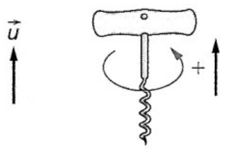
XII-1 Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, uniformes et stationnaires.

De même que la notion de masse a été introduite afin de quantifier l'interaction gravitationnelle, la notion de charge électrique est liée à l'interaction électromagnétique. Dans ce chapitre seront établis les comportements de charges soumises à des champs électromagnétiques simples.

I - Le produit vectoriel

I-1) Sens de rotation associé à un vecteur

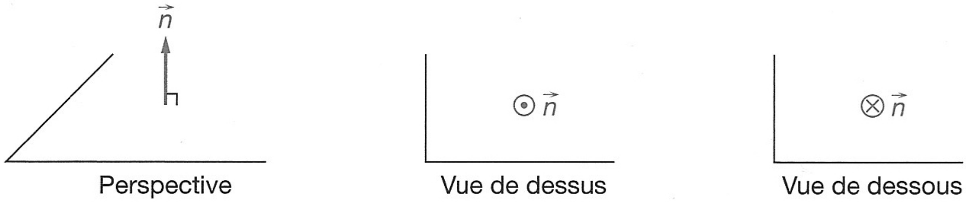
Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire. On appelle sens de rotation direct (ou aussi sens de rotation positif) autour de la direction $\vec{u}$ le sens de rotation qui fait avancer un tire-bouchon (usuel) dans le sens de $\vec{u}$. Le sens de rotation est dit indirect si la rotation met le tire-bouchon en mouvement sans le sens opposé à $\vec{u}$.



On peut imager le tire bouchon avec sa main droite :

- Le pouce représente l'axe $\vec{u}$
- L'index le sens de rotation.

Cette détermination des sens de rotation est la plus naturelle, mais elle nécessite la visualisation du mouvement d'un tire-bouchon… Il est possible d'envisager la situation de manière plus pragmatique. Commençons par donner une convention. Sur la figure est représenté un plan.



La direction normale à ce plan $\vec{n}$ est représentée :

- Vue de dessus par un vecteur $\vec{n}$ pointant vers le lecteur (vecteur sortant) et indiqué par le symbole ⊙ ;
- Vue de dessous par un vecteur $\vec{n}$ pointant en sens opposé (vecteur rentrant), et indiqué par ⊗.

La représentation est imagée à une flèche d'arc.

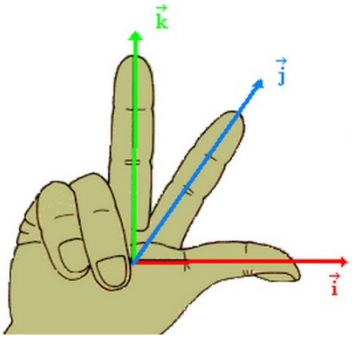
A l'aide de sa main droite, on remarque que :

- Vue de dessus le sens de rotation est le sens trigonométrique
- Vue de dessous c'est le sens horaire

I-2) Bases directes et indirectes

Considérons une base orthonormée de l'espace, notée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On dit que cette base est directe si la situation suivante est vérifiée :

On peut faire coïncider $\overrightarrow{u_x}$, avec le pouce, $\overrightarrow{u_y}$ avec l'index et $\overrightarrow{u_z}$, avec le majeur de la main droite;



I-3) Propriétés du produit vectoriel

Nous allons alors introduire une nouvelle notion mathématique très utile en physique, le produit vectoriel. À partir de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, on obtient un nouveau vecteur noté :

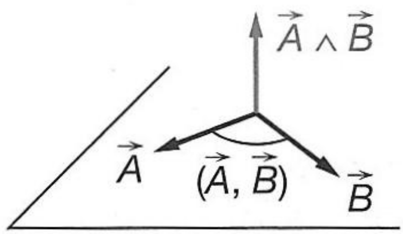
$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

tel que :

- $\vec{C}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{A}$ et $\vec{B}$;
- la norme de $\vec{C}$ vaut : $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin{(\vec{A}, \vec{B})}$

où $\vec{A}, \vec{B}$ est l'angle géométrique entre les vecteurs A et B;

- $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ directe.



