_0 = 5,1^\circ$$

$$D_{eau} = 5,7 g.s^{-1}$$

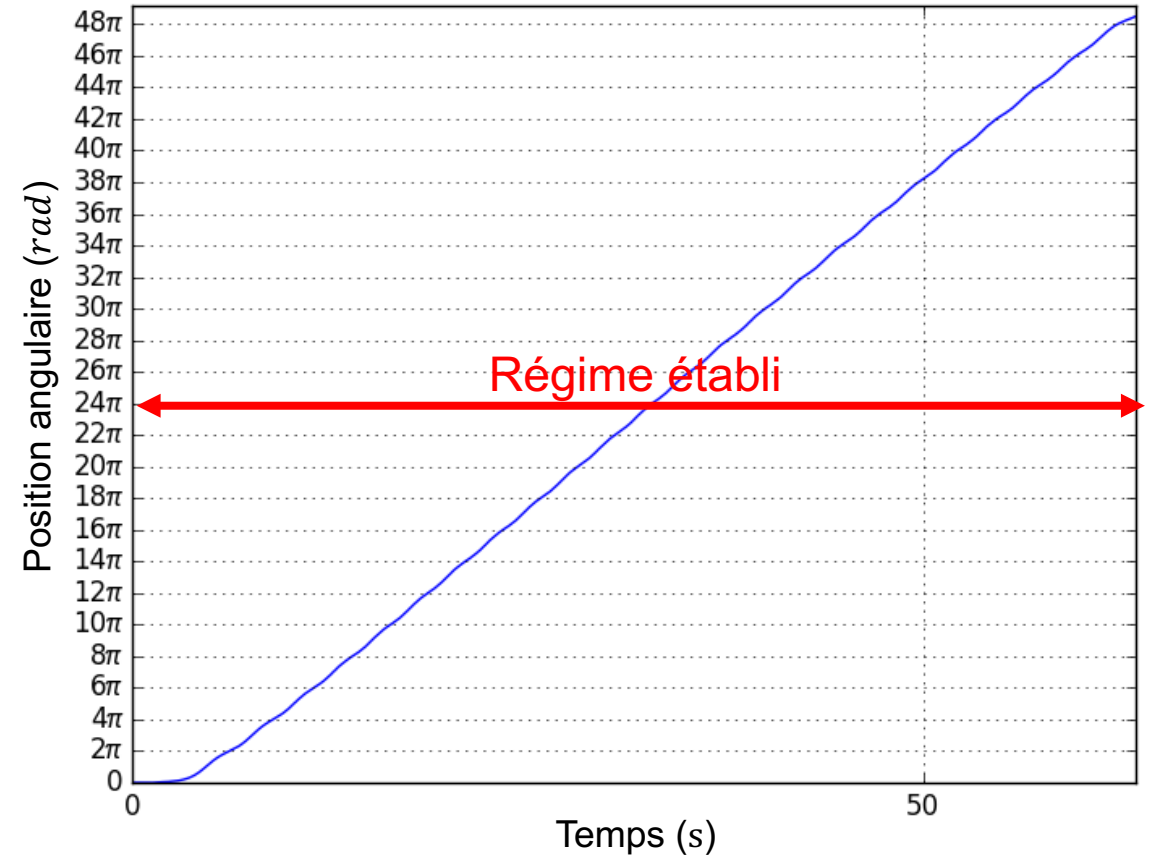
Evolution temporelle de la position



$$\theta_0 = 7,72^\circ$$

$$D_{eau} = 16,6 g.s^{-1}$$

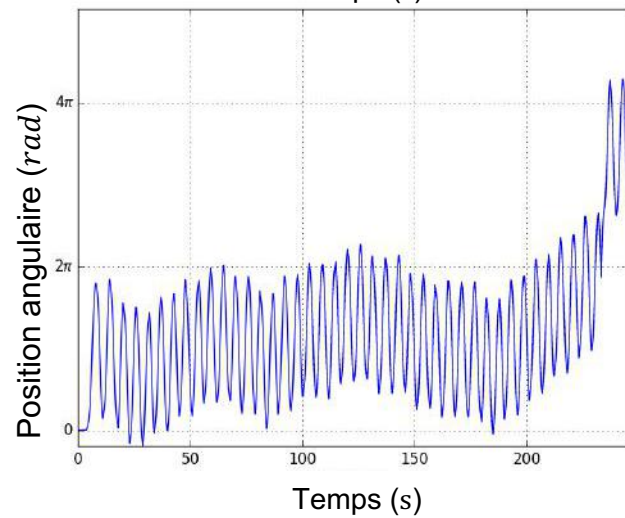
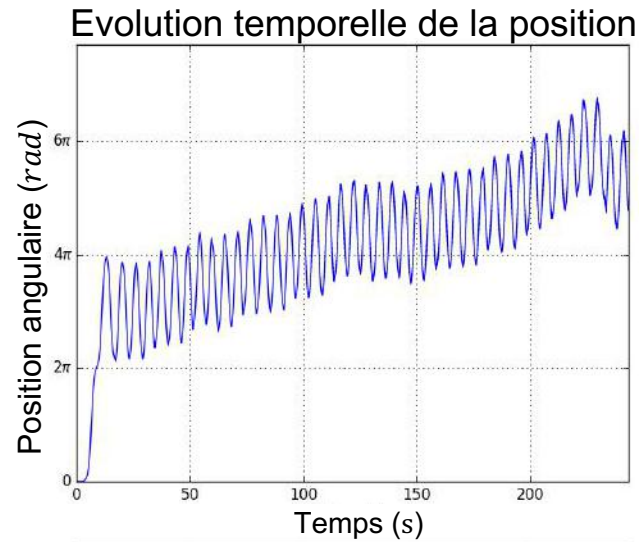
