XI-1 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

L'objet de ce chapitre est de définir les notions énergétiques pour la mécanique du point. On va définir le travail et la puissance d'une force puis on établira les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique en introduisant la notion de forces conservatives et d'énergie potentielle.

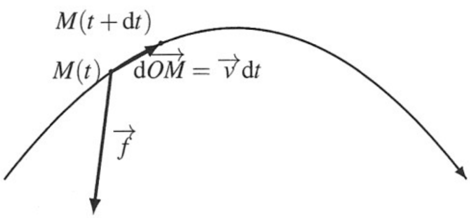
I - Travail et puissance d'une force

I-1) Introduction et notations

On étudie un point M animé d'une vitesse T dans un référentiel R. Le point M est soumis à une force $\vec{f}$. À l'instant t, le point M se trouve en M(t) ; à l'instant t + dt, il est situé en M(t + dt).

Si dt est suffisamment petit, M(t + dt) est infiniment proche de M(t) et on note $\overrightarrow{dOM}$ le déplacement infinitésimal :

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = \vec{v}dt$$



Déplacement élémentaire d'un point M.

I-2) La puissance d'une force

La puissance de la force appliquée au point matériel M animé de la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R est définie par le produit scalaire :

$$\boldsymbol{P = \vec{F}.\vec{v}}$$

Étant donné que la vitesse dépend du référentiel d'étude et que la puissance dépend de la vitesse, on en déduit que **la puissance dépend du référentiel d'étude.**

Une autre conséquence est que la puissance est une **grandeur additive**. En effet :

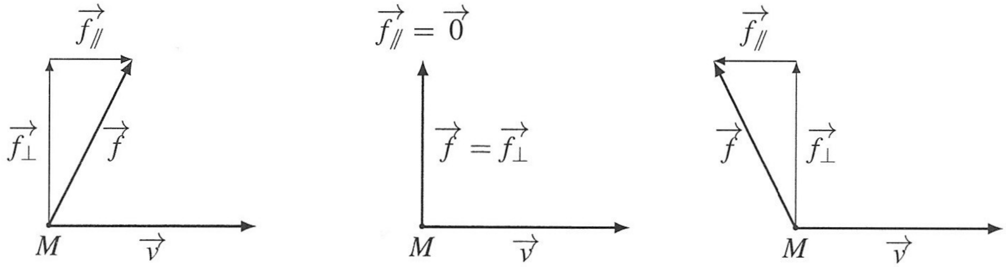
$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\vec{v} &= \left(\vec{f_1}+\vec{f_2}\right)\cdot\vec{v}\\ &= \vec{f_1}\cdot\vec{v}+\vec{f_2}\cdot\vec{v},\end{aligned}$$

est égale à la somme des puissances de chacune des deux forces :

$$\mathscr{P}(\vec{f}) = \mathscr{P}(\vec{f_1})+\mathscr{P}(\vec{f_2}).$$

Pour qualifier la puissance d'une force $\vec{f}$ on distingue trois cas :

- La puissance de $\vec{f}$ est motrice si P > O. Cela correspond au cas où la projection de la force sur la trajectoire est dans le sens du mouvement.
- La puissance de est résistante si P < O. Cela correspond au cas où la projection de la force sur la trajectoire est opposée au mouvement.
- La puissance de P est nulle si P = O. Cela correspond au cas où la force est perpendiculaire au mouvement (ou que le point M est immobile, ce qu'on n'envisage pas ici).



À gauche, la projection $\vec{f_{//}}$ de $\vec{f}$ sur $\vec{v}$ est dans le sens de $\vec{v}$, la puissance est motrice. À droite, $\vec{f_{//}}$ est de sens opposé à $\vec{v}$, la puissance est résistante. Au centre, la force $\vec{f}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$, la puissance est nulle.

I-3) Travail élémentaire d'une force

Le travail élémentaire d'une force de puissance P appliquée en un point M pendant un intervalle de temps dt est la quantité :

$$\delta W = Pdt$$

Tout comme la puissance, le travail est une grandeur additive et dépend du référentiel d'étude.

À partir de cette définition, on peut reformuler l'expression du travail élémentaire en introduisant le déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dOM}$:

$$\delta W = Pdt = \vec{f}.\vec{v}dt = \vec{f}.\overrightarrow{dOM}$$

Le travail caractérise un échange d'énergie du système avec l'extérieur par l'intermédiaire de la force $\vec{f}$. C'est une grandeur d'échange qui n'existe ni à l'instant t ni à l'instant t + dt mais seulement au cours du déplacement entre t et t + dt.

