XXII-1 Actions d'un champ magnétique

Un circuit électrique parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique ambiant subit des actions mécaniques dites de Laplace. Ces actions sont mises à profit dans tous les moteurs électriques.

I - Forces de Laplace

I-1) Loi de Laplace

Un fil électrique rectiligne parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique uniforme subit une force, dite force de Laplace, qui vérifie les caractéristiques suivantes.

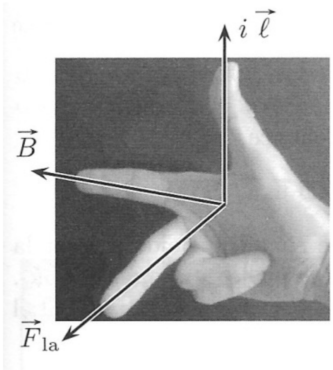
- Elle est perpendiculaire au champ magnétique et au fil.
- Le trièdre formé par le courant orienté, le champ magnétique et la force de Laplace est direct.
- Sa norme est proportionnelle à la longueur du fil, à l'intensité du courant dans le fil et à l'intensité du champ magnétique.

Ces faits expérimentaux conduisent à la définition suivante.

Soit un fil électrique rectiligne de longueur l, parcouru par une intensité électrique i, plongé dans un champ magnétique uniforme B. En définissant le vecteur $\vec{l}$ de norme l, confondu avec le fil et orienté par i, la force de Laplace subie par le fil s'écrit :

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B} \text{ où } \vec{B} \text{ est uniforme}$$

Cette force s'exerce sur le milieu du fil.



La règle des trois doigts de la main droite permet de trouver rapidement l'orientation de la force de Laplace.

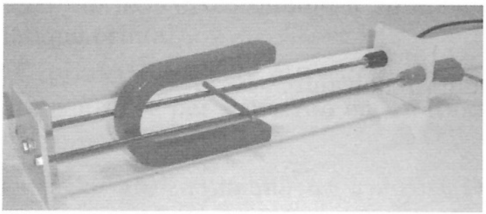
Remarque : La force de Laplace est une conséquence de la force magnétique de Lorentz, exercée par le champ magnétique sur les porteurs de charges mobiles responsables du courant électrique dans le fil.

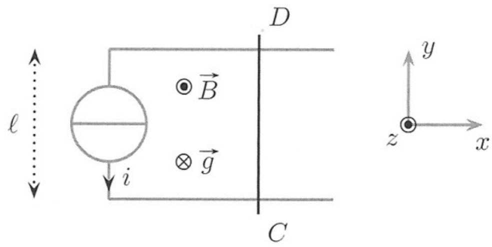
I-2) Les rails de Laplace

a) Présentation

Le schéma ci-après présente le dispositif des rails de Laplace : la partie du circuit électrique représentée en gris (deux rails parallèles et un générateur de courant) est fixe dans le laboratoire. La barre [CD], de masse m et de longueur l, referme le circuit mais peut se déplacer (glissement possible sans frottement sur les rails aux points C et D). L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ orthogonal au plan formé par les rails. On suppose que le seul mouvement possible de la barre [CD] est une translation parallèle à la direction x avec la vitesse $\overrightarrow{v(t)} = v(t)\overrightarrow{u_x}$

La photographie montre le dispositif expérimental, dans lequel le champ magnétique est généré par un aimant en forme de fer à cheval.





b) Equation du mouvement

Soit : $\vec{F} = i\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B} = il\overrightarrow{u_y} \wedge B\overrightarrow{u_z} = ilB\overrightarrow{u_x}$

Les seules autres forces auxquelles est soumise la barre sont son poids mg et la réaction R des rails. Elles sont verticales et donneront une projection nulle sur $\overrightarrow{u_x}$. La loi de la quantité de mouvement appliqué à la barre s'écrit, dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = ilB\overrightarrow{u_x} + m\vec{g} + \vec{R} = ilB\overrightarrow{u_x} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{ilB}{m}$$

