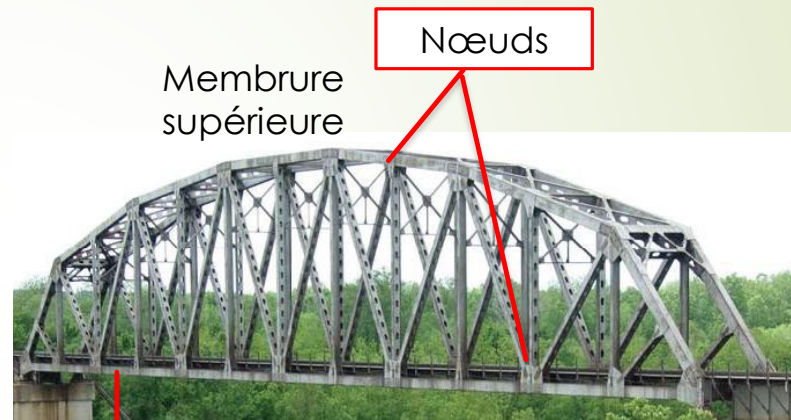
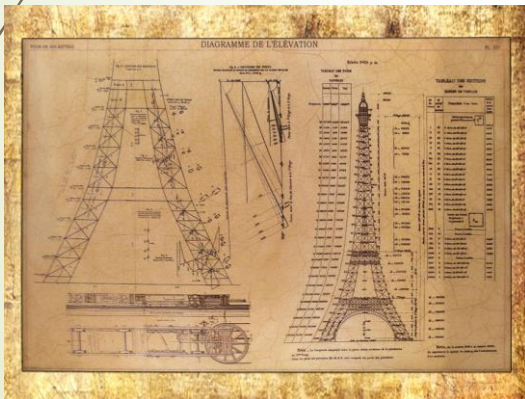


Optimisation d'une structure treillis

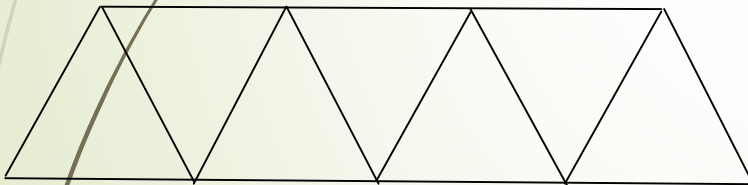
Un treillis, ou système triangulé, est un assemblage de barres verticales, horizontales et diagonales formant des triangles



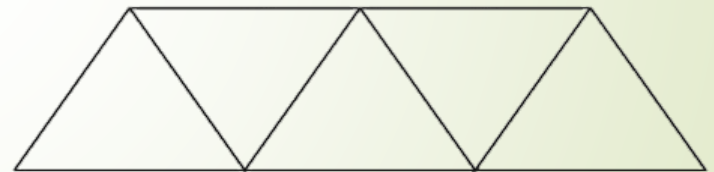
Un tel assemblage allie résistance, rigidité et légèreté.

Sommaire

- Etude des efforts dans un treillis pair et impair
- Principe d'isocontrainte
- Exploitation de l'indicateur volume (W)
- Optimisation d'un treillis 4 barres



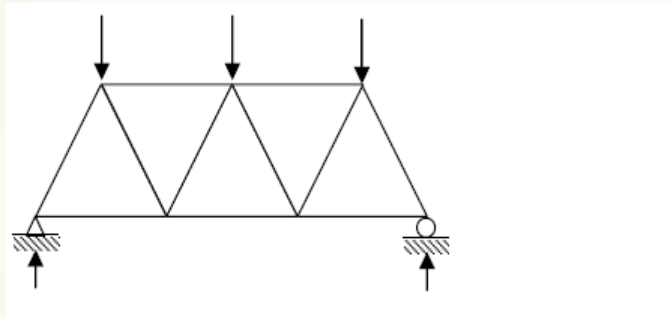
Treillis pair (4 barres)



Treillis impair (3 barres)

Hypothèses d'étude :

- Les articulations sont soit des pivots, soit des rotules, supposées parfaites.
- Le poids des barres est négligé.
- Toutes les charges sont appliquées aux nœuds.



