XXV-1 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Les convertisseurs électromécaniques (moteurs et générateurs électriques) utilisent des circuits électriques en mouvement dans un champ magnétique. Le circuit électrique mobile est soumis à des actions de Laplace. Il est généralement le siège d'une force électromotrice induite. Ce chapitre utilise toutes les connaissances mises en place dans les chapitres précédents. Conformément au programme des CPGE, les géométries sont simplifiées par rapport à la réalité. Cela permet de présenter les principes physiques tout en gardant des calculs assez simples.

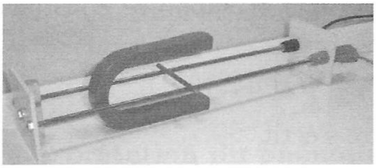
On appelle transducteur ou convertisseur électromécanique un dispositif qui convertit la puissance mécanique en puissance électrique (générateur) ou la puissance électrique en puissance mécanique (moteur).

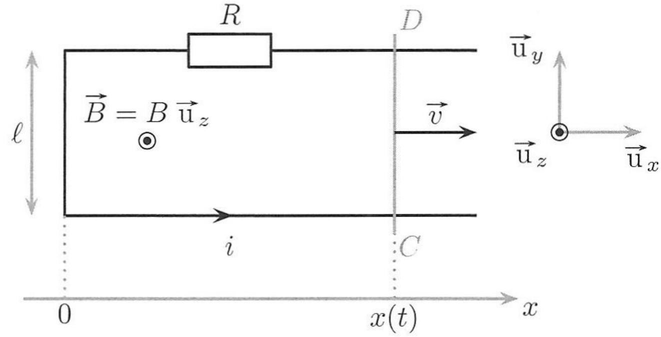
I - Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

I-1) Dispositif des rails de Laplace

a) Présentation

Les rails de Laplace sont utilisés à titre pédagogique pour mettre en évidence le principe des générateurs électriques. Il s'agit de deux rails horizontaux fixes en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre, notée [CD] sur la figure refermant le circuit. On note R la résistance du circuit. L'orientation du courant dans le circuit est fixée arbitrairement.





Rails de Laplace. Le dispositif baigne dans un champ magnétique uniforme créé par un aimant en fer à cheval. La barre [CD], seule partie mobile, est mise en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par un opérateur. Un ampèremètre, non représenté sur le schéma, mesure l'intensité i du courant induit. L'orientation de l'intensité est arbitraire.

b) Équation électrique

Le flux magnétique à travers le circuit varie, car l'aire du circuit varie lors du mouvement de la barre. Avec l'orientation de i choisie, le vecteur surface du circuit est $\vec{S} = S\,\overrightarrow{u_z} = lx\,\overrightarrow{u_z}$ donc :

$$\Phi(t) = \vec{B}.\vec{S} = Blx$$

Dans cette expression de Φ, seul le flux extérieur (dû au champ magnétique de l'aimant) est pris en compte. Le circuit ne contenant qu'une seule spire, son coefficient d'auto-inductance est très faible (de l'ordre du pH), ce qui permet de négliger le flux propre devant le flux extérieur.

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

Le schéma électrique équivalent, donné sur la figure, permet d'écrire (en négligeant l'auto-induction)

$$e = Ri \Rightarrow -Blv(t) = Ri(t)(\text{équation électrique})$$

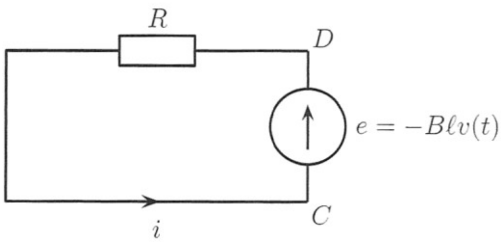


Schéma électrique équivalent à la situation. La fem induite est orientée en convention générateur (dans le même sens que i).

c) Équation mécanique

La barre étant parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique extérieur, elle est soumise, entre autres, à des actions de Laplace. Cela nécessite une étude mécanique. La barre de masse m est soumise à :

