VI – CIRCUITS LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

Dans ce chapitre d'électricité on va aborder la résolution des équations différentielles. On verra aussi l'importance de la continuité d'une variable et l'utilisation de certains critères comme le portrait de phase pour pressentir les solutions du problème.

I – Les différents régimes

I-1) Régime continu ou variable

On rappelle que

- Le régime continu correspond au fonctionnement d'un circuit lorsque toutes les intensités et toutes les tensions du circuit sont indépendantes du temps : toutes les grandeurs électriques sont des constantes par rapport au temps. Cela sous-entend qu'aucun paramètre des sources n'est modifié.

Par opposition, on parle de régime variable quand intensités et tensions varient au cours du temps.

I-2) Régime permanent

On appelle régime permanent le fonctionnement où les caractéristiques des intensités et des tensions ne varient pas au cours du temps. Cela englobe le régime continu qui est un régime permanent mais ce n'est pas le seul type de régime permanent. On verra en deuxième période que **les signaux sinusoïdaux correspondent également à des régimes permanents**. Il sera donc nécessaire de bien distinguer un régime permanent d'un régime continu et de ne pas faire d'amalgame entre ces deux notions.

I-3) Régime transitoire

Cependant il est rare qu'un phénomène dure toute l'éternité : il y a un instant où par exemple on allume les sources. On peut donc passer d'un régime permanent à un autre.

On appelle régime transitoire le régime durant lequel on passe d'un régime permanent à un autre.

C'est par exemple ce qui se passe à l'établissement ou à l'arrêt d'une source de courant ou de tension. Il s'agit d'un régime temporaire par opposition aux précédents régimes. Malgré son caractère éphémère, il est cependant d'une grande importance.

Il peut en effet se produire des phénomènes très brefs durant lesquels intensité et/ou tension risquent de prendre des valeurs très grandes, ce qui risque d'endommager les composants en les soumettant à des contraintes en dehors de leur domaine de fonctionnement.

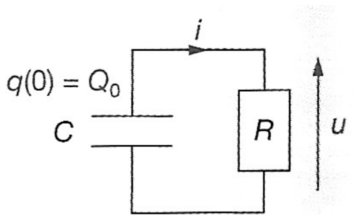
On s'intéresse donc dans ce chapitre à ce type de régime sur le cas simple des circuits électriques linéaires ne comprenant que des résistors, des bobines, des condensateurs et des générateurs modélisables à l'aide du modèle de Thévenin.

II – Régime libre d'un circuit RC

II-1) Régime libre

Un circuit composé d'éléments résistifs, de condensateurs ou de bobines, peut évoluer à partir d'un état initial dans lequel l'un des éléments contient une énergie emmagasinée. **Si aucun générateur ne figure dans le circuit, l'évolution est dite libre**, elle conduit généralement à une dissipation de l'énergie initiale dans les éléments résistifs, pendant une durée caractéristique qu'il est important de savoir préciser.

Nous illustrons ce point à l'aide d'un premier circuit, ne comprenant qu'un condensateur et un résistor : on parle de circuit RC. À l'instant initial, l'énergie emmagasinée dans le circuit ne peut se trouver que dans le condensateur ; celui-ci est donc chargé, notons Q_0 la charge initiale.



La mise en équation du circuit s'appuie sur la loi des mailles ou, plus simplement, l'égalité de la tension aux bornes des deux composants :

$$u = \frac{q}{C} = Ri.$$

De plus $i = -C\,\frac{du}{dt}$ $\Rightarrow \mathrm{u} = -\mathrm{R}C\,\frac{du}{dt}$
Or $q = Cu\ d'o$ù :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$$

Le produit **τ= RC** a la dimension d'un temps, car la dimension de la dérivée $\frac{dq}{dt}$ est le rapport d'une charge et d'un temps.

