XXIV-1 Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

Faraday a établi la loi de l'induction $e = -\frac{d\phi}{dt}$ en 1831 en faisant varier le champ magnétique créé par un aimant au voisinage d'un circuit et en mesurant les courants induits dans ce circuit. Cependant, le circuit crée lui-même un champ magnétique lorsqu'il est parcouru par un courant. Ce champ, non pris en compte dans le chapitre précédent, contribue au flux magnétique à travers le circuit et participe au phénomène d'induction. On parle d'auto-induction.

I - Phénomène d'auto-induction

I-1) Champ magnétique propre / Champ extérieur

Lors de l'étude de l'induction dans un circuit électrique, on appelle champ propre le champ magnétique créé par ce circuit. Le champ magnétique créé par d'autres sources (autres circuits ou aimants) est appelé champ extérieur.

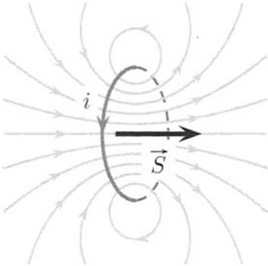
Le champ magnétique qui règne au voisinage d'un circuit électrique est la somme du champ propre et du champ extérieur,

$$\overrightarrow{B_{tot}} = \overrightarrow{B_{ext}} + \overrightarrow{B_{propre}}$$

I-2) Flux propre et inductance propre

a) Définition

On appelle flux propre le flux magnétique créé par un circuit à travers lui-même (flux du champ magnétique propre à travers le circuit).



b) Inductance propre

Signe positif du coefficient d'auto-inductance. Lorsque i est positif, les lignes du champ propre de la bobine sont orientées dans le même sens que le vecteur surface dans la zone où elles traversent la bobine. Le flux propre est donc positif, comme i. Pour tout circuit, (i)propre a le signe de i.

L'intensité du champ magnétique propre est proportionnelle à l'intensité électrique i dans le circuit étudié. Par conséquent le flux propre, qui est proportionnel au champ magnétique propre, est proportionnel à i. De plus, l'orientation du champ magnétique propre est telle que la constante de proportionnalité est positive. Cette constante de proportionnalité, notée L, n'est autre que le coefficient d'inductance propre déjà rencontré lors de l'étude des bobines en électricité.

Un circuit électrique filiforme parcouru par un courant d'intensité i crée à travers lui-même un flux magnétique propre proportionnel à i, $\boldsymbol{\phi_{propre} = Li}$

Le coefficient L de proportionnalité, appelé coefficient d'auto-inductance ou d'inductance propre du circuit :

- Est positif;
- Dépend uniquement de la géométrie du circuit;
- A pour unité SI le henry (H).

La géométrie du champ propre, en général non uniforme, rend les calculs de coefficients d'auto-inductance très complexes. Le calcul est cependant simple pour une bobine longue.

I-3) Inductance propre d'une bobine longue

a) Flux magnétique

Le flux magnétique créé par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ à travers une bobine de N spires est :

$$\phi = N\,\vec{B}.\vec{S}$$

où $\vec{S}$ est le vecteur surface d'une seule spire.

b) Inductance propre

En négligeant les effets de bords, calculer le coefficient d'auto-inductance d'un solénoïde de section S de longueur l, possédant N spires. Donner sa valeur numérique avec N = 1000, l= 0,10 m, S = 0,001 m².

En négligeant les effets de bords, le champ magnétique propre dans le solénoïde est uniforme et vaut $\vec{B} = \frac{\mu_0 N}{l} i\,\overrightarrow{u_z}$. Il y a N spires en tout, donc le flux propre à travers le solénoïde est N fois le flux à travers une de ses spires :

$$\phi = N\,\vec{B}.\vec{S} = \frac{\mu_0 N^2}{l} iS = Li \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2}{l} S = 12mH$$

Dans la relation $L = \frac{\mu_0 N^2}{l} S$, le nombre de spires N est sans dimension tandis que S/l est homogène à une longueur. Cela est cohérent avec les unités : L s'exprime en H et μ_0 en Hm^{-1}.

Par ailleurs, l'application numérique dans cet exercice montre que le coefficient d'auto-inductance possède une valeur très inférieure à 1

H malgré le grand nombre de spires de la bobine. On résume ces points par les assertions suivantes.

- Un coefficient d'auto-inductance est homogène à μ_0 multiplié par une longueur.
- Le henry est une « grosse » unité.

