# XIII-1 Loi du moment cinétique

Le principe fondamental de la dynamique relie la variation de la quantité de mouvement aux forces appliquées. Pourtant, pour les systèmes en rotation, la notion de force n'est pas toujours la plus pertinente. Dans ce chapitre, on introduit deux nouvelles grandeurs mécaniques : le moment cinétique et le moment d'une force. On relie alors la variation du moment cinétique aux moments des forces appliquées au système.

## I – Moment cinétique d'un point matériel

### I-1) Moment cinétique par rapport à un point O

On considère un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel R galiléen. On note $\vec{p} = m\vec{v}$ sa quantité de mouvement. On considère également un axe orienté $\Delta$ déterminé par un point O et un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$ dont le sens précise l'orientation de l'axe.

Le moment cinétique de M par rapport à un point O est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Sa norme se mesure en kg.m$^2$s$^{-1}$=J.s

Le moment cinétique par rapport à un point O est défini à partir de la vitesse de M, il dépend donc du référentiel dans lequel on le détermine.

## I-2) Propriétés

De par sa définition à partir d'un produit vectoriel, $\overrightarrow{L_0}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$. En conséquence :

- Si le mouvement de M est plan et que 0 appartient au plan du mouvement, le vecteur $\overrightarrow{L_0}$ est perpendiculaire à ce plan à tout instant. Sa direction est donc fixe et perpendiculaire au plan du mouvement. La réciproque est vraie.
- Si le mouvement de M est rectiligne et inscrit sur une droite passant par 0, $\overrightarrow{L_0}$ est nul à tout instant puisque les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à tout instant. La réciproque est vraie.
- Il faut également noter que le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le calcule et que l'on indique en indice. En effet,

$$\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OO'} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{L_{0'}} + \overrightarrow{OO'} \wedge m\vec{v}$$

## I-3) Moment cinétique par rapport à un axe orienté $\Delta$

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté $\Delta$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{L_0}$ sur l'axe $\Delta$ :

$$L_{\Delta} = \overrightarrow{L_0}.\overrightarrow{u_{\Delta}}$$

Comme le moment cinétique par rapport à un point, le moment cinétique par rapport à un axe dépend du référentiel d'étude et se mesure en J.s. Par contre, il ne dépend pas du choix du point O appartenant à l'axe $\Delta$ utilisé pour le calculer mais seulement de la direction et de l'orientation de $\Delta$.

En effet, si l'on considère deux points O et O’ appartenant à l'axe $\Delta$ :

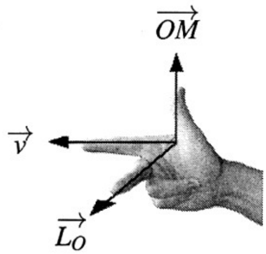
$$L_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{OO'} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v}\right).\overrightarrow{u_\Delta}$$
$$= \overrightarrow{L_{0'}}.\overrightarrow{u_\Delta}\ car\ \overrightarrow{OO'} \text{ et } \overrightarrow{u_\Delta}\ colinéaires$$

I-4) Mouvement circulaire

Lorsque M est en mouvement circulaire sur un cercle de centre O et de rayon R. On a intérêt à le repérer en coordonnées cylindriques de centre 0, d'axe (Oz) perpendiculaire au plan du cercle, et d'angle polaire $\theta$.

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r}\ \ et\ v = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$
$$Donc :\ \overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} \Rightarrow L_z = mR^2\dot{\theta}$$

On peut trouver la direction de $\overrightarrow{L_0}$ à l'aide de la « règle de la main droite ».



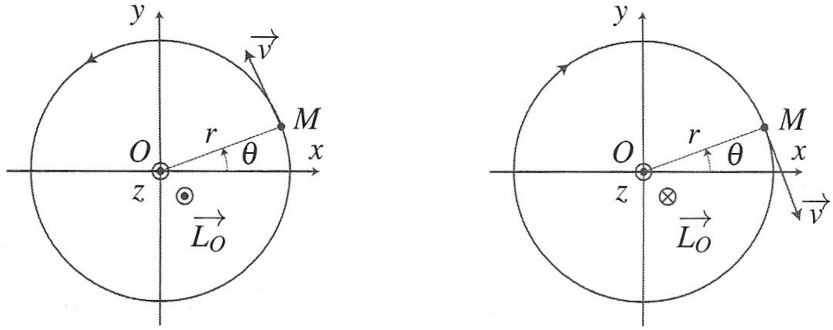

Règle de la main droite.