Objectifs :

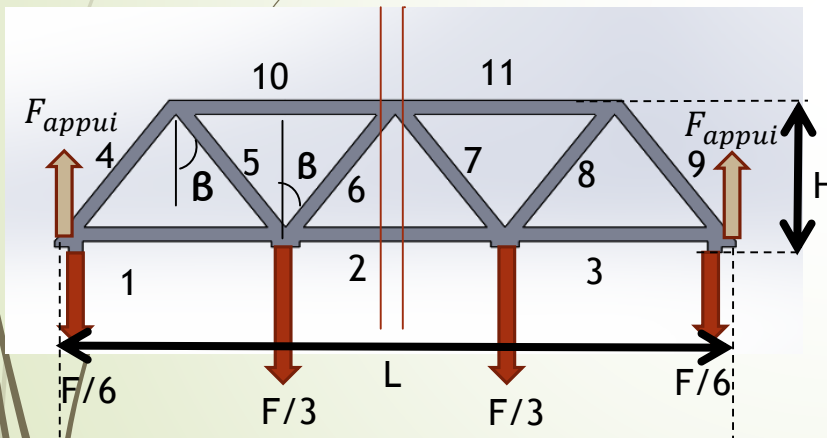
- ❖ Optimiser un treillis d'un point de vue des sections
- ❖ Optimiser un treillis d'un point de vue de la forme

On peut calculer les efforts normaux dans les barres de la façon suivante :

- ➡ Calcul statique (méthode des nœuds)

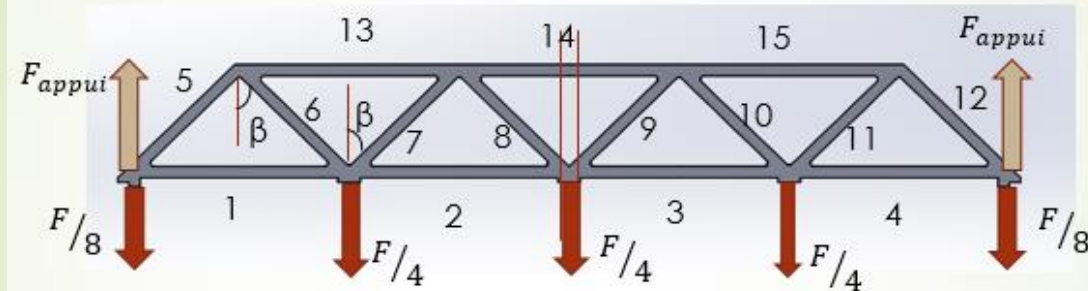
Calcul statique :

On isole chaque nœud en lui appliquant le théorème de la résultante statique projeté sur x et y, et on résout un système d'équations.



- $F_{appui} = F/2$
- $N1 = N3 = (F \times \tan \beta) / 3$
- $N2 = (2/3) F \times \tan \beta$
- $N10 = N11 = -(2/3) F \times \tan \beta$
- $N4 = N9 = (-F/3) \times \cos \beta$
- $N6 = N7 = 0$
- $N5 = N8 = F/3 \times \cos \beta$

Symétrie par rapport aux barres de la membrure supérieure pour treillis impairs

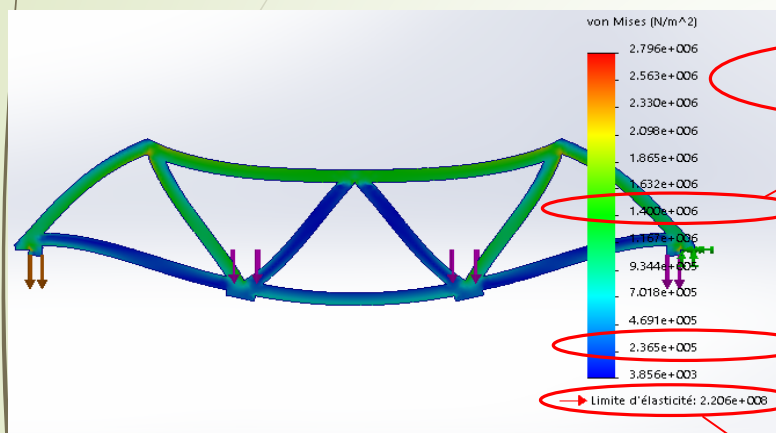


Symétrie par rapport
aux barres de la
membrane inférieure
pour treillis pairs

- $\cos \beta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{(2n)^2}}}$
- $\tan \beta = \frac{L}{2nH}$
- n : nombre de barres de la membrane inférieure

$$\begin{aligned}
 N1=N4 &= \frac{3F}{8} \times \tan \beta \\
 N2=N3 &= \frac{7F}{8} \times \tan \beta \\
 N13=N15 &= \frac{3F}{4} \times \tan \beta \\
 N5=N12=-N6=-N11 &= \frac{-3F}{8 \cos \beta} \\
 N7=N10=-N9=-N8 &= \frac{-F}{8 \cos \beta} \\
 N14 &= -F \times \tan \beta \\
 F_{appui} &= \frac{F}{2}
 \end{aligned}$$