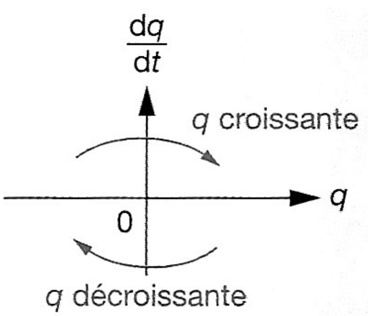
Le produit de la résistance R par la capacité C est le temps caractéristique τ, ou constante de temps, du circuit RC.

$$\boldsymbol{\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0}$$

II-2) Portrait de phase

a) Généralités

Avant de résoudre analytiquement une équation différentielle, une interprétation graphique permet d'en prévoir les principales propriétés. Dans le cas de cette équation du premier ordre, on choisit de raisonner dans le plan comportant q(t) en abscisse et $\frac{dq}{dt}$ en ordonnée : on parle de plan de phase.



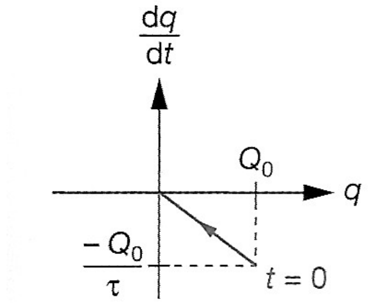
Quelques propriétés générales doivent être mentionnées :

- Une solution q(t) continue et dérivable correspond à une courbe dans le plan de phase, appelée portrait ou trajectoire de phase ;
- Cette courbe est paramétrée par t, on peut donc orienter une trajectoire de phase selon t croissant ;
- Dans le demi-plan supérieur, lieu de valeurs positives de la dérivée $\frac{dq}{dt}$ correspondant à une croissance de q(t), le portrait de phase est dirigé vers la droite (valeurs croissantes de l'abscisse). Il est dirigé vers la gauche dans le demi-plan inférieur ;
- En un point situé sur l'axe des abscisses, la dérivée $\frac{dq}{dt}$ est nulle : **q(t) apparaît comme extrémal, c'est-à-dire que la trajectoire de phase franchit l'axe des abscisses verticalement.**

b) Le circuit RC

On reprend désormais le cas de la réponse libre du circuit RC, le signal dont on étudie l'évolution étant la charge q(t) du condensateur.

Le portrait de phase associé à l'équation différentielle (1) est composé d'une trajectoire rectiligne (Fig. 12), car la relation entre $\frac{dq}{dt}$ et q est linéaire : $\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau}$



À la lecture du portrait de phase, on peut distinguer deux cas, selon le signe de la valeur initiale Q_0 de la charge :

- si $Q_0 > 0$, la charge décroît jusqu'à s'annuler ;
- si $Q_0 < 0$, elle croît jusqu'à s'annuler également.

Dans tous les cas, la charge du condensateur q(t) évolue donc jusqu'à s'annuler.

II-3) Résolution analytique

Soit :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau} \Leftrightarrow \int \frac{1}{q} dq = \int -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\Rightarrow ln|q| = -\frac{t}{\tau} + B \text{ où } B = cste$$

$$\Rightarrow q(t) = e^{-\frac{t}{\tau}+B} = e^{-\frac{t}{\tau}} e^{B} \Rightarrow q(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

La résolution de l'équation différentielle linéaire, à coefficients constants, et homogène, aboutit à la solution générale :

$$\boldsymbol{q(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$$

où la constante d'intégration K est déterminée en considérant l'instant initial.

À t = 0, la charge de C est Q_0 d'où Ke^0=K= Q_0

Finalement, l'évolution de la charge dans le régime libre est décrite par :

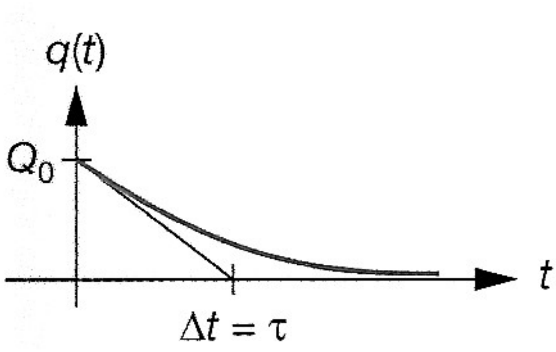
$$\boldsymbol{q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

La durée de décharge est infinie si l'on attend l'annulation de q ; mais la décroissance exponentielle invite à adopter un critère de bon sens : la charge devient négligeable en quelques fois la constante de temps t.