Le produit vectoriel est :

- Antisymétrique : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$;
- Bilinéaire : $\left(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}\right) \wedge \vec{C} = \lambda\vec{A} \wedge \vec{C} + \mu\vec{B} \wedge \vec{C}$

On considère désormais de manière implicite dans la suite du livre que la base usuelle $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ est directe.

I-4) Calcul pratique d'un produit vectoriel

Soit $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs, dont on écrit les composantes dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$:

$$\vec{A} = A_x\overrightarrow{u_x} + A_y\,\overrightarrow{u_y} + A_z\overrightarrow{u_z}$$

et

$$\vec{B} = B_x\overrightarrow{u_x} + B_y\,\overrightarrow{u_y} + B_z\overrightarrow{u_z}$$

Alors, grâce à la bilinéarité,

$$\begin{aligned}\vec{A} \wedge \vec{B} &= \left(A_x\overrightarrow{u_x} + A_y\,\overrightarrow{u_y} + A_z\overrightarrow{u_z}\right) \wedge \left(B_x\overrightarrow{u_x} + B_y\,\overrightarrow{u_y} + B_z\overrightarrow{u_z}\right) \\ &= \left(A_xB_y - A_yB_z\right)\overrightarrow{u_z} + \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\overrightarrow{u_x} \\ &\quad + (A_zB_x - A_xB_z)\overrightarrow{u_y}\end{aligned}$$

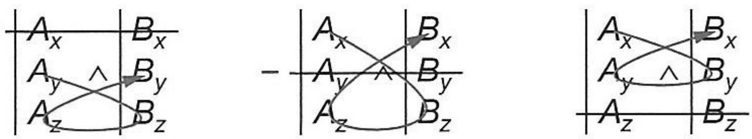
On peut retenir cette formule de la manière assez simple suivante : il faut écrire les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sous forme colonne :

On écrit :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$$

- Alors la première composante de $\vec{A} \wedge \vec{B}$, c'est-à-dire sa projection sur $\overrightarrow{u_x}$, s'obtient en supprimant la première ligne et en suivant la boucle comme sur la figure.
- La deuxième composante s'obtient en supprimant la deuxième ligne, et en suivant la boucle avec un signe **moins**.
- Enfin, la troisième et dernière composante s'évalue en supprimant la troisième ligne et en suivant la boucle.On arrive alors bien à :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{vmatrix}.$$



I-5) Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs a, b, c se définit comme le scalaire :

$$\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right).\ \vec{C}$$

Le produit mixte possède les propriétés suivantes :

- Il est invariant par permutation circulaire des trois vecteurs :

$$\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right).\ \vec{C} = \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right).\ \vec{A} = \left(\vec{C} \wedge \vec{A}\right).\ \vec{B}$$

- Si deux des trois vecteurs sont colinéaires, alors le produit mixte est nul.

I-6) Double produit vectoriel

On peut démontrer qu'il peut aussi s'écrire :

$$\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \wedge \vec{C} = \vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

II - Notions d'électromagnétisme

II-1) Phénomènes électriques

a) Charge électrique

Depuis l'Antiquité, les Grecs ont remarqué que de l'ambre frotté préalablement avec une fourrure acquérait de nouvelles propriétés. Deux morceaux d'ambre ainsi traités se repoussaient, et un morceau d'ambre pouvait attirer des objets assez légers. Au 18$^{\text{ème}}$ siècle, Dufay a remarqué qu'en frottant des objets en verre, des observations similaires pouvaient être constatées. Il remarqua cependant que de l'ambre et du verre frottés s'attiraient.

Afin d'interpréter ces observations, on a attribué un paramètre extensif, la charge, aux corps ainsi frottés. Aux corps électrisés du type ambre sont attribués une charge négative, et à ceux du type verre une charge positive.