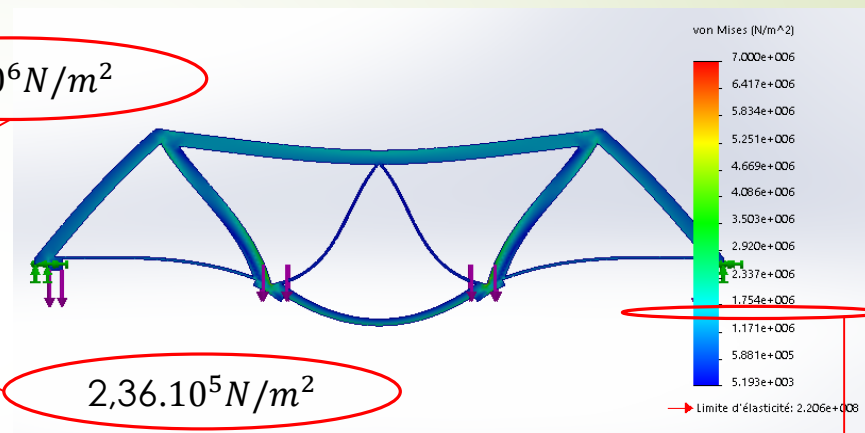
On augmente σ pour uniformiser les contraintes par le biais d'une minimisation des contraintes et donc des sections.



$1,4.10^6 \text{ N/m}^2$

$2,36.10^5 \text{ N/m}^2$

Limite d'élasticité :
 $2,2.10^8 \text{ N/m}^2$



$1,4.10^6 \text{ N/m}^2$

Charge=10 KN

Volume de la structure=0.06 m³

L= 4,83 m

H=1m

Matériaux: acier non allié ($E=2,1.10^{11} \text{ N.m}^{-2}$)

Volume de la structure=0.04 m³

Contrainte= $1,4.10^6 \text{ N.m}^{-2}$

Hypothèses :

- ✓ Toutes les barres travaillent à la même contrainte admissible
- ✓ Chargement sur membrure inférieure
- ✓ Membrure supérieure variable
- ✓ Flambement négligé
- ✓ Charges appliquées sur les nœuds

- $\sigma = \frac{N_i}{S_i}$
- $V_i = S_i l_i$
- $\frac{N_i}{F} = k_i$
- $V = \frac{FLW}{\sigma}$

$$\rightarrow W = \sum_{i=1}^{N_{tot}} k_i \left(\frac{l_i}{L} \right)$$

- σ : Contrainte normale ($N.m^{-2}$)
- N_i : Effort normal dans une barre (N)
- l_i : Surface élémentaire d'une barre (m)
- V_i : Volume élémentaire d'une barre (m^3)
- V : Volume total du treillis
- l_i : Longueur d'une barre
- W : Indicateur de volume (Sans Unité)
- F : Charge appliquée (N)
- L : Longueur du treillis

Exemple de calcul sur un treillis 3 barres :

$$W = \frac{1}{FL} \sum_{i=1}^{11} N_i \times l_i$$

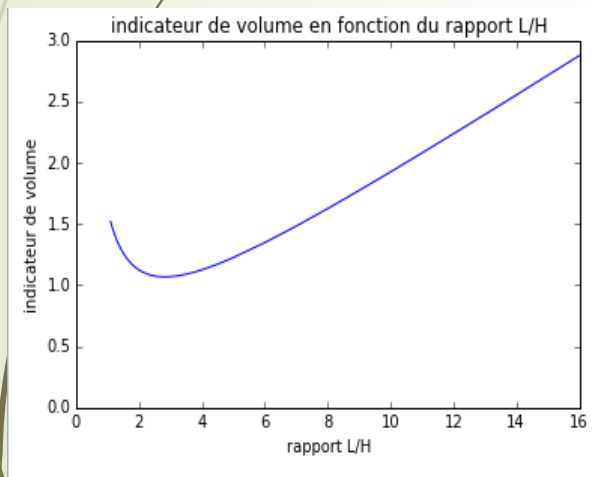
$$= \frac{4}{3} \frac{H}{L} + \frac{5}{27} \frac{L}{H}$$