Evolution temporelle de la position



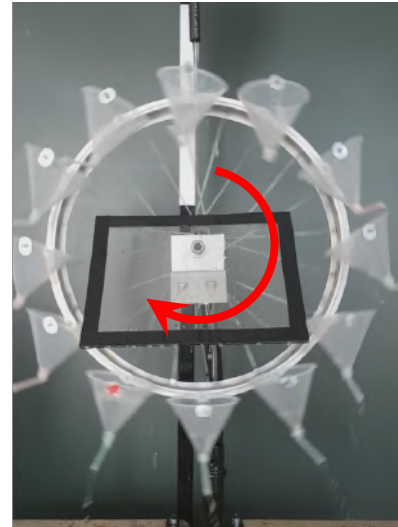
# IV/ Expérimentation :

3. Deux fois la même expérience ?

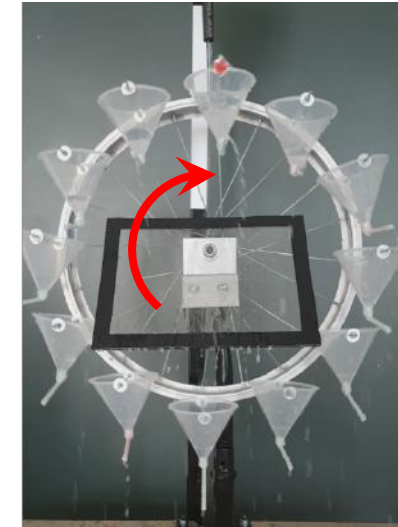
$$\theta_0 = 3,1^\circ$$
$$D_{eau} = 12,1 g \cdot s^{-1}$$