- Son poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$
- La réaction des rails $\vec{N} = N\overrightarrow{u_z}$ (N est verticale si on néglige les frottements) ;
- L'action de l'opérateur $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x}$ (F_{op} est algébrique et supposée constante pour la suite) ;
- Des actions de Laplace $\overrightarrow{F_{lap}} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = ilB\overrightarrow{u_x}$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit en projection sur $\overrightarrow{u_x}$:

$$ilB + F_{op} = \frac{mdv}{dt} \quad (\text{équation mécanique})$$

d) Solutions

On extrait $i = -\frac{Blv}{R}$ de l'équation électrique et on le remplace dans l'équation mécanique , ce qui donne

$$-\frac{l^2B^2v}{R} + F_{op} = \frac{mdv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\lim}}{\tau}$$

$$\text{où}\, \tau = \frac{mR}{B^2l^2} \text{ et } v_{\lim} = \frac{F_{op}R}{B^2l^2}$$

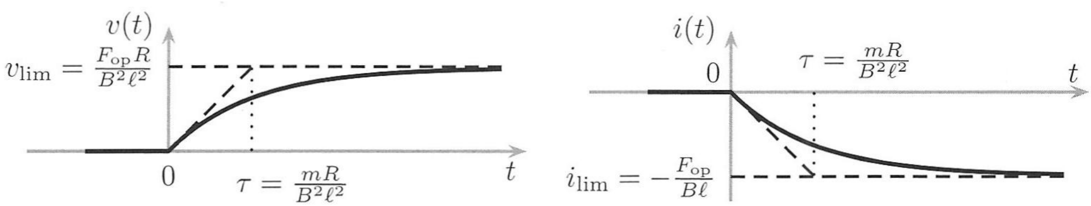
Les notations τ et $v_{\lim}$ permettent une mise sous forme canonique de l'équation et rendent les calculs plus lisibles. En prenant pour condition initiale v(0) = 0 et en supposant que F_{op} est constante, l'équation a pour solution :

$$v(t) = v_{\lim}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

L'intensité i s'en déduit par :

$$i = -\frac{Blv}{R} = i_{\lim}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \text{ où } i_{\lim} = -\frac{F_{op}}{Bl}$$

Les solutions sont tracées sur la figure pour le cas F_{op}> 0 et B > 0 (il ne faut pas oublier que ces grandeurs sont algébriques).



Représentation de i et v en fonction du temps pour les rails de Laplace. Les conditions initiales sont i = 0 et v = 0, et la force exercée par l'opérateur est supposée constante. Les dessins sont faits en supposant F_{op}> 0 et B > 0.

e) Interprétation du phénomène avec la loi de Lenz

- S'il n'y avait pas de champ magnétique, l'équation du mouvement se réduirait à $F_{op} = \frac{mdv}{dt}$ et la vitesse de la barre serait $v(t) = \frac{F_{op}}{m}t$; le graphe de v(t) serait une droite passant par l'origine de pente $\frac{F_{op}}{m}$: elle se confondrait avec la tangente à l'origine sur la figure. La vitesse tendrait vers l'infini.
- En présence d'un champ magnétique, la barre est soumise à la force de Laplace $-\frac{l^2B^2v}{R}\overrightarrow{u_x}$. Cette force est résistante : elle s'oppose à la vitesse de la barre d'autant plus fort que la vitesse est grande. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz : le mouvement de la barre crée le courant induit, qui à son tour crée la force de Laplace, qui tend à s'opposer au mouvement de la barre. Durant les premiers instants du mouvement, le courant induit est encore faible et ses effets le sont aussi (force de Laplace très faible). Le mouvement de la barre est donc le même que s'il n'y avait pas encore de phénomènes d'induction : la courbe de v(t) se confond donc avec sa tangente à l'origine, d'équation $v(t) = \frac{F_{op}}{m}t$ (qui serait la solution du problème avec B = 0).
- En régime permanent, v = $v_{\lim}$. Cette vitesse finie est due à la force de Laplace qui compense exactement celle qu'exerce l'opérateur, car l'équation du mouvement se résume à $F_{lap} + F_{op} = 0$ lorsque $\frac{dv}{dt} = 0$. Les influences de R, B et l sur $v_{\lim}$ peuvent s'interpréter. Si la résistance R du circuit est grande, le courant induit est faible, donc la force de Laplace aussi : elle s'oppose peu à l'action de l'opérateur et la vitesse limite $v_{\lim}$ est grande. Si B et l sont grands, les effets

d'induction le sont aussi, donc F_{lap} s'oppose beaucoup à l'action de l'opérateur, réduisant ainsi la vitesse v_{lim}.