Généralisation :

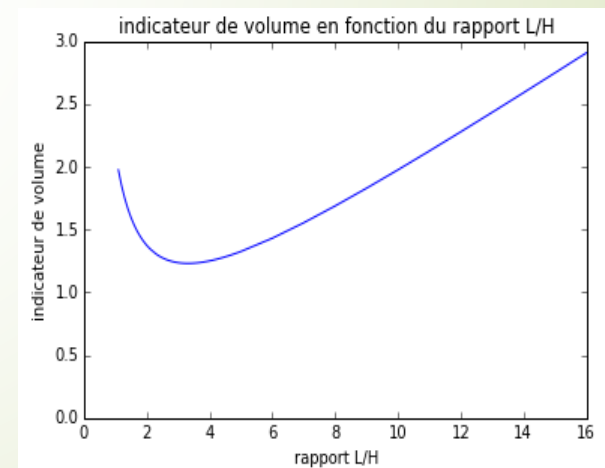
$$W(n) = \frac{n}{2} \left(\frac{H}{L} \right) + \frac{4n^2 + 3n - 4}{24n^2} \left(\frac{L}{H} \right)$$

- W : Indicateur de volume
- F : Charge appliquée
- L : Longueur du treillis
- H : Hauteur du treillis
- N_i : Effort normal dans une barre
- l_i : Longueur d'une barre
- n : nombre de barres de la membrure inférieure

Afin de minimiser le volume d'un treillis on cherche le minimum de l'indicateur de volume :

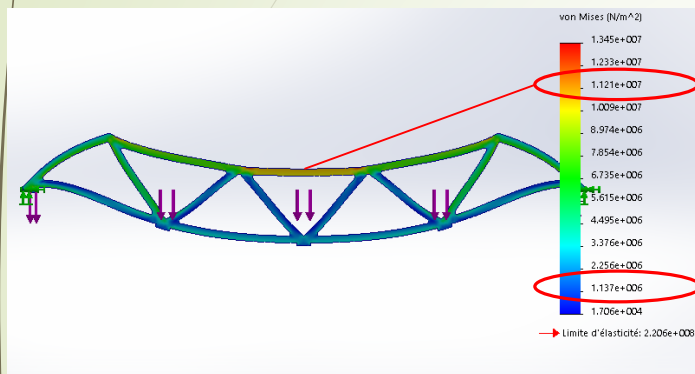


$n=3$, $W_{\min}=1.00$, $L/H(\min)=2,68$



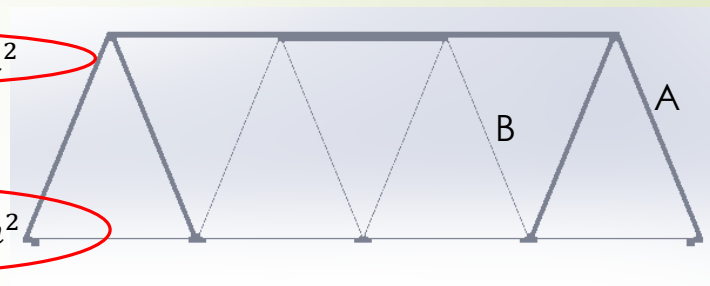
$n=4$, $W_{\min}=1.22$, $L/H(\min)=3,33$