Remarque :

Si nécessaire, on peut augmenter le coefficient d'auto-inductance d'une bobine en y introduisant un noyau ferromagnétique. Cela a pour conséquence de remplacer μ_0 par $\mu_0\mu_r$,. où μ_r est la perméabilité magnétique relative (sans dimension) du matériau, qui peut atteindre des valeurs de l'ordre de 1000.

I-4) Fem induite

L'égalité $\vec{B} = \overrightarrow{B_{ext}} + \overrightarrow{B_{propre}}$ implique que, dans le cas général, le flux magnétique à travers un circuit filiforme s'écrit :

$$\phi = \phi_{ext} + \phi_{propre}\ avec\ \phi_{propre} = Li.$$

L'application de la loi de Faraday donne la force électromotrice induite orientée en convention générateur dans le circuit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - \frac{dLi}{dt} = e_{ext} + e_L$$

Si le circuit ne se déforme pas au cours du temps, le coefficient d'auto-inductance L est une constante et sort de la dérivée temporelle, ce qui donne le résultat suivant.

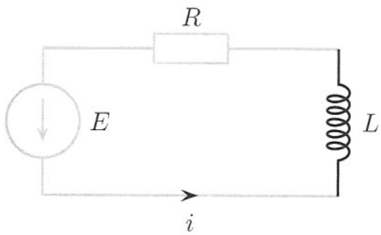
Dans un circuit indéformable, la force électromotrice induite s'écrit

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - L\frac{di}{dt} = e_{ext} + e_L$$

- Le premier terme est la contribution du champ extérieur à la force électromotrice induite.
- Le second terme appelé force électromotrice auto-induite.

Souvent, l'un des deux termes de la fem induite peut être négligé devant l'autre.
Si $e_{ext} \gg e_L$, on dit que l'auto-induction est négligeable.
Si $e_{ext} \ll e_L$, on dit que la fem induite par le champ extérieur est négligeable.

Pour insister sur le fait que l'auto-induction est prise en compte dans un problème, on représente une bobine dans le circuit. Par exemple, le schéma électrique de la figure représente un circuit électrique filiforme de résistance R et d'auto-inductance L, alimenté par un générateur de force électromotrice E.



Auto-inductance. La présence de la bobine, en noir sur le schéma, indique explicitement que l'on veut prendre en compte le phénomène d'auto-induction dans le circuit de résistance R alimenté par un générateur de force électromotrice E.

I-5) Méthode

Pour étudier un circuit filiforme fixe et indéformable dans un champ magnétique dépendant du temps, il faut respecter l'ordre suivant.

1- Orienter le circuit (choix de la flèche de i).
2- Calculer le flux magnétique.
3- Exprimer la fem induite $e = e_{ext} + e_L$
4- Représenter le schéma électrique équivalent, constitué des éléments réellement présents dans le circuit, auxquels on ajoute la fem induite orientée en convention générateur.
5- Obtenir l'équation électrique du circuit à partir du schéma équivalent (le véritable schéma peut être oublié).

I-6) Exercice

Un circuit électrique filiforme plan, de résistance R, d'aire S et d'auto-inductance L, est plongé dans un champ magnétique uniforme variable sinusoïdalement dans le temps (pulsation temporelle ω) et orthogonal au plan du circuit :
$\vec{B}(t) = B_o \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.

Représenter le schéma électrique équivalent au circuit et établir l'équation électrique régissant le comportement de l'intensité électrique.

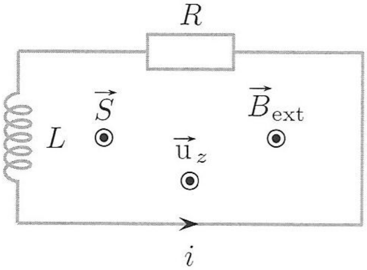
Le schéma électrique du vrai circuit est donné sur la figure de gauche ci-après. Il s'agit d'une boucle métallique d'aire S et de résistance R. On oriente arbitrairement le courant (flèche de i), ce qui donne l'orientation du vecteur surface $\vec{S}$ par la règle de la main droite : $\vec{S} = S\,\overrightarrow{u_z}$. Le flux magnétique total à travers le circuit est la somme du flux extérieur et du flux propre,

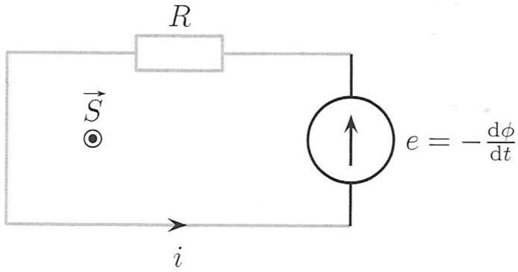
$$\phi = \phi_{ext} + \phi_{propre} = \overrightarrow{B_{ext}}.\vec{S} + Li = B_o S \cos(\omega t) + Li$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - L\frac{di}{dt} = B_o S\ \omega sin(\omega t) - L\frac{di}{dt}$$

Le schéma électrique équivalent s'obtient en ajoutant dans le vrai schéma un générateur (orienté comme i) délivrant la fem induite (en noir sur la figure de droite ci-après). Attention, la fem induite e tient déjà compte de la fem auto-induite. La bobine L est donc omise dans le schéma équivalent.