- Dans la force de Laplace, le produit B x l intervient au carré. En effet, il intervient une première fois dans le courant $i = -\frac{Blv}{R}$

via la fem d'induction et une autre fois dans l'expression de la force de Laplace. Il est heureux que B intervienne au carré : **la force de Laplace s'oppose ainsi au mouvement quel que soit le signe de B, conformément à la loi de modération de Lenz.**

f) Bilan de puissance en induction

On multiplie l'équation électrique par i,

$$ei = Ri^2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-B\ell vi}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } e}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}} \qquad \text{(bilan de puissance électrique).}$$

On multiplie l'équation mécanique par v,

$$F_{\text{op}} \cdot v + F_{\text{la}} \cdot v = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot v$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{\text{op}} \cdot v}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} + \underbrace{i\ell Bv}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } F_{\text{la}}}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c\,\text{(barre)}}{\mathrm{d}t}} \qquad \text{(bilan de puissance mécanique).}$$

En comparant les équations on remarque sur cet exemple que

$$P_{fournie\ par\ e} = -P_{fournie\ par\ \overrightarrow{F_{la}}}$$

On généralise ce résultat par le théorème :

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la puissance mécanique fournie au circuit par les actions de Laplace induites est l'opposé de la puissance électrique fournie au circuit par la fem induite,

$$\boldsymbol{P_{fournie\ par\ e} = -P_{fournie\ par\ \overrightarrow{F_{la}}}}$$

- Cette relation est à la base du fonctionnement de tous les convertisseurs électromécaniques.
- Ce résultat n'est plus valable si le champ magnétique dépend du temps, car la fem induite et donc le courant induit sont modifiés, ce qui change les équations de bilan énergétique.

En sommant membre à membre les équations, les termes Blvi se simplifient et on obtient un bilan de puissance électromécanique complet,

$$\underbrace{F_{\text{op}} \cdot v}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}\,(\text{barre})}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}} .$$

La puissance fournie par l'opérateur à la barre sert, d'une part, à augmenter l'énergie cinétique de la barre (démarrage du générateur) et, d'autre part, à alimenter électriquement la résistance (une ampoule électrique, par exemple). En pratique, ce n'est pas le démarrage qui est intéressant, mais le régime permanent, qui se résume à

$$F_{op}.v = Ri^2$$

Tous les générateurs électriques reposent sur ce phénomène de conversion électromécanique de puissance.

I-2) Freinage électromagnétique

Dans le dispositif des rails de Laplace étudié précédemment, la force de Laplace tend à s'opposer au mouvement de la barre, conformément à la loi de modération de Lenz. En l'absence d'opérateur externe ($F_{op} = 0$), l'équation du mouvement de la barre se réduit à :

$$-\frac{l^2B^2v}{R} = \frac{mdv}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \text{ où } \tau = \frac{mR}{B^2l^2}$$

Cela conduit à une décroissance exponentielle de la vitesse avec un temps caractéristique $\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$ qui :

- Croît avec m (plus la barre est lourde, plus il lui faut de temps pour s'arrêter : c'est l'inertie mécanique de la barre) ;
- Décroît avec B (un champ magnétique intense donne des effets d'induction plus grands et le freinage par la loi de Lenz est plus intense).

C'est le principe des ralentisseurs électromagnétiques utilisés sur les poids lourds. Seule la géométrie diffère. Dans un camion, il existe un disque métallique solidaire de l'essieu : ce disque tourne à la même vitesse angulaire que les roues. Un électroaimant peut générer, sur demande du conducteur, un champ magnétique orthogonal au plan du disque. Ainsi, lorsque le camion roule, le disque en rotation est mobile dans un champ magnétique permanent : des courants induits prennent naissance dans le volume du disque (c'est l'analogue du courant induit qui apparaît dans la barre mobile des rails de Laplace). Ces courants volumiques induits, appelés courants de Foucault, donnent lieu à des actions de Laplace réparties sur le volume du disque. D'après la loi de modération de Lenz, ces actions de Laplace tendent à ralentir la rotation du disque, donc à freiner le camion. On peut montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire ω des roues du camion est de la même forme que l'équation $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=0$: ω décroît exponentiellement en un temps d'autant plus court que le champ magnétique imposé est intense. Les ralentisseurs électromagnétiques présentent les avantages suivants.