Si l'intensité i est constante et la vitesse initiale de la barre est nulle, cette équation s'intègre en :

$$v(t) = \frac{ilB}{m}t + v_0 = \frac{ilB}{m}t$$

On remarque que la vitesse de la barre tend vers l'infini. Dans la pratique, cela ne peut pas avoir lieu, car la barre, en se déplaçant dans le champ magnétique, est le siège de phénomènes d'induction qui font décroître l'intensité i. Les actions de Laplace sont donc de moins en moins intenses et on montre que la barre atteint une vitesse limite.

c) Puissance des actions de Laplace

Par définition, on calcule une puissance comme le produit scalaire de la force par le vecteur vitesse du point d'application de cette force. La puissance mécanique fournie par les actions de Laplace à la barre est donc :

$$P = \vec{F}.\vec{v} = ilB\overrightarrow{u_x}\,.\,v\overrightarrow{u_x} = ilBv$$

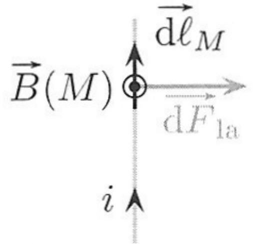
Le poids et la réaction des rails sont orthogonaux à la vitesse des points auxquels ils s'appliquent. Ils donnent donc une puissance nulle à la barre. La seule puissance qui intervient dans le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la barre est celle de la force de Laplace, donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = P = ilBv \Leftrightarrow \frac{mvdv}{dt} = ilBv \Leftrightarrow \frac{mdv}{dt} = ilB$$

Cette dernière équation est, au facteur multiplicatif v près, la même que celle obtenue à la question en appliquant le théorème de la quantité de mouvement.

I-3) Force de Laplace élémentaire

On peut particulariser la définition de la force de Laplace à chaque élément infinitésimal $\overrightarrow{dl}$ de fil électrique, ce qui conduit à la définition suivante.



Un élément de fil situé au point M, de longueur $\overrightarrow{dl}$, orienté par l'intensité électrique i et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$ subit la force de Laplace élémentaire :

$$\overrightarrow{dF} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

Cette définition étant valable au point M où se trouve l'élément de fil, elle fait intervenir la valeur du champ en ce point. Elle peut donc être utilisée même si le champ magnétique est non uniforme.

La résultante des actions de Laplace s'exerçant sur un fil est la somme des actions de Laplace élémentaires :

$$\vec{F} = \int_{fil} \overrightarrow{dF} = \int_{fil} i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

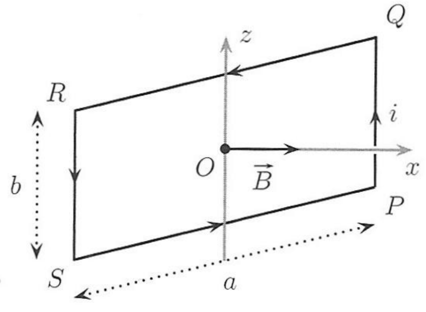
Sens d'intégration :
L'intégrale le long du fil doit être calculée dans le sens conventionnel de i, car, dans la définition de la force de Laplace, $\overrightarrow{dl}$ est orienté dans le sens de i.
Le découpage en forces élémentaires de Laplace est utile si le champ magnétique n'est pas uniforme ou si le fil électrique n'est pas rectiligne.

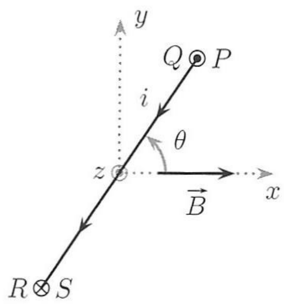
II - Actions de Laplace sur une spire ou un aimant

II-1) La spire

a) Présentation

Pour comprendre l'effet mécanique des actions de Laplace sur un moment magnétique (aimant ou circuit électrique parcouru par un courant), on calcule les effets des actions de Laplace sur le cas simple d'une spire rectangulaire. Ces calculs sont utiles pour comprendre le principe de certains moteurs électriques.