On déduit l'équation électrique e = Ri du schéma équivalent, ce qui donne :

$$B_o S\ \omega sin(\omega t) - L\frac{di}{dt} = Ri \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = B_o S\frac{\omega sin(\omega t)}{L}$$

$$\text{où } \tau = \frac{L}{R}$$

I-7) Loi de modération de Lenz

a) Présentation

Dans cette section, on étudie un circuit en l'absence de champ magnétique extérieur. Le seul champ magnétique est le champ propre et la fem induite, s'il y en a une, est la fem auto-induite. En convention générateur, elle s'écrit $e_L = -L\frac{di}{dt}$

Pour une raison quelconque, l'intensité i croît, alors $\frac{di}{dt} > 0\ et\ e_L < 0$. L'effet de e_L seule serait donc de créer un courant (auto-induit) d'intensité négative, c'est-à-dire s'opposant à la croissance de i. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz : le courant induit, par son sens, a des effets qui tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance (ici, la cause est $\frac{di}{dt} > 0$.

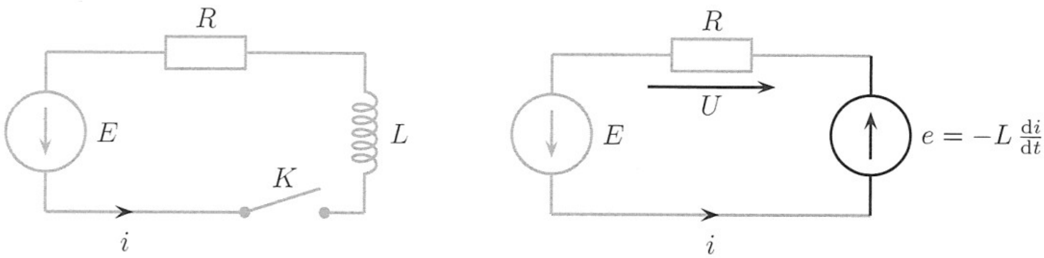


Schéma électrique du vrai circuit et schéma électrique équivalent. La force électromotrice induite est représentée par le générateur en noir. La tension U, orientée arbitrairement, est introduite pour les calculs intermédiaires.

b) Exercice

On considère un circuit électrique filiforme d'auto-inductance L, de résistance R, alimenté par un générateur de force électromotrice E constante. Il n'y a pas de champ magnétique extérieur : le seul phénomène d'induction dans le circuit est l'auto-induction. À l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur K.

1- Représenter le schéma électrique équivalent pour t > O. En déduire l'équation régissant le comportement de l'intensité électrique notée i.
2- Résoudre cette équation. Commenter l'influence de L sur la solution.

1- Pour t > 0, on remplace K par un fil. En l'absence de champ magnétique extérieur, le seul flux magnétique à travers le circuit est le flux propre. La fem induite, donnée par la loi de Faraday, se résume à la fem auto-induite. Elle est orientée en convention générateur, c'est-à-dire dans le sens de i sur le schéma électrique équivalent. La loi des mailles appliquée à ce circuit s'écrit :

E+e = U, avec U = Ri, soit :

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \ avec \ \tau = \frac{L}{R}$$

2- D'où :

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R} \Rightarrow i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Le temps $\tau = \frac{L}{R}$ représente le temps de montée du courant vers sa valeur limite E/R. Par conséquent, le temps de variation du courant croît avec L, ce qui est une conséquence de la loi de modération de Lenz.

Dans les circuits à fort coefficient d'auto-inductance, il est difficile. d'imposer des variations brutales de courant. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz.

I-8) Aspect énergétique de l'auto-induction

a) Bilan d’énergie

On reprend le schéma électrique de la figure en l'absence de champ magnétique extérieur, pour ne prendre en compte que l'auto-induction. Le schéma électrique équivalent est donné à droite sur la figure et l'équation électrique associée est, d'après la loi des mailles, E+e= U. En multipliant membre à membre cette relation par i, on fait apparaître des puissances, qu'il conviendra d'orienter correctement :

$$Ei + ei = Ui$$

Les tensions E et e sont orientées en convention générateur, donc Ei et ei sont les puissances électriques fournies par le générateur de fem E et la fem auto-induite e au reste du circuit. Ainsi, (-ei) est la puissance reçue par e.