L'interprétation actuelle de ces expériences est la suivante. La matière est composée d'atomes, formés d'un noyau chargé positivement entouré d'électrons chargés négativement. **La friction entre les corps cause un transfert d'électrons**. Les corps électrisés du type ambre captent des électrons alors que ceux du type verre en cèdent.

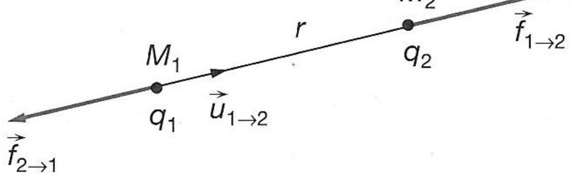
b) Propriétés de la charge :

- Conservation : la charge d'un système isolé, c'est-à-dire n'échangeant pas de matière, est constante ;
- Invariance : quel que soit le référentiel d'observation, la charge mesurée est la même ;
- Quantification : dans toutes les particules, la charge n'apparaît que par multiples de la charge élémentaire e = $1{,}602.10^{-19}$ C.
- L'unité dans le système international est le coulomb (C), égal au produit d'un ampère par une seconde.

Remarque : Les quarks, particules élémentaires composant notamment les protons et les neutrons possèdent des charges fractionnaires $\pm\frac{2}{3}e\ ou\ \pm\frac{1}{3}e$, mais apparaissent toujours groupés de telle sorte que la charge résultante soit un multiple entier de e.

c) Loi de Coulomb

Charles-Augustin Coulomb a établi en 1785 la loi d'interaction entre deux charges. Deux charges ponctuelles immobiles q_1 située en M_1 et q_2 située en M_2 exercent l'une sur l'autre une force proportionelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance r les séparant :



$$\vec{f}_{1\rightarrow 2} = -\vec{f}_{2\rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{1\rightarrow 2}$$

Où ε_0 permittivité du vide qui vaut $8,8510^{-12}$ Fm^{-1}

On retiendra que cette interaction est répulsive pour des charges de même signe, et attractive pour des charges de signes opposés. On note là une différence fondamentale avec l'interaction gravitationnelle. Cette force décroît comme le carré de la distance, similairement cette fois à la force gravitationnelle.

d) Notion de champ électrique

Afin d'expliquer la force existant entre les charges, Faraday a introduit la notion de champ. D'après Faraday, la présence de charges modifie les propriétés de l'espaces. Cette modification peut se décrire par l'apparition en tout point de l'espace d'une quantité nommée champ électrique qui est de nature vectorielle.

Sa valeur au point M à l'instant t est notée $\vec{E}$(M, t). Ce champ électrique est alors tel qu'une charge q_o, appelée charge test, immobile en M, subirait la force électrique :

$$\overrightarrow{f_e} = q_0\vec{E}(M)$$

L'unité d'un champ électrique est le volt par mètre ($V.m^{-1}$).

Le champ électrique engendré par une distribution quelconque de charges est en général complexe. Dans ce chapitre, nous allons principalement nous intéresser à des exemples de champs simples : les champs stationnaires et uniformes.

Un champ est dit stationnaire s'il est indépendant du temps et uniforme s'il est indépendant de la position.

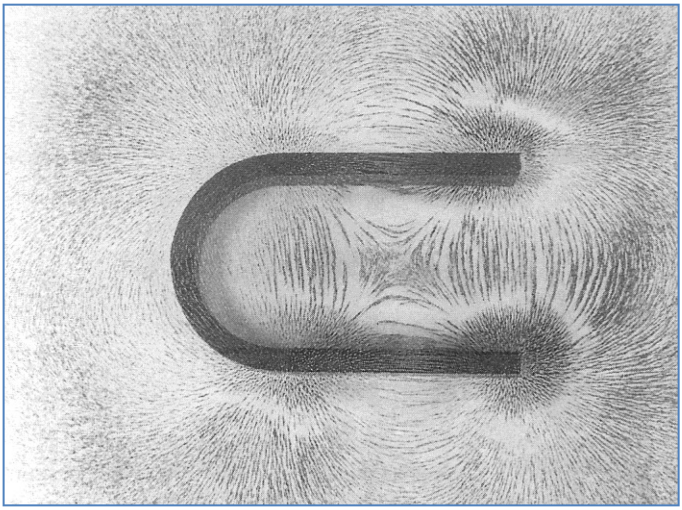
II-2) Phénomènes magnétiques

Aux environs du 6ème siècle avant notre ère, les Grecs ont observé que des échantillons de magnétite (oxyde de fer provenant de la cité de Magnésie) exerçaient des forces attractives ou répulsives entre eux.