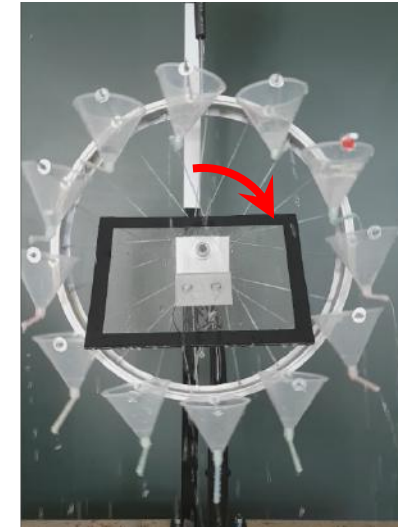
$t = 6$  s



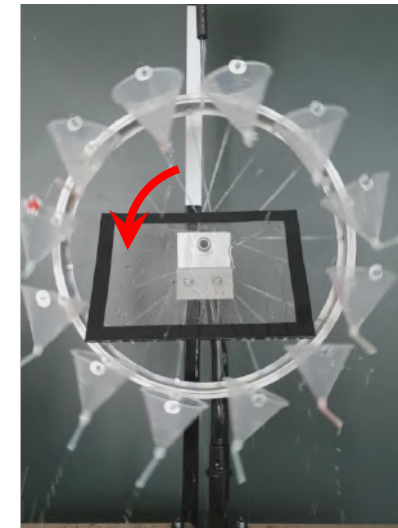
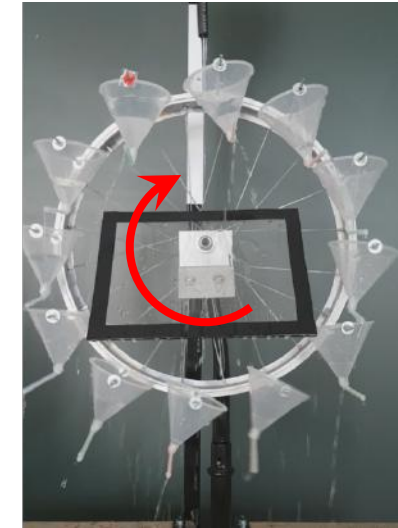
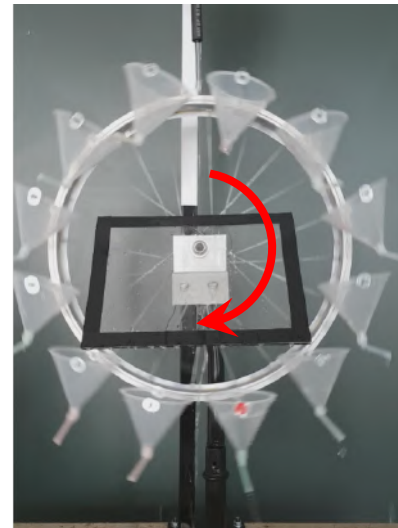
$t = 7$  s



$t = 9$  s



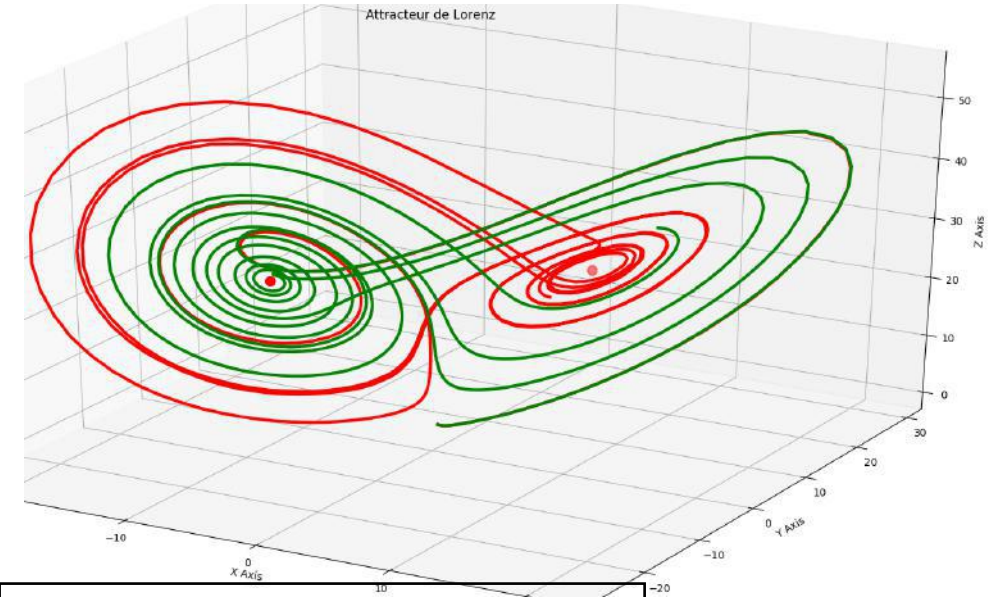
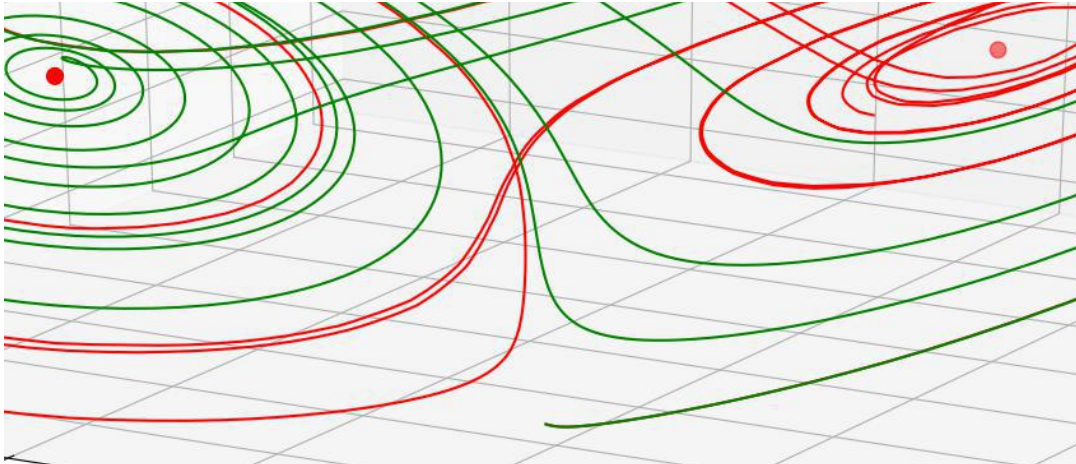
$t = 10$  s