La constante de temps τ= R C donne l'ordre de grandeur du temps de décharge du condensateur

II-4) Tangente à l'origine

Le graphe de l'évolution de la réponse libre du circuit RC présente une tangente à l'origine des temps de pente non nulle. Ce comportement est caractéristique des circuits du premier ordre et permet une détermination aisée de la constante de temps du circuit.



En effet, si l'on trace la tangente à l'origine des temps du graphe de q(t), on constate que la tangente coupe l'axe des temps après une durée Δt qui se calcule par :

$$\frac{dq}{dt}_{t=0} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}_{t=0} = -\frac{Q_0}{\Delta t}$$

Or $\frac{dq}{dt}_{t=0} = \left(-\frac{1}{\tau} Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\right)_{t=0} = -\frac{Q_0}{\tau}$

Donc $\Delta t = \tau$

Dans un circuit régi par une équation différentielle du premier ordre, l'intersection de la tangente à l'origine des temps et de la valeur finale s'obtient exactement après une durée égale à la constante de temps.

II-5) Conservation de l'énergie

L'étude précédente invite à l'examen du devenir de l'énergie E initialement emmagasinée dans le condensateur. Puisque la charge finale est nulle, la diminution d'énergie emmagasinée est :

$$\Delta E = E(0) - E(\infty) = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

La circulation du courant dans le résistor met en jeu une dissipation de puissance par effet Joule, qui permet d'exprimer l'énergie perdue sur toute l'évolution :

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = R\int_0^\infty \frac{1}{\tau^2} Q_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{RQ_0^2}{\tau^2}\left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{RQ_0^2}{2\tau} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

Donc :

$$\Delta E = W_J$$

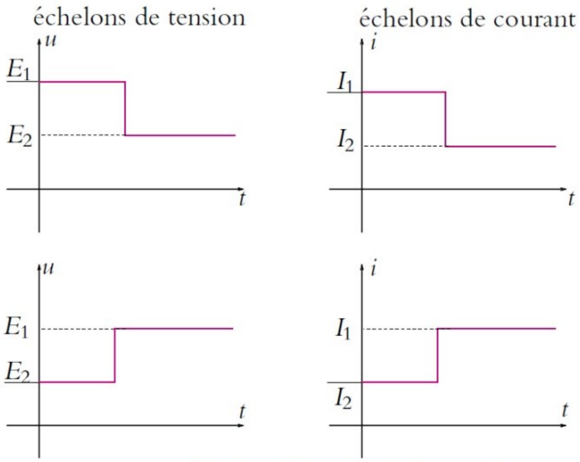
Conformément à la loi de conservation de l'énergie, la dissipation par effet Joule rend exactement compte de la diminution d'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur.

III - Réponse à l'échelon d'un circuit du premier ordre

III-1) Echelon de tension

L'étude du régime libre d'un circuit n'est souvent pas très facile à réaliser, car se pose le problème de l'introduction de l'énergie initiale. En effet, lorsqu'on assemble un circuit RC ou RL, le condensateur ou la bobine n'ont aucune énergie initiale, il faut leur en communiquer, ce qui nécessite de compléter le circuit.

Plus simplement, on peut caractériser l'évolution d'un circuit RC ou RL en plaçant dans le circuit un générateur, dont la tension à vide e(t) passe brutalement de la valeur nulle à une valeur donnée.

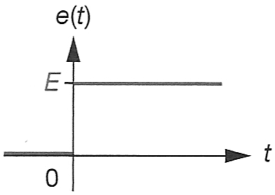


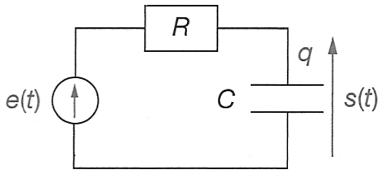
Échelons de tension et de courant.