Plus tard, vers le 11ème siècle, on remarqua qu'une aiguille de magnétite libre en rotation s'orientait selon la direction nord-sud. En 1820, Hans Œrsted observa qu'un fil parcouru par un courant électrique faisait dévier une boussole, ce qui a constitué le début de l'électromagnétisme.

L'interprétation est plus délicate qu'avec les phénomènes électriques. Comme on l'a expliqué précédemment dans le livre, un courant est un déplacement de charges. L'expérience d'Œrsted montre donc que les courants sont sources d'une déformation des propriétés de l'espace, de nature vectorielle et appelée champ magnétique. Sa valeur au point M à l'instant t est notée $\vec{B}(M,t)$.

D'un point de vue expérimental, l'existence d'un champ magnétique est mise en évidence par l'action de celui-ci sur une boussole ou sur de la limaille de fer (les petits grains de fer se comportent comme de minuscules boussoles et s'orientent selon le champ magnétique) comme sur la figure.



On peut alors s'interroger sur l'origine du champ magnétique engendré par les échantillons de magnétite malgré l'absence de courants visibles à notre échelle. Il faut en fait chercher cette origine au niveau microscopique, en liaison avec le mouvement des électrons dans les atomes.

L'unité d'un champ magnétique dans le système international est le tesla (T). Le tesla est une unité assez grande : le champ magnétique terrestre influençant les boussoles est de l'ordre de 10^{-5}T.

En 1890, Thomson a montré qu'un faisceau, identifié plus tard comme constitué d'électrons, était dévié par un champ magnétique.

Ainsi, une charge test q_o, possédant en M à l'instant t une vitesse $\vec{v}$, subit la force magnétique dont on admettra l'expression :

$$\overrightarrow{f_m} = q_0\vec{v} \wedge \vec{B}(M,t)$$

où $\vec{B}(M,t)$ est la valeur du champ magnétique en M à l'instant t.

III - Force de Lorentz

III-1) Expression

Regroupons les résultats précédents. Considérons une région de l'espace dans laquelle existent des champs électrique et magnétique. Alors, une charge q de vitesse $\vec{v}$ placée en M à l'instant t subit la force électromagnétique, appelée force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

(les champs étant évalués en M à l'instant t).

On parle parfois de partie électrique ou magnétique de la force de Lorentz, correspondant respectivement aux premier et deuxième termes de la somme intervenant dans l'expression.

III-2) Aspects énergétiques

D'un point de vue énergétique, calculons la puissance de la force de Lorentz :

$$P = \vec{f}.\vec{v} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v} + q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}$$

On reconnaît dans le dernier terme un produit mixte faisant intervenir deux fois la vitesse, celui-ci s'annule donc. Au final :

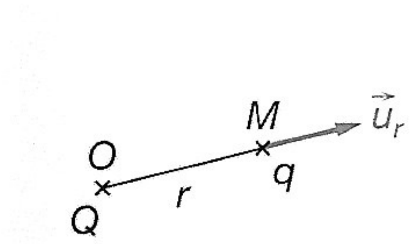
$$P = q\vec{E}.\vec{v} = \overrightarrow{f_e}.\vec{v} = P_e$$

On en déduit le résultat important suivant.

Un champ électrique peut fournir un travail moteur ou résistant à une charge, et donc modifier son énergie cinétique. En revanche, le travail d'un champ magnétique sur une charge est forcément nul. L'action d'un champ magnétique sur une charge sera en général de courber la trajectoire de la charge sans lui fournir d'énergie.