- Les actions de Laplace sont volumiques, donc l'échauffement au freinage est mieux réparti que sur les freins conventionnels où il se fait uniquement dans la zone de frottement entre les plaquettes et le disque.
- Il n'y a pas d'usure mécanique.
- Si jamais la roue se bloque intempestivement, le freinage cesse automatiquement (le couple de freinage est proportionnel à ω) et la roue se débloque aussitôt. Il n'y a donc aucun risque de dérapage.

Le couple de freinage électromagnétique, proportionnel à ω, n'est efficace qu'à grande vitesse. Il devient inefficace à faible vitesse. Ainsi, les ralentisseurs électromagnétiques ne sont utilisés qu'à grande vitesse et le camion finit de s'arrêter avec des freins mécaniques classiques (mâchoires qui serrent des disques solidaires des roues). Pour cette raison, on parle de ralentisseurs et non de freins électromagnétiques.

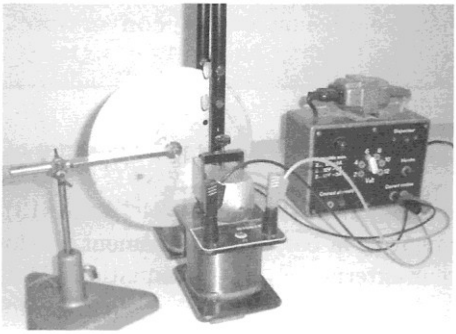


Illustration du principe des ralentisseurs électromagnétique: de camion. Le disque métallique est lancé en rotation à la main. Il baigne en partie dans l'entrefer d'un électroaimant, donc on aperçoit les bobines. Lorsque le générateur alimente les bobines, l'électroaimant génère un champ magnétique et la rotation du disque s'arrête rapidement.

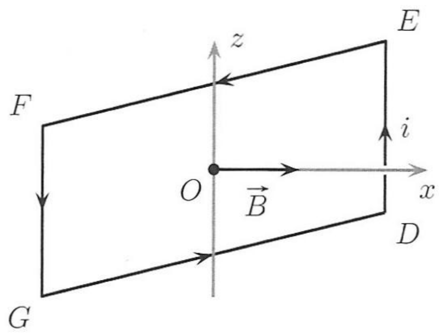
Remarque :

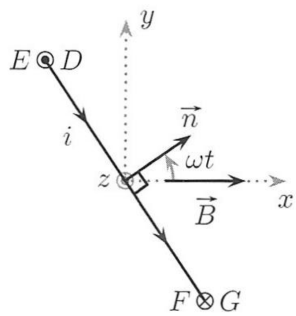
Par définition, les courants de Foucault sont répartis en volume. Leur géométrie est donc complexe et les calculs ne sont pas au programme. En particulier, l'utilisation de la loi de Faraday n'est pas possible, car on ne peut pas identifier de circuit filiforme pour placer une fem induite ou calculer le flux magnétique (pas de surface bien définie).

I-3) Circuit en rotation dans un champ magnétique uniforme

a) Présentation

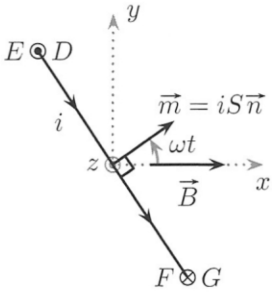
Cette section présente un générateur électrique constitué d'une bobine pivotant autour d'un axe dans un champ magnétique stationnaire. Par sa géométrie tournante, ce dispositif est plus réaliste que les rails de Laplace. Les idées physiques étant les mêmes que pour ce dernier dispositif, l'étude est présentée sous forme d'exercice corrigé.