I-4) Travail d'une force au cours d'un déplacement

Au cours d'un déplacement le long d'une trajectoire AB allant de A vers B, au cours duquel le mobile M quitte A à l'instant t_A et arrive en B à l'instant $t_B > t_A$, le travail de la force $\vec{f}$ correspond à la somme des travaux élémentaires calculés sur la trajectoire AB :

$$W_{A\to B} = \int_{M\epsilon AB} \delta W$$

La notation $\int_{M\epsilon AB} \delta W$ indique que le travail doit être calculé par une intégrale curviligne en suivant la trajectoire amenant le mobile de A vers B. Le travail dépend de la force et de la manière dont on réalise le déplacement entre A et B. Le travail dépend du chemin suivi.

Avec la variable temporelle, $\delta W(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}(t)\mathrm{d}t$ puis $W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{P}(t)\mathrm{d}t$.

Avec les variables d'espace, $\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ puis $W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{M\in \overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \overrightarrow{f}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

II - Calculs de travaux

II-1 Travail d'une force constamment perpendiculaire au mouvement

On considère une force $\vec{f}$ qui reste en permanence perpendiculaire au mouvement.

Les forces de contact normales au support lorsque le support est fixe dans le référentiel d'étude rentre dans ce type de forces.

La force reste toujours perpendiculaire au mouvement, donc :

$$\delta W = Pdt = \vec{f}.\vec{v}dt = 0 \Rightarrow W_{A\to B} = 0$$

II-2) Travail d'une force constante

On considère une force $\overrightarrow{f_0}$ constante. Parmi les forces vues au chapitre précédent, le poids rentre dans cette catégorie, la force électrique également, à condition que le champ électrique soit uniforme.

On peut poser $\overrightarrow{f_0} = f_0\overrightarrow{u_z}$

On en déduit que son travail infinitésimal vaut :

$$\delta W = Pdt = \vec{f}.\vec{v}dt = f_0\dot{z}dt = f_0dz$$
$$\Rightarrow W_{A\to B} = f_0(z_B - z_A)$$

En notant z_A et z_B les coordonnées de A et B sur l'axe (Oz)

Donc le travail sur une trajectoire partant de A et revenant en A est nul. Une telle force est une force conservative.

$$W_{A\to A} = 0 \Leftrightarrow Force\ conservative$$

II-3) Travail d'une force de frottement de norme constante

On considère maintenant une force de frottement $\vec{f}$ dont seule la norme f est constante.

La force de frottement $\vec{f}$ étant opposée à la vitesse, sa puissance est toujours négative et s'exprime ainsi :

$$\delta W = Pdt = \vec{f}.\vec{v}dt = -fvdt = -fdl$$

où dl est la longueur du déplacement infinitésimal. On en déduit :

$$\Rightarrow W_{A\to B} = -fl$$

où l est la longueur du trajet AB.

Dans ce cas, le travail infinitésimal ne s'écrit pas comme une différentielle. Le travail sur une trajectoire fermée partant de A et revenant en A est strictement négatif. Une telle force est une force dissipative.

$$W_{A\rightarrow A} < 0 \Leftrightarrow Force\ dissipative$$

III - Théorème de l'énergie cinétique

III-1) Définition de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m animée d'une vitesse É dans le référentiel R est définie par la quantité scalaire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Étant donné que la vitesse dépend du référentiel d'étude et que l'énergie cinétique dépend de la vitesse, on en déduit que l'énergie cinétique dépend du référentiel d'étude.

Par ailleurs, il faut noter que l'énergie cinétique ne dépend que de la norme de la vitesse et pas de sa direction. Elle est particulièrement utile lorsque l'on veut connaître uniquement la norme de la vitesse (soit parce que la direction est connue, soit parce qu'on restreint le problème à cet aspect des choses).

III-2) Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen

a) Énoncé du théorème

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés.