III-3) Énergie potentielle associée à un champ électrique stationnaire

a) Cas d'un champ électrique créé par une charge ponctuelle immobile



Soit une charge ponctuelle Q immobile au point O. Une autre charge ponctuelle q, située au point M subit la force :

$$\vec{f} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Vu l'expression de la force de Lorentz électrique f = q E , on déduit l'expression du champ électrique créé en M par la charge Q :

$$\overrightarrow{E(M)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

On utilise naturellement les coordonnées sphériques d'origine O pour décrire le mouvement de la charge q. Considérons un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ de la charge q :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + rsin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

On déduit le travail élémentaire δW de la force électrique subie par la charge q :

$$\delta W = \vec{f}.\overrightarrow{dOM} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -dE_p$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

En général, on considère une énergie potentielle nulle lorsque les deux charges n'interagissent pas, c'est-à-dire pour r $\to\infty$:
D'où :

$$\Rightarrow E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{k}{r} \text{ où } k = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}$$

b) Cas d'un champ électrique uniforme et stationnaire

Le champ électrique est alors noté $\vec{E} = E_o\vec{u}_x$, où E_0 est une constante. Considérons une charge ponctuelle q, située au point M. Le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ effectué par cette charge est :

$$\overrightarrow{dOM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$$

Au cours de ce déplacement, le travail élémentaire de la force de Lorentz vaut :

$$\delta W = \vec{f}.\overrightarrow{dOM} = qE_o dx = -dE_p$$

Des solutions existent, elles sont de la forme :

$$E_p(x) = -\ q\ E_0 x\ +\ C$$

Cette fois, il n'est pas possible de considérer une énergie potentielle nulle à l'infini, car le champ électrique est uniforme… y compris à l'infini ! On simplifie la relation en choisissant par exemple : $E_p(0) = 0$, d'où :

$$E_p(x) = -\ q\ E_0 x$$

c) Potentiel électrostatique

Les deux expressions des énergies potentielles obtenues sont proportion nelles à la charge q de la particule considérée. On les réécrit alors sous la forme :

$$E_p(M) = qV(M)$$

où V(M) est appelé potentiel électrostatique au point M. Il est défini à une constante additive près, tout comme l'énergie potentielle.

D'après ce qui précède :

- Une charge ponctuelle Q située en O crée le potentiel :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E_o\vec{u}_x$ correspond le potentiel :

$$V = -E_o x$$

Un potentiel s'exprime donc en volt (V) vu qu'un champ électrique a pour unité dans le système international le volt par mètre.

On remarque que le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants.

IV - Particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

IV-1) Situation générale

Afin d'étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique, il convient de préciser deux points :

- Afin de supprimer tout choc entre la particule étudiée et une molécule de l'air, les expériences menées doivent être réalisées sous un vide poussé. On supposera implicitement que ce sera le cas ;
- La force de pesanteur sera systématiquement négligée par rapport à la force de Lorentz électriqu. En effet, pour un électron de masse m = $9{,}1.10^{-31}$ kg et de charge q = $1{,}6.10^{-19}$ C,

$$\frac{f_e}{f_g} = \frac{qE}{mg} \approx 10^{10}E$$

Pour le système proton-électron le rapport vaut 10^{40}.

Ainsi, même pour de faibles champs électriques, le poids est bien négligeable devant la force électrique.

Il est alors possible de s'intéresser à la situation d'une particule de charge q et masse m située dans une zone de champ électrique stationnaire et uniforme. Étudions le système constitué de cette particule dans le référentiel terrestre.

La particule est soumise à la force de Lorentz. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \text{ soit } \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Le mouvement est donc un mouvement à vecteur accélération constant, à l'exemple de celui du tir parabolique sans frottement. La trajectoire est ainsi une parabole, dont la concavité est tournée vers la direction de q$\vec{E}$.