Ainsi :

- lorsque la révolution du point M se fait dans le sens direct autour de $\overrightarrow{u_z}$, $\dot{\theta}$> 0 et $\overrightarrow{L_0}$ est selon +$\overrightarrow{u_z}$;
- lorsque la révolution du point M se fait dans le sens indirect autour de $\overrightarrow{u_z}$, $\dot{\theta}$< 0 et $\overrightarrow{L_0}$ est selon -$\overrightarrow{u_z}$;

Le signe de $\overrightarrow{L_0}$ permet donc de déterminer le sens de la révolution circulaire de M :

- si $L_z > 0$, la révolution se fait dans le sens direct dans le plan orienté par $\overrightarrow{u_z}$;
- si $L_z < 0$, la révolution se fait dans le sens indirect dans le plan orienté par $\overrightarrow{u_z}$.




Moment cinétique en $O$ d'un mobile en révolution circulaire de centre $O$.

## I-5) Notion de moment d'inertie

Plus généralement, lorsque l'axe $\Delta$ est fixe, on peut le faire coïncider avec l'axe (Oz) et repérer M à l'aide de ses coordonnées cylindriques. On peut alors calculer $L_z$ qui correspond à la composante selon $\overrightarrow{u_z}$ du moment cinétique de M par rapport à 0 :

$$\overrightarrow{L_0} = (r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}) \wedge m\left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

$$= \mathrm{m}r^2\overrightarrow{u_z} + m(r\dot{z} - z\dot{r})\overrightarrow{u_\theta} - zr\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

soit :

$$L_z = \mathrm{m}r^2\dot{\theta}$$

En coordonnées cylindriques d'axe (Oz), on définit le moment d'inertie d'un point M de coordonnées (r, $\theta$ , z) par rapport à l'axe (Oz) :

$$\mathbf{J_z = mr^2}$$

D'où :

$$\boldsymbol{L_z} = \mathbf{J_z}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J_z\omega}$$

# II - Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points

## II-1) Cas d'un système déformable

### a) Moment cinétique par rapport à un axe orienté

On considère un système constitué de plusieurs points matériels $M_i$ de masses $m_i$ de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté $\Delta$ : $L_{\Delta i}$. Le moment cinétique du système de points est obtenu par sommation des moments cinétiques de chacun des points :

$$L_\Delta = \sum_i L_{\Delta i}$$

Les moments cinétiques par rapport à $\Delta$ étant algébriques, il faut être rigoureux sur les signes.

### b) Cas des coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe $\Delta$ est fixe, on utilise généralement les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec $\Delta$. Le moment cinétique de chaque point $M_i$ est donné par la relation :

$$L_{zi} = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = J_{zi} \dot{\theta}_i$$

où $J_{zi} = m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du point $M_i$ par rapport à Oz et $\dot{\theta}_i$ sa vitesse angulaire.

Donc :

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = \sum_i J_{zi} \dot{\theta}_i$$

## II-2) Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe

### a) Moment d’inertie d’un solide

On considère un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d'un axe orienté fixe dans un référentiel Re. On choisit l'axe (Oz) pour qu'il coïncide avec cet axe de rotation. On modélise le solide par un ensemble de points matériels $M_i$ de masse $m_i$ repérés en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) :

On rappelle une relation essentielle du chapitre de cinématique du solide : chaque point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe possède la même vitesse angulaire. Le mouvement du solide est alors un cas particulier du mouvement d'un système de points dans lequel la vitesse angulaire de chacun des points du système est la même. D’où :

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i J_{zi} \dot{\theta} = J_z \dot{\theta}$$

Le moment d'inertie $J_z$ du solide par rapport à l'axe (Oz) est défini par la somme des moments d'inertie par rapport à (Oz) de chacun des points le constituant :

$$J_z = \sum_i J_{zi}$$

Remarque :

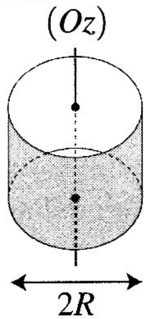
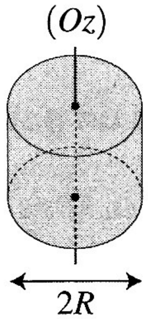
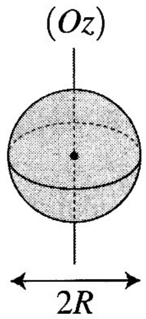
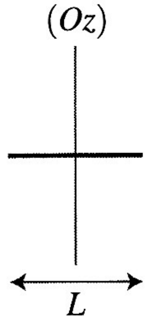
On peut également modéliser le solide par une répartition continue de masse. La somme discrète précédente devient alors une intégrale sur le volume du solide.

b) Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté (Oz)

Le moment cinétique par rapport à un axe (Oz) d'un solide en rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire à est égal au produit du moment d'inertie $J_z$ du solide par sa vitesse angulaire :

$$L_z = J_z\dot{\theta} = J_z\omega$$

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est une caractéristique intrinsèque que l'on peut mesurer. On peut également le calculer dans certains cas simples. Pour information, on donne les moments d'inertie par rapport à l'axe (Oz) dessiné sur les figures suivantes pour des solides homogènes de masse m :

| cylindre vide de rayon $R$ | cylindre plein de rayon $R$ | boule de rayon $R$ | barre de longueur $L$ |
|---|---|---|---|
| $mR^2$ | $\frac{1}{2}mR^2$ | $\frac{2}{5}mR^2$ | $\frac{1}{12}mL^2$ |
|   |   |   |   |

En pratique, en notant d la distance qui sépare l'axe (Oz) du point du solide qui en est le plus éloigné, le moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à (Oz) vaut $J(oz) = kmd^2$. Dans cette formule, k est un facteur numérique inférieur à 1 qui ne dépend que de la forme du solide et de la manière dont la masse est répartie à l'intérieur de ce dernier.

On peut modéliser la jante d'une roue de voiture par un cylindre creux de masse m et de rayon R. Son moment d'inertie par rapport au moyeu est donc environ égal à $mR^2$.

### c) Évolution du moment d'inertie en fonction de la répartition des masses

La contribution d'une masse m au moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe (Oz) est égale à $mr^2$ où r est sa distance à l'axe (Oz).

**Plus une masse m est éloignée de l'axe de rotation (Oz), plus sa contribution au moment d'inertie par rapport à (Oz) est importante.**

Ceci explique pourquoi le moment d'inertie d'un cylindre plein est inférieur à celui d'un cylindre creux de même masse : une partie importante de sa masse est située à faible distance de l'axe et contribue peu à son moment d'inertie.

La mesure du moment d'inertie d'un solide permet également d'obtenir des informations sur la répartition interne des masses.

Exemple

Les mesures astronomiques du moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe Nord-Sud montrent qu'il vaut O, $33MR^2$. Il est inférieur à celui d'une boule homogène de même masse et même rayon qui vaut $0{,}4MR^2$. On en déduit que la répartition des masses à l'intérieur de la Terre n'est pas homogène et que la couche profonde située près de son axe de rotation est plus dense que les couches superficielles. Cette couche profonde est le noyau. Connaissant sa taille, on peut estimer sa densité. Elle correspond à celle du fer à haute pression. C'est un des principaux arguments prouvant que le noyau est essentiellement composé de fer.

# III - Moment d'une force

## III-1) Moment d'une force par rapport à un point O

On considère maintenant une force qui s'applique en un point M. Le moment en O de la force s'appliquant en M est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Sa norme se mesure en joule J = N.m.

Le moment des forces par rapport à un point est une grandeur additive :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F_1} + \vec{F_2}) = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{F_1} + \vec{F_2}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F_1}) + \overrightarrow{M_O}(\vec{F_2})$$

Le moment de la somme des forces est la somme des moments.

Remarque :

Lorsque l'on s'occupe du mouvement d'un point M, la force s'applique forcément en M. Lorsque l'on s'occupe d'un système de points ou d'un solide, le point M est le point d application de la force.

## III-2) Moment d'une force par rapport à un axe orienté $\Delta$

### a) Définition

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe orienté $\Delta$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{M_O}$ sur $\Delta$ :

$$M_\Delta = M_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}).\overrightarrow{u_\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\overrightarrow{u_\Delta}$$

Comme le moment d'une force par rapport à un point, c'est une grandeur additive qui se mesure en joule. On peut également montrer que le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe $\Delta$ ne dépend pas du point de l'axe choisi pour le calculer mais seulement de la direction et de l'orientation de $\Delta$.