La tension U est orientée en convention récepteur : Ui est donc la puissance reçue par la résistance R.

En notant P les puissances, l'équation s'interprète comme :

$$P_{fournie\ par\ E} = P_{reçue\ par\ R} + P_{reçue\ par\ e}$$

$$\Leftrightarrow Ei = Ri^2 + \frac{Ldi}{dt} i$$

On multiplie cette équation par dt et on l'intègre de t = 0 à un instant t quelconque, ce qui fait apparaître des quantités d'énergie. Dans le dernier terme, les dt se simplifient, ce qui réalise automatiquement le changement de variable t par i dans l'intégrale,

$$\Rightarrow Eidt = Ri^2\mathrm{dt} + \mathrm{Lidi} \Rightarrow \int_0^{\mathrm{t}} Eidt = \int_0^{\mathrm{t}} Ri^2\mathrm{dt} + \int_{\mathrm{i_0}}^{\mathrm{i(t)}} \mathrm{Lidi}$$

$$\Rightarrow E_{fournie\ par\ E} = E_{reçue\ par\ R} + E_{reçue\ par\ e}$$

Où :

$$E_{reçue\ par\ e} = \frac{1}{2}\mathrm{Li}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_0^2$$

On remarque que cette quantité d'énergie ne dépend que des valeurs de l'intensité aux instants t = 0 et t, mais pas de ce qui s'est passé entre ces deux instants (i peut avoir crû et décrû, par exemple).

On peut donc définir une énergie potentielle $\frac{1}{2}\mathrm{Li}^2$. Ce terme est lié à la croissance du flux magnétique propre (et donc du champ magnétique propre) lorsque i croît.

b) Énergie potentielle magnétique d'un circuit

Un circuit magnétique d'inductance propre L, parcouru par une intensité électrique i, possède l'énergie potentielle magnétique

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$

Cette énergie s'interprète comme l'énergie qu'a dépensée le générateur pour créer le champ magnétique propre lors de la croissance de i.

c) Étincelle de rupture

Pour un circuit seul, l'énergie potentielle magnétique est $E_m = \frac{1}{2}Li^2$. Si on ouvre ce circuit alors qu'il est parcouru par un courant non nul, on tente d'annuler brutalement le courant, donc de faire varier brutalement l'énergie potentielle magnétique du circuit. Or, cette énergie potentielle doit être restituée sous une forme ou une autre (l'énergie est une grandeur conservative et ne peut pas être détruite) à un rythme fini (E_m varie continûment dans le temps, sinon la puissance de restitution P serait infinie). La restitution se fait par effet Joule lors d'une étincelle de rupture, qui peut être interprétée de la façon suivante :

Lorsque i varie brutalement à la rupture du circuit, sa dérivée temporelle tend vers l'infini en valeur absolue. Par conséquent, la fem induite $-L\,\frac{di}{dt}$ aussi, ce qui force le passage d'un courant dans la zone d'ouverture.

En raison de la continuité temporelle $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}Li^2}$, l'intensité i est toujours continue dans une branche contenant une bobine. Si on ouvre brutalement cette branche, une étincelle de rupture prend naissance.

II – Bobines en interaction

II-1) Inductance mutuelle entre deux bobines

a) Coefficient d'inductance mutuelle

Si deux circuits électriques sont proches l'un de l'autre, chacun baigne dans le champ créé par l'autre. On note B_1 et B_2 les champs magnétiques créés respectivement par les courants i_1 et i_2. Ces champs magnétiques ne sont pas nécessairement uniformes, mais, B_1 est proportionnel à i_1 et B_2 est proportionnel à i_2. En notant $\Phi_{i\to j}$ le flux magnétique créé par le circuit i à travers le circuit j, on obtient les relations de proportionnalité

$$\Phi_{1\to 2} \div B_1 i_1 \; et \; \Phi_{2\to 1} \div B_2 i_2$$

On peut donc définir des coefficients de proportionnalité $M_{i\to j}$ tels que :

$$\Phi_{1\to 2} \div M_{1\to 2}\, i_1 \; et \; \Phi_{2\to 1} \div M_{2\to 1}\, i_2$$

Par homogénéité (analogie avec la définition $\phi = Li$ de l'inductance propre), ces coefficients $M_{i\to j}$ s'expriment en henrys. Ils caractérisent des flux magnétiques et dépendent de la forme des circuits électriques.