# V/ Conclusion :

L'attracteur de Lorenz :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) \\ \frac{dy}{dt} = \rho \cdot x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta \cdot z \end{cases}$$



**Chiffres significatifs:**

**— 3 — 6**

Influences forte de certains paramètres :

- Conditions initiales
- Précision des mesures effectuées
- Précision du capteur
- Précision physique non infinie

**Impossibilité de prédire le comportement de la roue !**

## Annexe 1 : Démonstration des formules relatives au débit de fuite :

$$V_{eau} = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

$$R = \tan(\alpha) h$$

$$m = \rho V_{eau} = \rho \frac{\pi}{3} R^2 h = \rho \frac{\pi}{3} \tan^2(\alpha) h^3$$

$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3m}{\rho\pi \tan^2(\alpha)}} \quad \Rightarrow v_{fuite} = \sqrt{2g} \sqrt[6]{\frac{3m}{\rho\pi \tan^2(\alpha)}} \quad \Rightarrow D_{fuite} = s\rho\sqrt{2g} \sqrt[6]{\frac{3m}{\rho\pi \tan^2(\alpha)}}$$

$$\Rightarrow D_{fuite} = s\rho\sqrt{2g} \sqrt[6]{\frac{3}{\rho\pi \tan^2(\alpha)}} \sqrt[6]{m}$$



## Annexe 2 : Démonstration du TMC :

Théorème du moment cinétique appliqué à la roue en O suivant Y, aux cônes ainsi qu'aux masses d'eau qu'ils contiennent :

Moment des forces de frottements fluides :

$$M_f = -\gamma\omega$$

$$\frac{d(J_\Delta + R^2 M)\omega}{dt} = -\gamma\omega + Rg \sum_{j=0}^{11} m_j \sin(\theta_j)$$

Moment des forces de frottements secs :  
NÉGLIGÉS

$$(J_\Delta + R^2 M) \frac{d\omega}{dt} + R^2 \dot{M} \omega = -\gamma\omega + Rg \sum_{j=0}^{11} m_j \sin(\theta_j)$$

Moment du poids s'exerçant sur les masses d'eau :

$$M_{poids} = Rg \sum_{j=0}^{11} m_j \sin(\theta_j)$$

$$(J_\Delta + R^2 M) \frac{d\omega}{dt} = -(\gamma + R^2 \dot{M})\omega + Rg \sum_{j=0}^{11} m_j \sin(\theta_j)$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{(\gamma + R^2 \dot{M})}{(J_\Delta + R^2 M)} \omega + \frac{Rg}{(J_\Delta + R^2 M)} \sum_{j=0}^{11} m_j \sin(\theta_j)$$