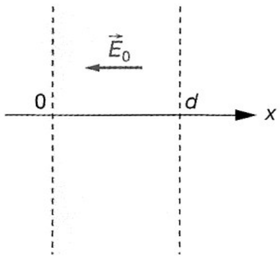
IV-2) Accélération linéaire par application d'une tension statique

Une application essentielle des champs électriques est l'accélération de particules chargées. Cela peut être dans un but :

- Médical : des rayons X sont émis par des électrons ayant été accélérés. Ces radiations sont alors utilisées pour le radiodiagnostic ou la radiothérapie ;
- Industriel : des rayonnements émis par des électrons accélérés peuvent servir à un contrôle non destructif (par exemple aux rayons X des bagages dans les aéroports), des faisceaux d'électrons accélérés provoquent l'irradiation d'aliments dans un but de stérilisation ;
- De recherche : l'accélération de particules suivie de collisions permet d'engendrera de nouvelles particules et tester les théories en physique des particules.

La technique la plus simple est l'accélérateur électrostatique, servant par exemple dans les microscopes électroniques. Dans une cavité à faible pression (ce qui permet de diminuer les collisions entre les particules accélérées et les molécules présentes dans l'air) est créé un champ électrique statique, que l'on supposera uniforme dans une région située entre les abscisses x = 0 et x = d de la forme :

$$\vec{E} = E_o\vec{u}_x$$



Une particule de charge q (par exemple un électron pour lequel q = — e) et de masse m est émise en O avec une vitesse initiale quasi nulle. Elle est alors soumise à la force de Lorentz et son mouvement est rectiligne selon la direction Ox.

Afin d'accélérer l'électron, la force exercée doit être orientée selon + $\vec{u}_x$. Il est possible d'obtenir la vitesse de la particule à la sortie de la zone d'accélération par des considérations énergétiques. Le mouvement est conservatif, donc l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_p + E_c = cste$$

On déduit la variation d'énergie cinétique entre l'entrée en x = 0 et la sortie en x = d par :

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = -q\Delta V$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2(d) - \frac{1}{2}mv^2(0) = eU$$

où $U = \Delta V = V(d) - V(0)$ est la tension accélératrice. On dit alors que la particule a été accélérée sous la tension U, et le gain en énergie cinétique est :

$$\Delta E_c = eU$$

Plus on désire accélérer une particule chargée, plus il faut appliquer une tension importante.

V - Particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme

V-1) Considérations générales

De même que pour l'étude de l'action d'un champ électrique, précisons deux points importants :

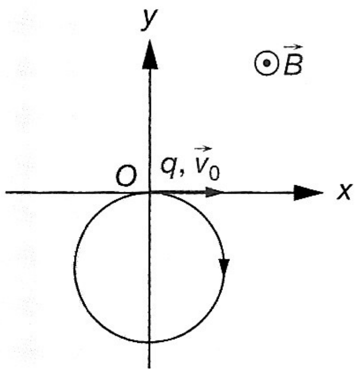
- Pour éviter tout choc entre la particule chargée étudiée et une molécule de l'air, les expériences sont réalisées sous un vide poussé ;
- Le poids de la particule chargée étudiée est considéré comme négligeable par rapport à la force de Lorentz magnétique, comme le montre le calcul d'ordres de grandeur qui suit :

$$\frac{f_m}{f_g} = \frac{qvB}{mg} \approx 10^{10} vB$$

En prenant un électron possédant une vitesse de l'ordre du mètre par seconde et un champ magnétique de l'ordre de 10^{-5} T, on obtient :

$$\frac{f_m}{f_g} = \approx 10^5$$

Un cas important en pratique est constitué d'une particule de charge q et masse m placée dans un champ magnétique uniforme et statique $\vec{B} = B_o \overrightarrow{u_z}$, où B_o est la norme du champ. La particule est située initialement au point O et sa vitesse initiale v_o est supposée être perpendiculaire au champ magnétique.



Le théorème de la puissance cinétique :
$\frac{dE_c}{dt} = 0$ montre que la norme de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement. Il reste à déterminer sa trajectoire.