Optimisation du volume par isocontrainte : Charge=40 KN, L=8 m, H=1 m



$$1,21.10^7 N/m^2$$

$$1,13.10^6 N/m^2$$



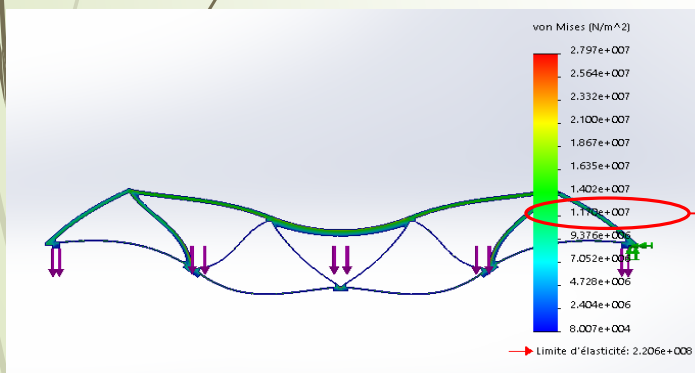
$$W_{\min} = 1,22 \text{ (L/H=3,3)}$$

$$L=8\text{m}$$

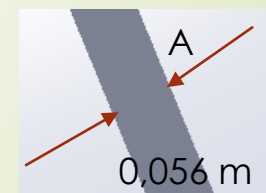
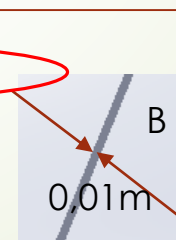
$$H=2,42\text{m}$$

$$\text{Volume de la structure} = 0,03 \text{ m}^3$$

$$\text{Volume de la structure} = 0,10 \text{ m}^3$$

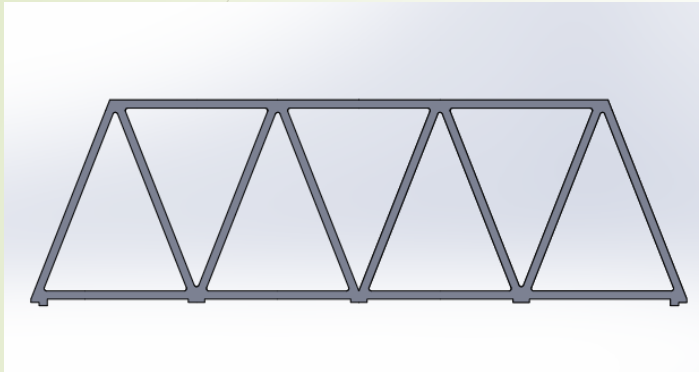


$$1,21.10^7 N/m^2$$

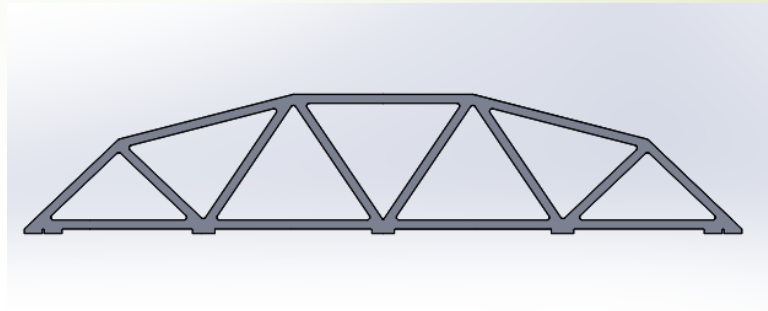


$$\text{Volume de la structure} = 0,04 \text{ m}^3$$

Optimisation du volume par la forme H=2,42 m, L=8 m

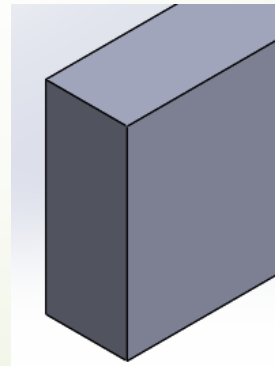


- ❖ Treillis 4 barres creuses :
Volume de la structure= 0.12 m^3
- ❖ Treillis 4 barres pleines :
Volume de la structure= 0.14 m^3

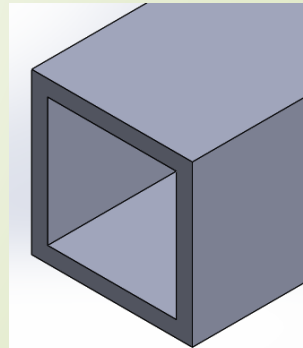


- ❖ Treillis 4 barres creuses à membrure supérieure circulaire :
Volume de la structure= 0.09 m^3

Section pleine



Section creuse





Conclusions

- Le treillis à membrure supérieure circulaire est le moins volumineux
- Plusieurs façons d'optimiser le volume contraint par plusieurs hypothèses
- Difficultés d'optimiser ces structures