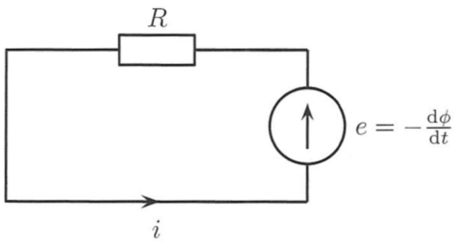




On considère un circuit rectangulaire DEFG d'aire S orienté arbitrairement par l'intensité électrique i. Il peut pivoter sans frottements autour de l'axe z. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\overrightarrow{u_x}$ orthogonal à l'axe z. Les schémas donnent une vue en perspective et une vue de dessus (depuis les z positifs). Grâce à un couple $\overrightarrow{\Gamma_{op}} = \Gamma_{op}\overrightarrow{u_z}$ fourni par un opérateur, ce cadre tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe $(0, \overrightarrow{u_z})$. La position angulaire du cadre est repérée par l'angle orienté entre le champ magnétique et la normale unitaire $\vec{n}$ au cadre : $\theta(t) = (\overrightarrow{u_x}, \vec{n}) = \omega t$. On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe (Oz) et R sa résistance électrique. On néglige l'auto-induction.

b) Schéma électrique





On introduit le vecteur surface $\vec{S}$ du cadre, orienté par i et la règle de la main droite. L'angle entre $\vec{B}\ et\ \vec{S}$ est $(\vec{B},\vec{S}) = \omega t$. Le flux magnétique à travers le cadre s'écrit :

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = BScos(\omega t)$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BSsin(\omega t)$$

Le schéma électrique donne l'équation :

$$e = Ri \Leftrightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{\omega BSsin(\omega t)}{R}$$

Le courant i est sinusoïdal alternatif. Sa pulsation temporelle ω est égale à la vitesse angulaire de rotation du cadre.

c) Equation mécanique

On introduit le moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$ du cadre. Le champ magnétique étant uniforme, le moment des actions de Laplace s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{la}} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -iSBsin(\omega t)\overrightarrow{u_z} = -\frac{\omega B^2S^2sin^2(\omega t)}{R}\overrightarrow{u_z}$$

On remarque que ce moment (en projection sur $\overrightarrow{u_z}$) a toujours signe opposé à celui de ω : il a donc tendance à ralentir le cadre, conformément à la loi de modération de Lenz.

Le courant induit, par son sens, tend à s'opposer (via les actions de Laplace) aux causes (rotation à la vitesse angulaire ω) qui lui ont donné naissance.

L'équation mécanique s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique au cadre en projection sur l'axe (Oz). Les seuls moments qui comptent sont $\Gamma_{op}\ et\ \Gamma_{la}$. En effet, le poids s'applique au centre de gravité du cadre (point O) et a donc un moment nul par rapport à l'axe. De même, les liaisons pivot sont sans frottement, donc exercent un moment nul par rapport à l'axe. Il reste :

$$\Gamma_{op} + \Gamma_{la} = \frac{Jd\omega}{dt} = 0\ (car\ \omega\ est\ constante)\ .$$

d) Bilan énergétique

Pour le bilan de puissance électrique, on multiplie l'équation électrique par i :

$$ei = Ri^2$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 B^2 S^2 sin^2(\omega t)}{R} = Ri^2$$

$$\Leftrightarrow P_{reçue\ par\ R} = P_{fournie\ par\ e}$$

Le bilan de puissance mécanique est obtenu en multipliant l'équation mécanique par ω :

$$\Gamma_{op}\omega + \Gamma_{la}\omega = 0 \Rightarrow \Gamma_{op}\omega - \frac{\omega B^2 S^2 sin^2(\omega t)}{R}\ \omega = 0$$

On retrouve le fait que $P_{fournie\ par\ e} = -P_{fournie\ par\ \Gamma_{la}}$.

En sommant membre à membre les deux équations de bilan énergétique électrique et mécanique, on obtient le bilan complet :

$$\Gamma_{op}\omega = Ri^2$$

$$\Leftrightarrow P_{fournie\ par\ op} = P_{reçue\ par\ R}$$

L'opérateur fournit de la puissance mécanique en faisant tourner le générateur qui, à son tour, alimente électriquement la résistance (en courant alternatif).

e) Méthode sur les bilans

- On multiplie l'équation électrique par i, pour obtenir des termes homogènes à UI.
- En translation on multiplie le PFD par v, pour obtenir des termes homogènes à Fv.
- En rotation on multiplie le TMC par ω, pour obtenir des termes homogènes à $\Gamma\omega$.

II - Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

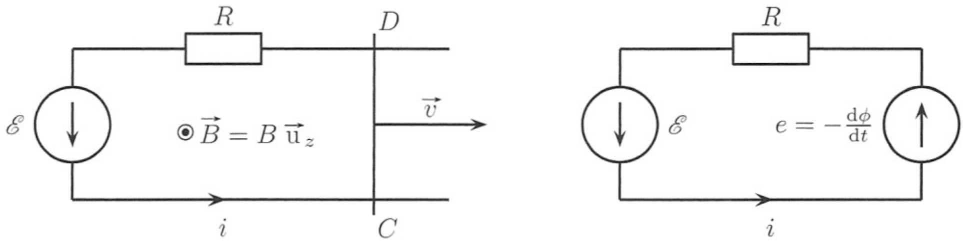
II-1) Moteur à courant continu à entrefer plan

a) Evolution de la vitesse

Un générateur électrique crée un courant dans un circuit qui baigne dans un champ magnétique. Des forces de Laplace mettent alors le circuit en mouvement (effet moteur). Cependant, le circuit devient mobile, donc des phénomènes d'induction prennent naissance.

Pour fabriquer un moteur linéaire (donnant lieu à un mouvement de translation), on reprend les rails de Laplace en les alimentant par un générateur électrique de fem e.

La barre [CD] étant initialement immobile, le générateur fait circuler un courant. Étant plongée dans un champ magnétique, la barre est alors soumise à une force de Laplace qui la met en mouvement. Le circuit est donc le siège d'une fem induite, ce qui donne le schéma électrique équivalent.



Rails de Laplace utilisés en moteur. La force électromotrice ε est délivrée par un générateur extérieur. À droite, schéma électrocinétique équivalent.

En négligeant l'auto-induction et en notant l la longueur de la barre, le flux magnétique et la fem induite se calculent par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -blv$$

Le schéma électrique équivalent de la figure donne, par application de la loi des mailles :

$$\varepsilon + e = Ri \Rightarrow \varepsilon - Blv = Ri$$

En l'absence d'opérateur ($F_{op} = 0$), l'étude mécanique de la barre est analogue aux précédentes. Sa projection sur $\overrightarrow{u_x}$ s'écrit :

$$i(t)lB = m\frac{dv}{dt}\ (équation\ mécanique)$$

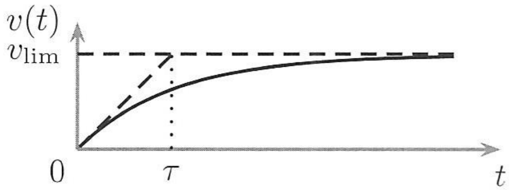
On élimine par exemple i de ces deux équations, ce qui donne :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{Bl}{m}(\varepsilon - Blv)}{R} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2l^2v}{mR} = \frac{\varepsilon Bl}{mR}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau} \text{ où } \tau = \frac{mR}{B^2l^2} \text{ et } v_{lim} = \frac{\varepsilon}{Bl}$$

En supposant que la vitesse initiale de la barre soit nulle (phase de démarrage du moteur), la vitesse est donnée par :

$$v(t) = v_{lim}\left[1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$



Évolution de la vitesse du moteur linéaire de Laplace.

b) Force contre-électromotrice d'un moteur électrique

Lorsque la vitesse limite $v_{lim} = \frac{\varepsilon}{Bl}$ est atteinte, l'équation électrique indique que le courant est nul. **C'est une manifestation extrême de la loi de modération de Lenz : la fem induite est exactement opposée à la fem qui a causé le démarrage du moteur.** Dans un moteur en fonctionnement normal, la force électromotrice induite tend toujours à s'opposer au générateur qui l'alimente. On parle de force contre-électromotrice (fcem) du moteur.