On dit alors que l'on observe la réponse indicielle, ou réponse à l'échelon du circuit considéré.

III-2) Cas du circuit RC

Menons cette étude pour le circuit RC lorsque le signal observé est la tension s(t) aux bornes du condensateur. On note que s est proportionnelle à la charge q = Cs. Par conséquent, étudier les propriétés de s(t) revient à déterminer celle de q(t), dont on sait qu'elle joue un rôle particulier ici. En effet, la charge d'un condensateur est une variable d'état directement reliée à l'énergie.





La loi des mailles prend la forme en posant $s = u_c$:

$$e = u_r + s = Ri + s = RC\frac{ds}{dt} + s$$

Ces équations conduisent, aux instants t positifs à :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

C’est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et second membre constant.

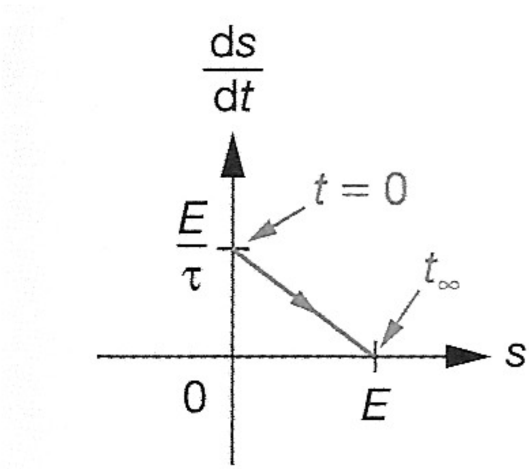
III-3) Portrait de phase

Le portrait de phase associé à cette équation différentielle est composé d'une trajectoire rectiligne, car la relation entre dt et s est affine :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{s}{\tau} - \frac{E}{\tau}$$

Le signal de sortie s(t) évolue donc, tant que la valeur s = E n'est pas atteinte :

- **partant d'une valeur inférieure à E, s(t) croît jusqu'à E ;**
- dans le cas d'une évolution depuis une valeur initiale supérieure à E, s (t) décroîtrait jusqu'à E (ce n'est pas le cas d'une réponse indicielle).



III-4) Expression de la solution

a) Forme générale

L'équation différentielle est linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, mais présente un second membre : elle n'est plus homogène. On doit donc la résoudre en recherchant successivement :

- **La solution générale de l'équation homogène ;**
- **Une solution particulière de l'équation complète ;**
- **la valeur de la constante d'intégration qui figure dans la solution générale de l'équation homogène.**

$$\boldsymbol{s(t) = s_h(t) + s_p(t)}$$

Ici, l'équation homogène est identique à celle écrite pour le régime libre, sa solution générale est :

$$s_h(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le second membre étant constant, on peut chercher une solution particulière constante à l'équation complète :

$$\frac{ds_p}{dt} = -\frac{s_p}{\tau} - \frac{E}{\tau} \Leftrightarrow 0 = -\frac{s_p}{\tau} - \frac{E}{\tau}$$

$\Rightarrow s_p(t) = E$ convient.

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$s(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

b) Réponse à l'échelon

La constante d'intégration K est déterminée grâce à la condition initiale. Aux instants t négatifs, la tension à vide du générateur est nulle et ce depuis une durée infiniment longue. L'évolution a donc eu lieu selon le régime libre depuis une durée très supérieure au temps caractéristique de décharge du condensateur. La charge électrique du condensateur et donc la tension s aux bornes de celui-ci, sont nulles lorsque survient l'échelon. On peut noter ceci :

$$s(0^-) = O.$$

En outre, la tension aux bornes de C est proportionnelle à la charge, qui est nécessairement continue dans le temps. La tension s obtenue juste après l'apparition de l'échelon de tension est égale à celle qui précédait, ce qu'on note :