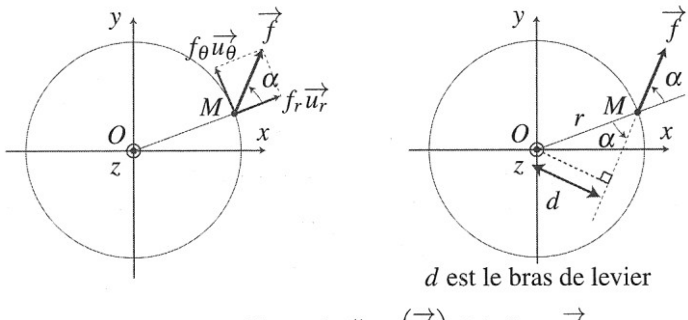
b) Calcul en coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe $\Delta$ est fixe, on peut faire coïncider l'axe (0z) avec $\Delta$ et repérer M par ses coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) &= (r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}) \wedge m(\mathrm{F_r}\,\overrightarrow{u_r} + F_\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{F_z}\,\overrightarrow{u_z}) \\ &= -zF_\theta\overrightarrow{u_r} + (\mathrm{zF_r} - \mathrm{rF_z})\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{r}F_\theta\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

Donc : $\mathrm{M_z} = \mathrm{r}F_\theta$

Étant donné que ni la composante selon $\overrightarrow{u_z}$ du vecteur position ni celle de la force n'interviennent, on représente cette situation sur la figure en se restreignant au plan (Oyx), perpendiculaire à (Oz).




Moment $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f})$ de la force $\vec{f}$.

c) Bras de levier

On peut réécrire cette relation :

$$M_z = rF_\theta = rF\sin\alpha$$

On se reporte alors à la partie droite pour observer que :

$r\sin\alpha = d$ est la distance séparant la droite d'action de la force $\vec{F}$ de l'axe (Oz). La distance d est appelée le bras de levier de la force $\vec{F}$ et on a dans le cas général

$$|M_z| = fd$$

Le signe de $M_z$ est :

- Positif lorsque $\alpha \in ]0, \pi[$. C'est le cas lorsque $\vec{F}$ tend à faire bouger M vers les θ croissants ;
- Négatif lorsque $\alpha \in ]\pi, 2\pi[$ C'est le cas lorsque $\vec{F}$ tend à faire bouger M vers les θ décroissants.

Remarque :

Le moment d'une force $\vec{F}$ non nulle par rapport à un axe orienté Δ est nul dans deux cas :

- La droite d'action de $\vec{F}$ coupe Δ (d=0)
- $\vec{F}$ $est\ parall\grave{e}le$ à Δ

# IV - Loi du moment cinétique pour un point matériel

## IV-1) Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen R. Le point M est soumis à un ensemble de forces $\vec{F}$. On note O un point fixe et Δ une droite orientée fixe contenant O. On choisit l'axe (Oz) de telle sorte que Δ = (Oz).

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même point O :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{M_{Oi}}$$

On démontre cette loi en remarquant que :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right)}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \overrightarrow{f_i}$$

$$= \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_i} = \sum_i \overrightarrow{M_{Oi}} = \overrightarrow{M_O}$$

En effet, le point O étant fixe, $\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt} = \vec{v}$.

IV-2) Forces centrales

Cette loi est particulièrement intéressante lorsque la somme des moments des forces par rapport à O s'annule. Cela correspond à $\sum_i \overrightarrow{M_{Oi}} = \vec{0}$ . En pratique, cette situation n'arrive que dans deux cas.

- Celui où $\sum \overrightarrow{f_i}$ à tout instant. Le point M est alors isolé ou pseudo-isolé. Il est enmouvement rectiligne et uniforme ou immobile ;

- Celui $\sum \overrightarrow{f_i}$ est parallèle à $\overrightarrow{OM}$ à tout instant. La droite d'action de la résultante des forces passe alors constamment par 0. M est soumis à une force centrale de centre 0. Ce type de force fait l'objet du chapitre Mouvement dans un champ de force centrale.

IV-3) Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport à ce même axe :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}$$

On démontre cette loi en remarquant que :

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{\mathrm{u_z}}\right)}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{L_O}\right)}{dt}.\overrightarrow{\mathrm{u_z}} = \sum_i \overrightarrow{M_{Oi}}.\overrightarrow{\mathrm{u_z}} = \sum_i M_{zi}$$

En effet, l'axe (Oz) étant fixe, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{u_z}}$ est constant.

Remarque

La loi précédente est une loi scalaire qui ne fournit qu'une seule équation. Utilisée seule, elle ne permet de résoudre que les problèmes à un degré de liberté. En pratique, le mouvement du point M est presque obligatoirement circulaire. Pour les problèmes à deux degrés de liberté, elle doit être complétée par une autre équation mécanique indépendante comme la loi de l'énergie cinétique.