c) Bilan énergétique

On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v, et on fait la somme membre à membre des deux équations ainsi obtenues. Les termes vBli se simplifient (on retrouve le fait que $P_{la} = -P_{fem\ induite}$ et il reste :

$$\mathscr{E} i = Ri^2 + mv\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathscr{E} i}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } \mathscr{E}}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t}}.$$

La puissance électrique apportée par le générateur sert à échauffer la résistance d'une part, et à accroître l'énergie cinétique de la barre (objet de masse m à mettre en mouvement) d'autre part. Comme son nom l'indique, le but du moteur est de mettre la barre en mouvement et non de chauffer une résistance. On a donc intérêt à diminuer le plus possible le terme Ri^2 dans le bilan énergétique en utilisant des fils de résistance très faible.

d) Moteur électrique rotatif à entrefer plan

La géométrie des rails de Laplace peut être modifiée pour obtenir un moteur rotatif alimenté en courant continu (voir figure). Une roue isolante, plongée dans l'entrefer d'un aimant imposant un champ magnétique uniforme, peut pivoter autour de son axe. Quelques rayons de la roue sont métalliques pour conduire le courant. Un circuit électrique contenant un générateur (de fem e sur le schéma) apporte le courant par la périphérie de la roue et collecte ce courant au centre. Chaque rayon subit des actions de Laplace, ce qui met la roue en rotation. C'est le principe des moteurs électriques de type AXEM (moteurs de faible puissance utilisés dans des dispositifs de précision).

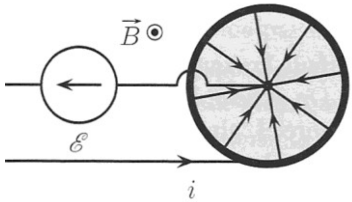


Schéma simplifié d'un moteur rotatif à entrefer plan. La roue peut pivoter autour de son axe. Seuls quelques rayons (ici, huit rayons disposés à 45°) de la roue sont conducteurs électriques.

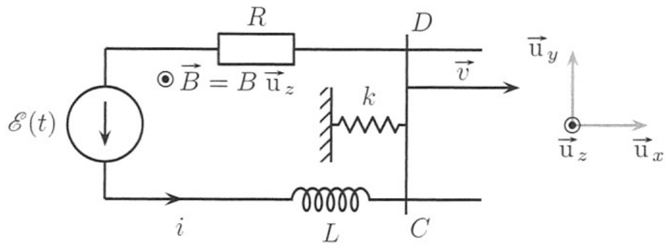
II-2) Haut-parleur électrodynamique

a) Principe

Un haut-parleur doit convertir un signal électrique (tension variable dans le temps) en signal mécanique (vibration d'une membrane pour émettre le son). C'est un transducteur électromécanique qui utilise les actions de Laplace et met en jeu des phénomènes d'induction.

La géométrie des véritables haut-parleurs rend difficile, voire impossible, le calcul du flux magnétique à travers le circuit mobile. Cela compromet l'application de la loi de Faraday. Pour contourner ce problème, on raisonne sur la géométrie simplifiée des rails de Laplace. Cela donne des équations électrique et mécanique analogues à celles d'un vrai haut-parleur. Ce modèle est donc suffisant pour illustrer le principe du haut-parleur.

Modèle simplifié de haut-parleur



Dans un modèle simplifié, un haut-parleur est représenté par des rails de Laplace horizontaux, plongés dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ orthogonal au plan du circuit. La barre [CD], de masse m et de longueur l, est la seule partie mobile. Elle est liée mécaniquement aux parties fixes du circuit par un ressort de raideur k, qui ne joue aucun rôle électrique. En plus de la réaction normale, les rails exercent sur la barre une force de frottements fluides $\vec{F} = -\lambda\,\vec{v}\,(avec\ \lambda > 0)$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la barre par rapport aux rails. La barre, en se déplaçant, entraîne avec elle une membrane qui émet des ondes sonores. De ce fait, la barre est soumise à une force résistante supplémentaire $\vec{F} = -\alpha\vec{v}\,(avec\ \alpha > 0)$. On note L le coefficient d'auto-inductance (cela tient compte du fait que le circuit d'un vrai haut-parleur est bobiné).

b) Equation éléctrique
   Calculons la fem induite dans le circuit lors du mouvement de la barre mobile [CD]