V-2) Résolution en coordonnées cartésiennes

Il est toujours possible d'effectuer une rotation de la base cartésienne choisie autour de Oz afin que le vecteur $\overrightarrow{u_x}$, soit colinéaire à v_o et de supposer que la particule est initialement en O, origine du repère. On pose donc $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient :

$$m\begin{vmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{vmatrix} = q\begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\ 0\\ B_0\end{vmatrix} = q\begin{vmatrix}B_0\dot{y}\\ -B_0\dot{x}\\ 0\end{vmatrix}.$$

Cette expression mène à : $\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x}. \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

La résolution selon l'axe Oz est la plus simple : z = 0, soit z = cte et cette constante est nulle vu que la vitesse initiale est selon le vecteur $\overrightarrow{u_x}$. On déduit la constance et par conséquent la nullité de la coordonnée z :

$\Rightarrow$ z=0 : **la trajectoire est donc plane.**

L'intégration des projections sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ donne :

$$m\dot{x} = qB_0y + C_1 \ et \ m\dot{y} = -qB_0x + C_2$$

Les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0 \ et \ \dot{y}(0) = 0$ donnent :

$$m\dot{x} = qB_0y + mv_0 \ et \ m\dot{y} = -qB_0x$$

On peut alors replacer ces expressions dans les membres de droite des équations fournies par le principe fondamental de la dynamique, soit :

$$\ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{y} = -\frac{q^2B_0^2}{m^2}x$$

$$et \ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\dot{x} = -\frac{q^2{B_0}^2}{m^2}y - \frac{qB_0}{m}v_0$$

Donc :

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \text{ où } \omega_c = \frac{qB_0}{m}$$

- ω_c est appelée pulsation cyclotron. Il est alors possible de résoudre ces équations différentielles découplées. La première est celle d'un oscillateur harmonique et se résout comme :

$$x(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$$

où A et B sont des constantes.

- x(0) = 0 fournit A = 0.
- $\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_c}$.

Donc :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$$

De plus :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_0$$

$$\Rightarrow y = A'\cos(\omega_c t) + B'\sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c}$$

Or :

- $y(0) = 0 \Rightarrow A' = \frac{v_0}{\omega_c}$
- $\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow B' = 0$

Donc :

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1)$$

Si on pose $R = \frac{v_0}{\omega_c}$ on a :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{(y+R)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+R)^2 = R^2$$

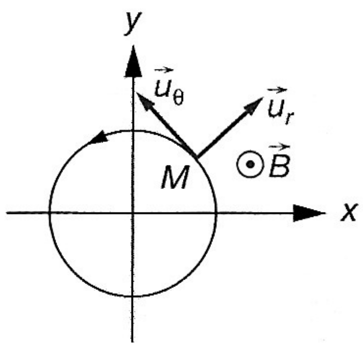
Il s'agit d'une trajectoire circulaire parcourue uniformément, c'est-à-dire avec une vitesse angulaire ω_c constante, de centre (x = 0, y = – R) et de rayon R.

Cette vitesse angulaire ne dépend que de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. Notamment, deux particules identiques mais de vitesses différentes auront des orbites circulaires de mêmes pulsation et période.

Ce mouvement est donc effectué à vitesse constante, conformément au fait que la partie magnétique de la force de Lorentz ne fournit aucun travail à la particule.

V-3) Résolution en coordonnées polaires

Admettons que la trajectoire soit un cercle perpendiculaire au champ magnétique.



Le vecteur accélération s'écrit en coordonnées polaires de centre O :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = qR\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \wedge B_0\overrightarrow{u_z} = qR\dot{\theta}B_0\overrightarrow{u_r}$$

Le principe fondamental de la dynamique donne alors :

$$qR\dot{\theta}B_0 = -mR\dot{\theta}^2 \; et \; R\ddot{\theta} = 0$$

On déduit que le cercle est parcouru uniformément à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{qB_0}{m}$

Or $R = \frac{v_0}{\dot{\theta}} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{qB_0}$