# Annexe 3 : Programme Centre de Gravité et résolution :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4 from math import sin,cos,pi
5
6 #Paramètres globaux:
7 alpha=0.618
8 beta=0.227
9
10 def debit(teta,Q):
11     global alpha,beta
12     tetar=teta%(2*pi)
13     if tetar <= (2*pi-beta) and tetar >= beta:
14         return 0
15     else:
16         return Q
17
18 def tetaj(teta,j):
19     return teta+j*2*pi/12
20
21 #Fonction globale:
22 def centre_gravite(T,tetainit,Q):
23
24     #définition des paramètres de l'exp :
25     gamma=2.7e-3
26     R=0.23
27     g=9.81
28     K=0.0035
29     J0=2.39e-2
30
31     #Définition de la fonction système différentiel :
32     def equadif(L,t):
33         #L=[omega,teta0,m0,m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11]
34         Ldot=[0]*len(L)
35         Mdot=0
36         Ldot[1]=L[0] # theta_0_point = omega
37         A=0
38         M=0
39         for j in range (2,len(L)):
40             Ldot[j]=debit(tetaj(L[1],j),Q)-K*L[j]**(1/6)
41             M=M+L[j] #calcul masse totale
42             Mdot=Mdot+Ldot[j] #calcul de la dérivée de la masse totale
43             A+=L[j]*np.sin(tetaj(L[1],j))
44             Ldot[0]=-L[0]*(gamma+(R**2)*Mdot)/(J0+R**2*M)+(R*g)/(J0+R**2*M)*A
45         return Ldot
46
47     #Conditions initiales:
48     L0=[0,tetainit,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
49     L=odeint(equadif,L0,T)
50
51     teta0=L[:,1]
52     omega=L[:,0]
53     m0=L[:,2]
54     m1=L[:,3]
55     m2=L[:,4]
56     m3=L[:,5]
57     m4=L[:,6]
58     m5=L[:,7]
59     m6=L[:,8]
60     m7=L[:,9]
61     m8=L[:,10]
62     m9=L[:,11]
63     m10=L[:,12]
64     m11=L[:,13]
65
66     # calcul des positions du centre de gravité :
67     Xg=[0]*len(T)
68     Zg=[0]*len(T)
69     M=[0]*len(T)
70     for i in range (len(T)):
71         for j in range (2,14):
72             M[i]+=L[i,j]
73             if M[i]!=0:
74                 for j in range (2,14):
75                     Xg[i]+=1/M[i]*L[i,j]*sin(tetaj(teta0[i],j))
76                     Zg[i]+=1/M[i]*L[i,j]*cos(tetaj(teta0[i],j))
77
78     return [teta0,omega,m0,m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11,Xg,Zg]
79
80
81 #Définition de la liste des temps :
82 Te=0.005 # Temps d'échantillonnage
83 Tfin=30 # Durée d'expérience
84 T=np.linspace(0,Tfin,int(Tfin/Te)+1)
85
86 #Calculs de la simulation:
87 L=centre_gravite(T,0.0040612,0.06)(first oscillation)
88 L=centre_gravite(T,0.00005408,0.06)
89
90 #Résultats:
91 teta0=L[0]
92 Omegath=L[1]
93 #m0=L[2]
94 #m1=L[3]
95
96 L=centre_gravite(T,0.00005408,0.06)
97
98 #Résultats:
99 teta0=L[0]
100 Omegath=L[1]
101 #m0=L[2]
102 #m1=L[3]
103 #m2=L[4]
104 #m3=L[5]
105 #m4=L[6]
106 #m5=L[7]
107 #m6=L[8]
108 #m7=L[9]
109 #m8=L[10]
110 #m9=L[11]
111 #m10=L[12]
112 #m11=L[13]
113 XG=L[14]
114 ZG=L[15]
115
116 #Trajectoire du centre de gravité:
117 plt.figure('Trajectoire du centre de gravité')
118 plt.clf()
119 plt.plot(XG,ZG,color='blue')
120 plt.xlabel('XG(t)')
121 plt.ylabel('ZG(t)')
122 plt.grid()
123 plt.legend()
124
125 #Angles évoluant dans le temps:
126 plt.figure('Évolution angulaire en fonction du temps')
127 plt.clf()
128 plt.plot(T,teta0,label="teta0(t)")
129 plt.xlabel('t')
130 plt.ylabel('teta(t)')
131 plt.grid()
132 plt.legend()
133
134 #Vitesse angulaire:
135 plt.figure('Évolution de la vitesse angulaire en fonction du temps')
136 plt.clf()
137 plt.plot(T,Omegath,color='red')
138 plt.xlabel('t')
139 plt.ylabel('Omega(t)')
140 plt.grid()
141 plt.legend()

```

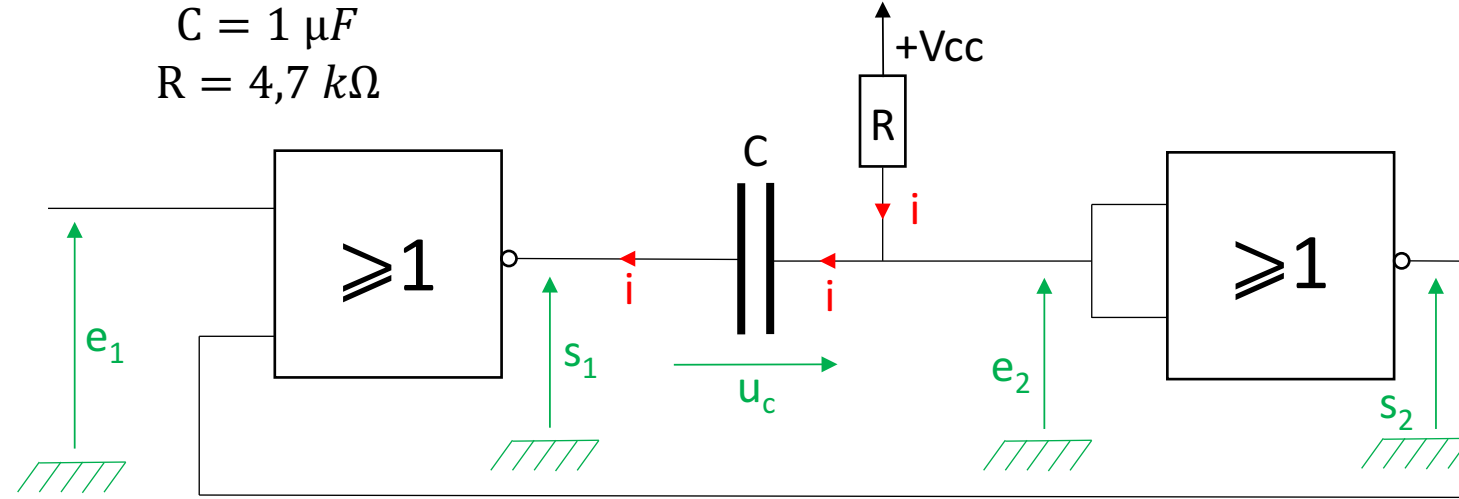
## Annexe 4 : Programme de résolution de K :

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3
4 def trouveK(m0,T0,p):
5
6     def eqdif(m,t):
7         mdot=-m[1]*(m[0]**(1/6))
8         return [mdot,0]
9
10    K=0
11    sol=odeint(eqdif,[m0,K],np.linspace(0,T0,10000))
12    m=sol[-1,0]
13
14    while abs(m)>=p:
15        if m<0:
16            K-=0.00001
17        else :
18            K+=0.00001
19        sol=odeint(eqdif,[m0,K],np.linspace(0,T0,10000))
20        m=sol[-1,0]
21    return K
22
23 print(trouveK(0.05,20.98,0.00001))
```

## Annexe 5 : Etude du circuit monostable :

$$C = 1 \mu F$$

$$R = 4,7 k\Omega$$



Signal d'entrée	Signal de sortie
00	1
10	0
01	0
11	0

$$s_1 + u_c + Ri = V_{cc}$$

$$\text{À } t=0^+ : s_1(0^+) = 0 ; u_c(0^+) = 0$$

$$\text{À } t=T : e_2(T) = s_1(T) + u_c(T) = \frac{V_{cc}}{2} ; s_1(T) = 0$$

$$u_c + RC \frac{du_c}{dt} = V_{cc} - s_1$$

$$\Rightarrow u_c = V_{cc}(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

$$\frac{V_{cc}}{2} = 0 + V_{cc}(1 - e^{\frac{-T}{RC}})$$

$$\Rightarrow u_c = \lambda e^{\frac{-t}{RC}} + V_{cc}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-T}{RC}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T = \ln(2) RC$$