$$\boldsymbol{s(0^+) = s(0^-) = O}$$

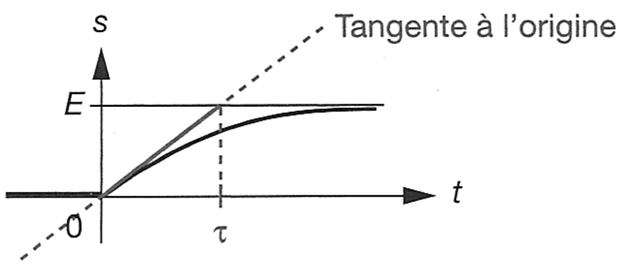
On en déduit que :

$$s(0^+) = K + E = s(0^-) = O \Rightarrow K = -E$$

Finalement,

$$s(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

La représentation graphique donne :



Comme remarqué pour la réponse libre, le graphe de l'évolution de la réponse indicielle du circuit RC présente une tangente à l'origine des temps de pente non nulle. Cette tangente rencontre la valeur finale s = E après le temps caractéristique, ce qui permet une détermination aisée de la constante de temps lorsqu'on dispose de la réponse indicielle.

Traduites en termes de charge électrique, les propriétés s'interprètent aisément :

- La charge initiale donc la tension est nulle ;
- Le condensateur se charge au cours du temps à travers la résistance R, le phénomène n'est pas instantané, mais se déroule en quelques fois le temps caractéristique τ du circuit RC ;
- La charge cesse lorsque la tension aux bornes du condensateur atteint la valeur de la tension à vide du générateur. La différence de potentiel aux bornes de la résistance s'annule, en effet, à ce moment-là, donc aucun courant ne circule plus.

Dans le cas du circuit RC soumis à un échelon de tension, la valeur finale est donnée par l'équation $s(t_\infty) = E$, car aucun courant ne circule plus dans la maille.

c) Régime permanent

Dans l'étude précédente, après un temps très long, c'est-à-dire quelques fois la constante de temps, le signal de sortie se stabilise.

On a remarqué que le phénomène de charge du condensateur cesse lorsque l'intensité s'annule. La valeur finale de s est logiquement égale à E, puisque la différence de potentiel aux bornes de la résistance est nulle.

On peut également adopter un point de vue en termes de schéma équivalent. Dans cet état de régime stationnaire, en effet, l'intensité qui traverse le condensateur est nulle, il se comporte donc comme un circuit ouvert. La différence de potentiel aux bornes de la résistance est nulle, $s_p = E$.

On peut déterminer la valeur finale d'un essai indiciel en considérant que le circuit fonctionne alors en régime stationnaire.

Cette méthode est générale, on rappelle ci-dessous les propriétés caractéristiques des dipôles en régime stationnaire :

- Une bobine idéale se comporte comme un court-circuit. En effet, la relation $u = L\frac{di}{dt} = 0$ si i est constante ;
- Un condensateur est équivalent à un circuit ouvert. En effet, $i = C\frac{du}{dt} = 0$ devient i=0.

III-5) Le Circuit RL

De nombreuses méthodes ont été découvertes dans ce chapitre et ont été appliquées au circuit RC. Il est également possible d'obtenir des circuits du premier ordre avec une association de composants résistifs et inductifs (circuit RL). On retrouve alors les deux comportements dynamiques détaillés ci-dessus, à savoir :

- régime libre ;
- réponse indicielle.

On établit alors les caractéristiques de ces réponses en utilisant les propriétés générales suivantes :

- Le temps caractéristique τ d'un circuit comprenant une inductance L et une résistance R s'écrit $\tau = \frac{L}{R}$;
- L'intensité est continue telle que : $\boldsymbol{i(0^+) = i(0^-) = 0}$
- En régime stationnaire, notamment dans l'état final d'une réponse indicielle, une bobine idéale se comporte comme un court-circuit.

Ainsi on obtient : $i(t>0) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, on remarque l'analogie avec la charge du condensateur :