Par des arguments théoriques hors programme, on peut démontrer qu'ils sont égaux. On note simplement M cette valeur commune, appelée coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits. Contrairement à l'inductance propre qui est toujours positive, l'inductance mutuelle M peut être de signe quelconque.

- Coefficient d'inductance mutuelle

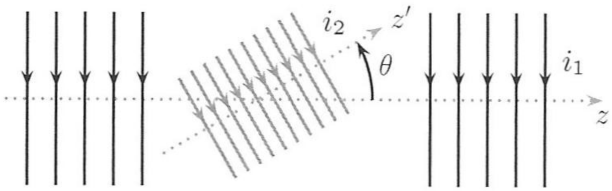
Soit deux circuits filiformes. On définit le coefficient d'inductance mutelle M entre les deux circuits par :

$$\boldsymbol{\Phi_{1\to 2} \div M i_1 \text{ et } \Phi_{2\to 1} \div M i_2}$$

Il dépend uniquement de la géométrie de l'ensemble des deux circuits et s'exprime en henrys. Son signe peut être quelconque : il dépend des orientations (arbitraires) des circuits.

b) Exercice

On considère un petit solénoïde possédant N_2 spires, de section S_2, placé à l'intérieur d'un grand solénoïde possédant N_1 spires, de section S_1, de longueur l_1. L'angle entre les axes des deux solénoïdes est θ (si θ vaut zéro, les courants dans les deux solénoïdes sont orientés dans le même sens). Déterminons le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.



En négligeant les effets de bords, le champ magnétique créé par le grand solénoïde est uniforme et vaut $\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} i_1 \overrightarrow{u_z}$. Le flux magnétique provoqué par le grand solénoïde à travers le petit est N_2 fois le flux magnétique à travers une spire du petit solénoïde :

$$\Phi_{1\to 2} = \overrightarrow{B_1}.N_2\overrightarrow{S_2} = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} i_1 N_2 S_2 cos\theta = M i_1$$

$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} N_2 S_2 cos\theta$$

Selon la valeur de θ, M peut être positif ou négatif.

Remarque : Le calcul de $\Phi_{1\to 2}$ est simple alors que celui de $\Phi_{2\to 1}$ serait très compliqué, à cause de la non-uniformité du champ B_2. Pour calculer un coefficient d'inductance mutuelle, on doit toujours chercher lequel des deux flux est le plus simple à exprimer.

c) Utilisation des coefficients d'inductance

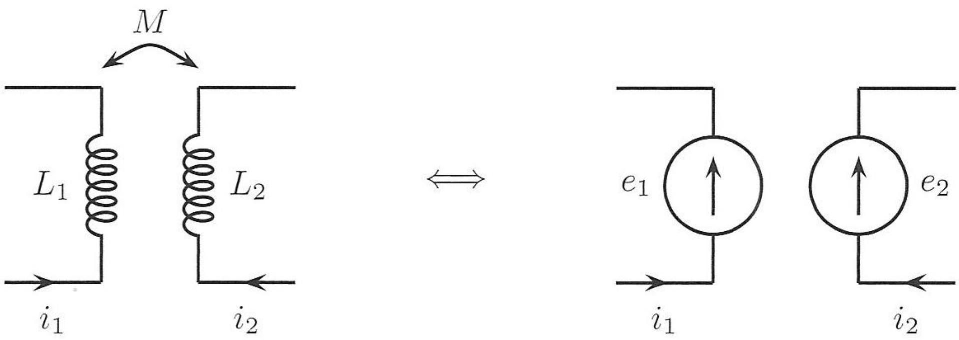
La schématisation de deux circuits couplés par inductance mutuelle est donnée sur la figure. Avec les coefficients d'inductance mutuelle et d'inductance propre, les flux à travers chaque circuit s'expriment par :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \ et \ \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

On applique la loi de Faraday à chaque circuit pour avoir les forces électromotrices induites :

$$e_1 = -\frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} \ et \ e_2 = -\frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt}$$