On considère un circuit rectangulaire PQRS de côtés a et b parcouru par un courant électrique d'intensité i. Ce circuit peut pivoter autour de l'axe z. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ orthogonal à l'axe z. Les schémas donnent une vue en perspective et une vue de dessus (depuis les z positifs).

b) Résultante des actions de Laplace

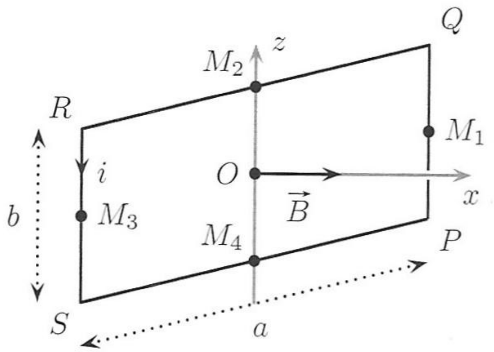
Par définition, la résultante est la somme des forces de Laplace subies par chaque côté :

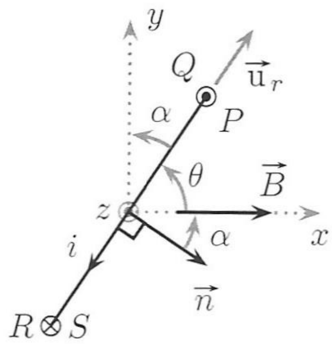
$$\vec{F} = i\,\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B} + i\,\overrightarrow{QR} \wedge \vec{B} + i\,\overrightarrow{RS} \wedge \vec{B} + i\,\overrightarrow{SP} \wedge \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} = i\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Ainsi, $\vec{F} = \vec{0}$, ce qui signifie que le champ magnétique n'a pas tendance à déplacer le centre de masse du cadre. Son seul effet, s'il en a un, sera de faire tourner le cadre autour de son centre de masse. Attention, ce résultat n'est valable que si le champ magnétique B est uniforme. Si B n'est pas uniforme, il n'a pas la même valeur sur les quatre côtés du cadre et ne peut pas être mis en facteur dans le calcul qui précède.

c) Moment résultant





Pour calculer leur moment en 0, on exprime chaque force de Laplace (on les numérote de 1 à 4 comme sur le schéma). On introduit le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ faisant l'angle θ avec $\overrightarrow{u_x}$, de sorte que :

$\overrightarrow{u_r} = cos\theta\overrightarrow{u_x} + sin\theta\overrightarrow{u_y}$

On note α le complémentaire à π/2 de θ.

$$\overrightarrow{F_1} = i\,\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B} = ibB\overrightarrow{u_y}\ et\ \overrightarrow{F_3} = i\,\overrightarrow{RS} \wedge \vec{B} = -ibB\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{F_2} = i\,\overrightarrow{QR} \wedge \vec{B} = iaB\,|sin(\pi - \theta)|\overrightarrow{u_z} = iaBsin\theta\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{F_4} = i\,\overrightarrow{SP} \wedge \vec{B} = -i\,\overrightarrow{QR} \wedge \vec{B} = -iaBsin\theta\overrightarrow{u_z}$$

On introduit les milieux M_i des quatre côtés. Le moment en 0 de ces quatre forces est la somme de quatre termes, dont deux sont nuls :

$$\overrightarrow{M_{la}} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{OM_3} \wedge \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{OM_4} \wedge \overrightarrow{F_4}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_{la}} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OM_3} \wedge \overrightarrow{F_3}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_{la}} = \frac{a}{2}\overrightarrow{u_r} \wedge \left(-ibB\overrightarrow{u_y}\right) - \frac{a}{2}\overrightarrow{u_r} \wedge \left(+ibB\overrightarrow{u_y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_{la}} = aiBb\overrightarrow{u_r} \wedge \left(\overrightarrow{u_y}\right) = aibBsin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$

On remarque que ce moment ne dépend pas du point 0. C'est toujours le cas quand il s'agit du moment relatif à des actions dont la résultante est nulle. Un tel moment s'appelle un couple.

$$\vec{\Gamma} = aibBsin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$

d) Le moment magnétique

Le moment magnétique du cadre est défini par $\vec{m} = i\vec{S}$, où $\vec{S}$ est le vecteur surface du circuit, orienté par le sens conventionnel de i et la règle de la main droite. Ici $\vec{m} = iab\,\vec{n}$, où $\vec{n}$, défini sur le schéma, fait l'angle α avec $\overrightarrow{u_x}$.