V-4) Cyclotron et Synchrotron

a) Accélérateurs à haute énergie

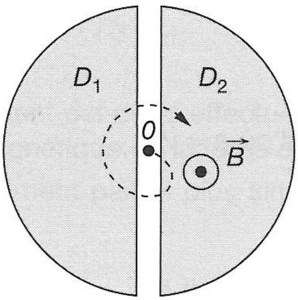
Comme cela a été expliqué précédemment, l'accélération d'une particule chargée se réalise au moyen d'un champ électrique. Néanmoins, pour atteindre des vitesses importantes, des champs électriques intenses doivent être créés sur de vastes zones de l'espace. L'accélérateur linéaire de Stanford est le plus performant au monde qui utilise ce principe. Sa longueur est de 3,2 km et il communique à des électrons ou des positrons une énergie maximale de 50 GeV.

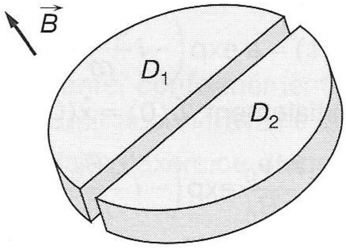
Néanmoins, les accélérateurs permettant d'obtenir les énergies les plus importantes sont à géométrie circulaire. En effet, en enroulant la trajectoire grâce à un champ magnétique, il est possible de faire passer la particule un très grand nombre de fois dans une zone accélératrice. On distingue les cyclotrons, pour lesquels les trajectoires des particules sont des spirales, des synchrotrons où les trajectoires sont circulaires. Expliquons succinctement le principe de ces accélérateurs.

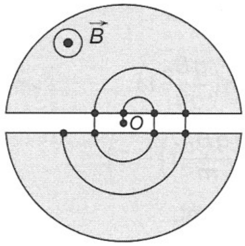
b) Cyclotron

Un cyclotron est constitué de deux boîtes semi-cylindriques (appelées « dees » en raison de leur forme D) où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire orienté selon les génératrices des cylindres. Entre ces deux dees est appliqué un champ électrique alternatif. En effet, afin d'accélérer les particules passant dans la zone inter-cylindre, le champ électrique doit être changé de sens (inversé) lors de chaque passage dans les espaces inter-cylindres. Le principe du fonctionnement repose sur le fait que la durée T mise par une particule pour effectuer un tour est indépendante de la vitesse. Par conséquent, le champ électrique doit simplement osciller à la pulsation ω_c, pour permettre l'accélération des particules. En revanche, le rayon de la trajectoire :

$R = \dfrac{m\text{v}}{qB_0}$ augmente avec la vitesse de la particule. La taille du cyclotron limite donc la vitesse maximale atteinte.







Le problème avec les cyclotrons de grande taille est la nécessité de créer un champ magnétique sur la totalité de la surface du cyclotron. En pratique, il faut de très grandes quantités de fer. Afin de pallier ce problème, on peut envisager de créer un champ magnétique uniquement sur le périmètre d'un cercle. C'est le principe d'un synchrotron.

c) Synchrotron

Un synchrotron est constitué d'un anneau comportant alternativement des zones où règne un champ magnétique $\vec{B}$ et des zones dans lesquelles un champ électrique $\vec{E}$ a été établi. Le champ électrique sert à augmenter la vitesse des particules, alors que le champ magnétique courbe les trajectoires afin de les fermer sur elles-mêmes. Le rayon de la trajectoire restant constant, l'expression du rayon :

$$R = \frac{m\mathrm{v}}{qB_0}$$

impose une augmentation de la norme du champ magnétique au fur et à mesure que les particules ont une vitesse plus importante.

Le LHC (large hadron collider) du CERN (Centre européen pour la recherche nucléaire) communique ainsi à des protons

- Des énergies de l'ordre de 7 TeV (1 TeV = 1012 eV)
- Avec une orbite circulaire d'un rayon R 13 km (tunnels creusés sous terre)

Ce qui nécessite un champ magnétique maximal de 8,3T obtenu à l'aide d'électro-aimants supraconducteurs. Des collisions entre de tels protons ont permis de mettre en évidence en juillet 2012 le boson de Higgs, particule dont l'existence a été prédite théoriquement au cours des années 1960.