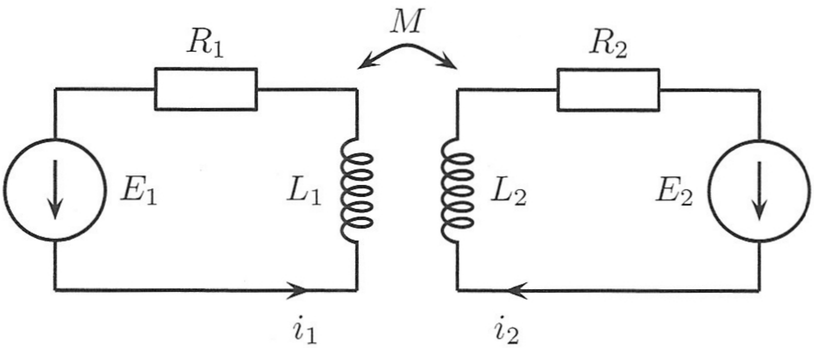
Cela permet d'avoir le schéma électrocinétique équivalent (à droite sur la figure), sur lequel les forces électromotrices induites sont orientées en convention générateur. On parle de couplage car la force électromotrice dans chaque circuit dépend des courants dans les deux circuits.

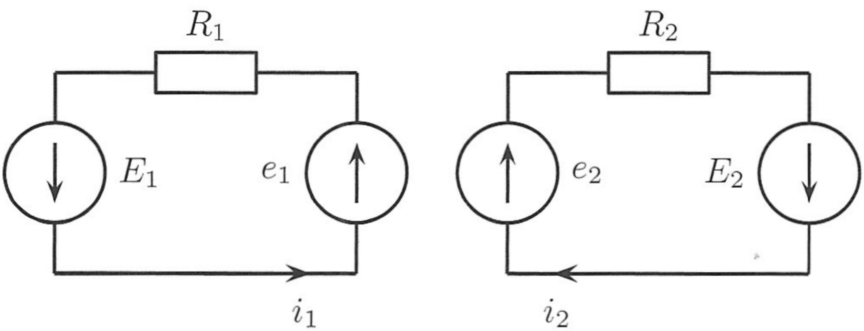


Schématisation de deux circuits couplés par inductance mutuelle. Le couplage par inductance est symbolisé par une double flèche. Il est sous-entendu que la valeur du coefficient M est en cohérence avec les orientations (arbitraires) des courants. À droite, schéma électrocinétique équivalent, sur lequel les fem induites sont données par $e_1 = -\frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt}$ *et* $e_2 = -\frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt}$.

II-2) Circuits couplés par induction mutuelle

On considère deux circuits fixes couplés par inductance mutuelle, contenant chacun un générateur (fem respectives E_1 et E_2) et une résistance. On note L_1 et L_2 les coefficients d'inductance propre et M le coefficient d'inductance mutuelle. Les variations éventuelles des courants provoquent des fem induites, orientées en convention générateur, dont les expressions sont données par les relations précédentes.





Deux circuits couplés par inductance mutuelle.

Les équations électrocinétiques obtenues par application de la loi des mailles à chaque circuit s'écrivent :

$$E_1 - \frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} = R_1 i_1 \ et \ E_2 - \frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt} = R_2 i_2$$

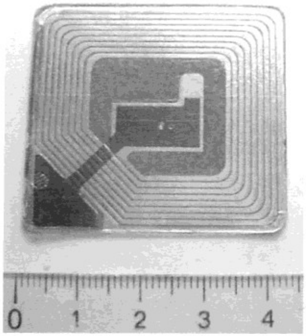
Ces équations couplent les deux courants : les intensités i_1 et i_2 interviennent simultanément dans les deux équations. Leurs variations ne sont donc pas indépendantes l'une de l'autre. Par exemple, la première des deux relations montre que l'évolution de i_1 est conditionnée par le premier générateur (terme E_1), l'auto-induction dans le circuit 1 (terme $-\frac{L_1 di_1}{dt}$), ainsi que par les variations du courant dans le second circuit (terme de couplage $-\frac{Mdi_2}{dt}$).

II-3) Applications des circuits couplés

- Des dispositifs électriques peuvent être chargés à distance (sans contact) par couplage inductif. C'est le cas de certaines voitures électriques de location. Le châssis de la voiture est équipé d'un circuit en forme de boucle (bobine) d'axe vertical. Dans le sol, sous la place de parking, se trouve également une bobine alimentée électriquement par le courant alternatif du secteur. Lorsque la voiture est garée sur sa place de parking, les deux bobines se font face, ce qui assure une valeur satisfaisante de leur coefficient d'inductance mutuelle. Les variations du courant dans la boucle du sol induisent des courants dans la boucle de la voiture, qui servent à recharger la batterie. Cela évite d'avoir à brancher un câble de raccordement. On retrouve aussi ce système dans les chargeurs de téléphone type Nokia Lumia, ou brosse à dents oral-B.
- Les cartes RFID (radio frequency identification) sont les « cartes magnétiques » lues par simple passage à distance devant un détecteur. Le lecteur est un circuit électrique parcouru par un courant variable $i_1(t)$, qui génère un champ magnétique temporellement variable dans son environnement. La carte RFID contient un bobinage (voir figure). Lorsqu'ils sont proches l'un de l'autre, carte et lecteur sont couplés par inductance mutuelle. Les variations temporelles du courant $i_1(t)$ dans le détecteur provoquent, par couplage magnétique, l'apparition d'un courant $i_2(t)$ dans la carte RFID. Ce courant $i_2(t)$ alimente