On remarque que :

$$\vec{\Gamma} = aibBsin\alpha\,\overrightarrow{u_z} = mBsin\alpha\,\overrightarrow{u_z} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Le résultat démontré dans le cas particulier de la spire rectangulaire, reste vrai dans le cas d'un circuit de forme quelconque plongé dans un champ magnétique uniforme. De plus, un aimant, comme un circuit électrique, est caractérisé par un moment magnétique. Par conséquent, le résultat établi à la fin de l'exercice se généralise par le théorème ci-après.

II-2) Moment dans un champ magnétique uniforme

a) Définition

Un moment magnétique $\vec{m}$ (circuit électrique ou aimant) plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ subit, de la part de ce champ, des actions de Laplace dont la résultante est nulle et le moment (couple) est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Attention : si le champ magnétique n'est pas uniforme à l'échelle du dipôle magnétique, la résultante des actions magnétiques n'est pas nulle.

Grâce à la description en termes de moment magnétique, il est facile d'analyser les effets mécaniques du champ magnétique $\vec{B}$ sur un circuit ou un aimant de moment magnétique$\vec{m}$. Sur la figure, $\vec{m}$ et $\vec{B}$ sont contenus dans le plan $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ et on définit l'angle α orienté $\alpha = (\vec{m}, \vec{B})$. En exprimant le produit vectoriel, le couple de Laplace subi par $\vec{m}$ s'écrit

$$\overrightarrow{M_{la}} = \vec{\Gamma} = aibBsin\alpha\,\overrightarrow{u_z} = mBsin\alpha\,\overrightarrow{u_z} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Son sens dépend du signe de sin α.

Effet mécanique du couple $\overrightarrow{M_{la}} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ sur un moment magnétique $\vec{m}$.

- Si $\alpha \in]0,\pi[$, alors $\vec{\Gamma}$ (cas de gauche), pointe selon $\overrightarrow{u_z}$ et tend à faire tourner $\vec{m}$ dans le sens trigonométrique.
- Si $\alpha \in]-\pi,0[$ (cas de droite), alors $\vec{\Gamma}$ pointe selon -$\overrightarrow{u_z}$ et tend à faire tourner $\vec{m}$ dans le sens antitrigonométrique.

Dans les deux cas, le couple de Laplace fait tourner $\vec{m}$ dans un sens qui fait diminuer la valeur absolue de l'angle α, ce qui tend à aligner $\vec{m}$ sur $\vec{B}$ (le vecteur $\vec{m}$ étant de même sens que $\vec{B}$).

b) Positions d'équilibre

La position $\alpha = 0$ est une position d'équilibre stable. En effet, si on éloigne légèrement α de zéro, le couple tend à faire diminuer $|\alpha|$, c'est-à-dire à faire revenir $\vec{m}$ vers la position $\alpha = O$.

La position $\alpha = \pi$ est également une position d'équilibre, car $\overrightarrow{M_{la}} = \vec{0}$. Cet équilibre est cependant instable. En effet, éloigner légèrement $\vec{m}$ de la position $\alpha = \pi$ revient à le placer dans un des deux cas. Le couple magnétique tend alors à diminuer $|\alpha|$ (pour l'amener à 0), ce qui éloigne $\vec{m}$ de sa position initiale $\alpha = \pi$.