On note a la longueur du rectangle formé par le circuit lorsque l'ensemble est à l'équilibre mécanique (ressort ni tendu ni comprimé). On note x l'écart algébrique de position de la barre par rapport à cet état d'équilibre. L'aire du rectangle est donc (a + x).l et son vecteur surface associé est, d'après l'orientation choisie pour i :

$$\vec{S} = (a + x).\,l\overrightarrow{u_z}$$

Le flux magnétique extérieur est :

$$\Phi = (a + x).\,lB$$

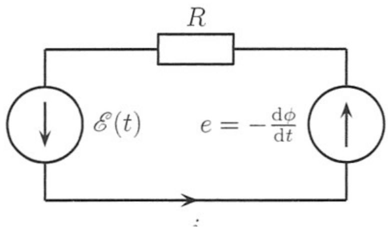
En tenant compte en plus du flux propre,le flux magnétique total à travers le circuit est :

$$\Phi = (a + x).lB + Li$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - Blv$$

Où v vitesse de la barre en projection sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$.



L'équation électrique de la barre est :

$$\varepsilon + e = Ri \Leftrightarrow \varepsilon - Blv - L\frac{di}{dt} = Ri$$

c) Equation mécanique

La barre est soumise :

- Aux actions de Laplace $F_{la} = ilB\,\overrightarrow{u_x}$,
- A l'action de rappel du ressort $\overrightarrow{F_{ressort}} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$,
- Aux forces de frottements fluides exercées par les rails et l'air $\overrightarrow{F_{frott}} = -(\lambda + \alpha)v\,\overrightarrow{u_x}$
- Ainsi qu'à son poids : $\vec{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$
- Et à la réaction normale des rails $\vec{N} = N\,\overrightarrow{u_z}$

En projection sur $\overrightarrow{u_x}$, la loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit :

$$ilB - kx - (\lambda + \alpha)v = m\frac{dv}{dt}$$

Les équations électrique et mécanique sont linéaires en x(t) et i(t). En imposant $\varepsilon(t) = E\ cos(\omega t)$, un régime forcé s'installe dans lequel toutes les grandeurs i, x et v sont sinusoïdales à la pulsation temporelle ω. Ainsi, la membrane vibre en émettant une onde sonore à la même pulsation ω que le signal électrique d'alimentation, ce qui est le but du haut-parleur.

d) Bilan énergétique

Pour réaliser le bilan énergétique, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$\varepsilon i - Blvi - L\frac{di}{dt}i = Ri^2$$

$$et\ ilBv - kxv - (\lambda + \alpha)v^2 = m\frac{dv}{dt}v$$

On réorganise les termes et on fait apparaître des dérivées remarquables :

$$\varepsilon i - Blvi = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$ilBv = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - (\lambda + \alpha)v^2$$

Dans la première équation, le terme $-Blvi$ représente la puissance fournie par la fem « extérieure » induite (par le mouvement de la barre dans le champ magnétique extérieur).

Dans la seconde équation, le terme + $ilBv$ représente la puissance fournie par les actions de Laplace à la barre. Comme d'habitude, ces deux termes sont opposés.

On combine les deux équations de manière à faire disparaître ces deux termes :

$$\underbrace{\mathscr{E} i}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } \mathscr{E}}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)}_{\mathcal{E}_{\mathrm{ma}}+\mathcal{E}_{\mathrm{c}}+\mathcal{E}_{\mathrm{p\,\acute{e}last}}} + \underbrace{Ri^2 + \lambda v^2 + \alpha v^2}_{\mathcal{P}_{\text{pour vaincre les frottements}}}.$$

La puissance fournie par l'alimentation électrique ε sert à :

- Remplir (algébriquement) le haut-parleur d'énergie (cinétique, potentielle magnétique et potentielle élastique) ;
- Vaincre les frottements (effet Joule dans la résistance, frottements mécaniques de la barre sur les rails et frottements contre l'air).
- Le terme $-\alpha v^2$ (frottements contre l'air) est la puissance sonore émise par le haut-parleur. C'est le terme utile. Idéalement, il faudrait annuler $Ri^2 + \lambda v^2$ (résistance nulle et rails sans frottements).