une puce électronique qui le modifie (codage dans $i_2(t)$ des informations contenues dans la carte). Par couplage magnétique, $i_2(t)$ induit des variations sur $i_1(t)$ dans le lecteur, qui décode ainsi le contenu de la carte. Les cartes RFID peuvent être passives (sans alimentation autonome), car la fem induite par le champ du lecteur suffit à les alimenter.

Carte RFID servant d'antivol sur un article de magasin. L'échelle de la photographie est donnée par une règle graduée en centimètres.



- Les puces électroniques d'identification mises par les vétérinaires sous la peau des animaux domestiques ne sont autres que des cartes RFID de la taille d'un grain de riz.

- Les plaques de cuisson à induction contiennent une bobine parcourue par un courant temporellement variable et d'amplitude réglable. Cela crée un champ magnétique variable. Une casserole posée sur la plaque joue le rôle d'une seconde bobine. En effet, bien que non filiforme, le disque métallique du fond de la casserole peut être découpé par la pensée en des spires concentriques. Le champ variable créé par la plaque induit un courant dans ces spires fictives, qui s'échauffent par effet Joule.

II-4) Bilan énergétique pour deux circuits couplés

On reprend le schéma électrique précédent. Pour réaliser un bilan énergétique sur l'ensemble des deux circuits, on multiplie la première équation par i_1 et la seconde par i_2, ce qui fait apparaître des puissances électriques. On somme les équations ainsi obtenues, ce qui donne :

$$E_1 - \frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} = R_1 i_1 \text{ et } E_2 - \frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt} = R_2 i_2$$

$$\Rightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

Le membre de gauche s'interprète comme la puissance fournie par les deux générateurs aux circuits. Les deux premiers termes au membre de droite représentent la puissance électrique reçue par les deux résistances. Cette puissance est convertie en énergie interne (échauffement par effet Joule). Le groupement des quatre derniers termes est lié aux flux magnétiques à travers les circuits. On l'interprète comme la puissance dépensée par les générateurs pour faire croître le champ magnétique total lorsque les courants varient (si les courants sont constants, le champ l'est aussi). Ce terme peut être vu comme la dérivée de :

$$\Rightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$$

Lorsqu'une puissance s'identifie à une dérivée temporelle, la grandeur dérivée peut être définie comme une énergie potentielle à une constante près. La constante est choisie nulle par convention (quand il n'y a pas de courants, il n'y a pas de champ magnétique).

Énergie potentielle magnétique de deux circuits :

$$E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

s'interprète comme l'énergie potentielle magnétique de deux circuits. Elle correspond à l'énergie qu'ont dû fournir les générateurs aux deux circuits pour créer le champ magnétique lors de l'établissement des courants i_1 et i_2.

II-5) Transformateur de tension

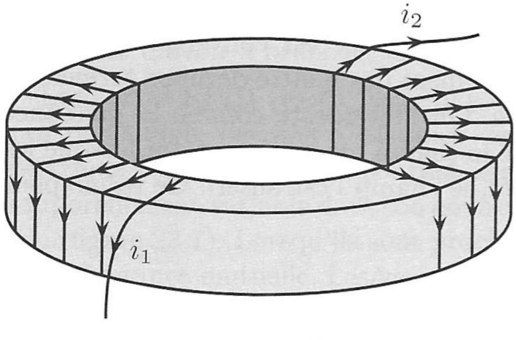
a) Définition

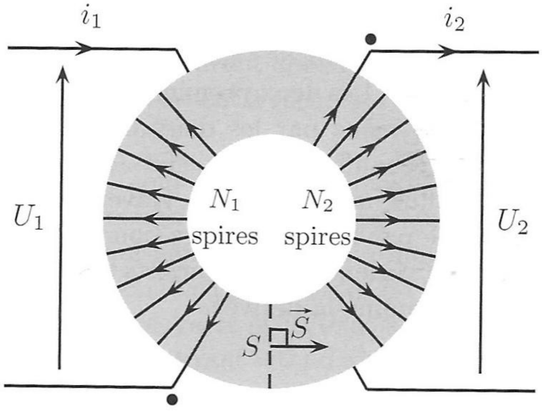
Les appareils américains fonctionnent en 110 V alternatif alors que le réseau français délivre du 220 V alternatif. Pour brancher sans dommages un appareil américain sur le réseau français, il faut donc transformer le 220 V de la prise électrique en 110 V.