Le couple de Laplace $\overrightarrow{M_{la}} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ subi par un moment magnétique $\vec{m}$ tend à aligner $\vec{m}$ sur $\vec{B}$, où « aligner » signifie « mettre parallèle et de même sens ». Cette configuration est la seule position d'équilibre stable.

c) Boussoles

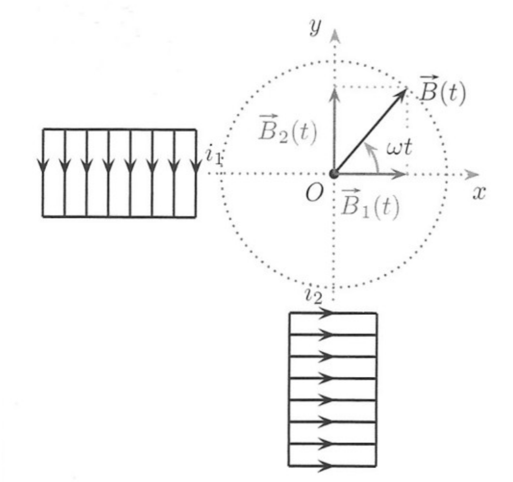
Le théorème illustre ce que subit une boussole (aiguille aimantée de moment magnétique $\vec{m}$) : elle s'aligne sur le champ ambiant, qui est le champ magnétique terrestre si on se trouve loin de tout aimant ou courant.

Dans le théorème, le champ magnétique $\vec{B}$ est créé par une source (circuit ou aimant). Le couple de Laplace $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ traduit en réalité l'action à distance de la source de $\vec{B}$ sur le circuit ou l'aimant de moment $\vec{m}$. Le champ magnétique n'est qu'un outil pratique pour traduire les actions à distance. D'après le principe des actions réciproques, la source de B subit, de la part de $\vec{m}$, le moment opposé -$\vec{\Gamma}$. Ainsi, si on approche l'un de l'autre deux aimants libres de tourner (deux boussoles ou deux aimants suspendus à des fils, par exemple), chacun se met à tourner sous l'influence de l'autre. Sous l'effet des inévitables frottements des liaisons pivot, leur rotation s'atténue et ils se stabilisent lorsque le pôle nord de l'un fait face au pôle sud de l'autre.

III - Effet moteur d'un champ magnétique tournant

III-1) Présentation

Si on parvient à générer un champ magnétique tournant, un moment magnétique plongé dans ce champ va lui aussi tourner en cherchant à s'aligner sur ce champ sous l'effet du couple magnétique de Laplace. C'est le principe des machines électriques dites « à champ tournant » (moteurs synchrone et asynchrone).



Génération d'un champ magnétique tournant par superposition de deux champs magnétiques sinusoïdaux déphasés dans le temps. Le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ résultant tourne à la vitesse angulaire ω : son extrémité se déplace sur le cercle en pointillé.

Comme indiqué sur la figure, on dispose orthogonalement deux bobines identiques dont les axes définissent le plan $\left(0, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$.
Au point O, chaque bobine crée un champ magnétique dirigé selon l'axe de la bobine et proportionnel à l'intensité du courant qui parcourt la bobine.

- La bobine 1 crée $\overrightarrow{B_1}(t) = Ki_1(t)\overrightarrow{u_x}$
- La bobine 2 crée $\overrightarrow{B_2}(t) = Ki_2(t)\overrightarrow{u_y}$

Si les bobines sont identiques et situées à la même distance du point O, la constante de proportionnalité K est la même pour les deux bobines. Par superposition, le champ magnétique résultant en O est la somme. Pour que ce champ soit qualifié de tournant, il faut que sa norme soit constante et que sa direction change régulièrement au cours du temps.

III-2) Champ résultant

Pour cela, on alimente les bobines avec deux courants de même amplitude i_o, même pulsation temporelle ω, et déphasés de $\pi/2$: $i_1(t) = i_o \, cos(\omega t) \; et \; i_2(t) = i_o \, sin(\omega t)$.

Le champ magnétique résultant s'écrit :

$$\vec{B} = K i_o \, cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + K i_o \, sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = B_0\left(cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\right)$$

champ tournant à la pulsation ω et de norme B_o.

L'expression de ce champ n'est valable qu'au point O. À cause de l'écartement des lignes de champ en sortie de chaque bobine, les champs B_1 et B_2 ne sont pas uniformes, donc B non plus. Cependant, si les bobines sont assez proches de O et si on considère une zone de petite extension spatiale autour de O, on fera l'approximation d'uniformité du champ magnétique dans cette zone.