Définition 23.13. Transformateur de tension

Un transformateur de tension convertit une tension alternative en une tension alternative de même fréquence mais de valeur efficace différente. Le fonctionnement du transformateur repose sur le phénomène de couplage par induction mutuelle.

Un transformateur électrique est un quadripôle composé de deux enroulements de fils autour d'un tore de matériau ferromagnétique. L'enroulement de gauche, constitué de N_1 spires, est appelé enroulement primaire. Celui de droite, constitué de N_2 spires, est l'enroulement secondaire. Le tore ferromagnétique a la propriété de bien canaliser les lignes de champ magnétique : les lignes de champ sont circulaires et suivent le tore. Ainsi, toute ligne de champ qui traverse le primaire traverse aussi le secondaire. On dit que le couplage magnétique entre les deux enroulements est parfait : la plus grande valeur possible (en valeur absolue) de coefficient d'inductance mutuelle est atteinte. Toutefois, la valeur explicite de ce coefficient n'intervient pas dans les calculs ultérieurs.





Transformateur électrique.

Sur la vue de dessus de la figure, les deux points désignent les bornes homologues : ce sont les extrémités des enroulements qui sortent par la même face du tore, en l'occurrence la face supérieure. La présence des deux points n'est pas obligatoire car les parties visibles des fils sont explicitement dessinées. Cependant, sur d'autres représentations simplifiées des transformateurs, ces points sont nécessaires pour comprendre le sens des enroulements.

b) Relation de transformation en tension

Le champ magnétique étant parfaitement canalisé dans le tore, son flux Φ a la même valeur à travers toute section du tore : Φ s'appelle le flux commun. On oriente la section S du tore selon l'indication de la figure. D'après les orientations des courants, les flux magnétiques respectifs Φ_1 et Φ_2 à travers ces circuits sont liés à Φ par :

$$\Phi_1 = N_1\Phi \text{ et } \Phi_2 = N_2\Phi$$

Les forces électromotrices respectives e_1 et e_2 induites dans les enroulements sont données par la loi de Faraday appliquée à chaque enroulement :

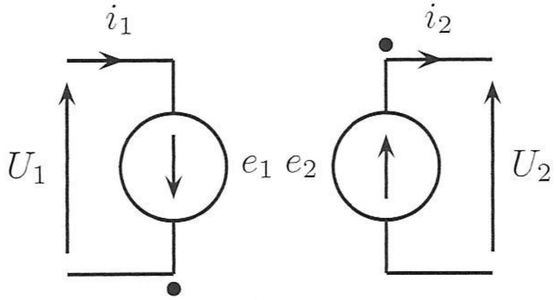
$$e_1 = -\frac{N_1 d\Phi_1}{\mathrm{dt}} \text{ et } \mathrm{e}_2 = -\frac{\mathrm{N}_2\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{dt}}$$

Elles sont représentées en convention générateur sur le schéma électrique équivalent de la figure suivante. Cette figure montre également que $U_1 = -e_1 \; et \; U_2 = e_2$.

D'où :

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{e_1}{e_2} = -\frac{N_1}{N_2}$$

Transformateur électrique : orientation et schéma électrique équivalent. Les points correspondent à ceux de la figure précédente.



- Relation de transformation en tension

Les tensions au primaire et au secondaire d'un transformateur électrique sont liées au nombre de spires des enroulements par :

$$\boldsymbol{\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2}}$$

Le signe « moins » provient du choix (arbitraire) des orientations des tensions U_1 et U_2 sur la figure. Un autre choix d'orientation aurait pu donner un signe « plus ».

Pour brancher un appareil américain sur le réseau français, il suffit donc de prendre un transformateur avec $N_1=0.5N_2$, et de raccorder le primaire à la prise française (U_1 = 220 V) et de brancher l'appareil américain au secondaire du transformateur (U_2 = 110V).

Remarque : Le choix des orientations des tensions n'a d'importance que pour les calculs. Pour l'utilisateur d'un transformateur, le sens de branchement n'importe pas car les courants et tensions sont alternatifs (de même que n'importe quel appareil branché sur le secteur est insensible au sens de branchement de la prise).