- Démonstration du théorème

Il s'agit d'une conséquence du principe fondamental de la dynamique qui s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

En multipliant scalairement cette relation par la vitesse, on obtient :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \vec{f}.\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} = \vec{f}.\vec{v}\ car\ dv^2 = 2\vec{v}.d\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(E_c)}{dt} = P$$

On intègre alors cette relation par rapport au temps entre l'instant t_A où le mobile quitte A avec une vitesse v_A et l'instant t_B où il atteint B avec la vitesse v_B :

$$\int_A^B d(E_c) = \int_A^B P dt = \int_A^B \delta W$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_c = E_c(\mathrm{B}) - E_c(\mathrm{A}) = W_{A\to B}$$

Le théorème de l'énergie cinétique peut se formuler de deux manières :

- Loi de l'énergie cinétique : $\Leftrightarrow \Delta E_c = E_c(\mathrm{B}) - E_c(\mathrm{A}) = W_{A\to B}$ que l'on peut également écrire au niveau infinitésimal : $d(E_c) = \delta \mathrm{W}$
- Loi de la puissance cinétique : $\frac{d(E_c)}{dt} = P$

b) Discussion suivant le signe de $W_{A\to B}$

- Si $W_{A\to B}$> 0, le travail est moteur, l'énergie cinétique augmente donc la norme de la vitesse augmente. Le mouvement est accéléré.
- Si $W_{A\to B}$< 0, le travail est résistant, l'énergie cinétique diminue donc la norme de la vitesse diminue. Le mouvement est décéléré.
- Si $W_{A\to B}$= 0, le travail est nul, l'énergie cinétique est conservée donc la norme de la vitesse est constante. Le mouvement est uniforme.

III-3) Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique est de deux sortes :

- On déduit le travail de la somme des forces appliquées à partir de la connaissance de la variation d'énergie cinétique.
- On déduit la variation de l'énergie cinétique connaissant les travaux des forces. Cette deuxième utilisation est souvent délicate car le travail des forces s'exprime rarement de façon simple. En revanche, il est particulièrement efficace dans le cas où une expression du travail est connue.

III-4) Intérêt d'une approche énergétique

En mécanique du point, le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence du principe fondamental de la dynamique et n'introduit pas de nouveau postulat. Une approche énergétique revient implicitement à utiliser le principe fondamental de la dynamique.

En revanche, l'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique conduit par projection à trois équations scalaires tandis que le théorème de l'énergie cinétique ne fournit qu'une équation scalaire. En passant du principe fondamental de la dynamique au théorème de l'énergie cinétique, on a perdu deux équations scalaires. Dans la démonstration, cette perte a lieu lorsque l'on multiplie le principe fondamental de la dynamique par $\vec{v}$, ce qui conduit implicitement à projeter sur la trajectoire.

Lorsque l'on traite un problème dont la résolution ne concerne qu'une variable, une seule équation suffit et une méthode énergétique est appropriée. Les problèmes de ce type sont appelés problèmes à un degré de liberté. Si le problème a plus d'un degré de liberté, la seule utilisation du théorème de l'énergie cinétique ne permet pas la résolution complète du problème et on doit alors recourir au principe fondamental de la dynamique.

Une méthode énergétique est adaptée aux cas où un seul paramètre de position suffit à décrire l'évolution du système.

IV - Énergie potentielle et forces conservatives

IV-1) Définitions

On dit qu'une force dérive d'un potentiel ou encore qu'elle est conservative si son travail $W_{A\to B}$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points A et B.

On peut alors écrire le travail $W_{A\to B}$ comme la différence $E_p(A)— E_p(B)$ où Ep est une fonction de la variable de position. Au niveau élémentaire, la relation devient :

$$\delta W = -dE_p$$

On appelle alors énergie potentielle de la force cette fonction Ep.

Une force est dite conservative si on peut trouver une fonction énergie potentielle E_p telle que

$$\delta W = \vec{f}.\overrightarrow{dOM} = -dE_p$$

L'énergie potentielle est définie à partir de sa variation, elle n'est donc déterminée qu'à une constante près : si E_p est une énergie potentielle possible, Ep + K où K est une constante est également une énergie potentielle possible. On peut donc fixer une position arbitraire O pour laquelle Ep(0) = 0. Le point O est alors le point de référence de l'énergie potentielle.

- Remarque

Lors de la définition du travail, on a insisté sur le fait que le travail n'est en général pas une différentielle. C'est pour cela qu' on le note δW avec un δ plutôt qu'un d.

IV-2) Exemples de forces conservatives

a) Poids d'un corps

Le poids d'un point matériel de masse m dans le champ de pesanteur : m$\vec{g}$, soit en projection dans un système de coordonnées cartésiennes dont l'axe (Oz) est vertical et dirigé vers le haut :

$$\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$$

Donc :

$$dE_p = -\vec{f}.\overrightarrow{dOM} = \mathrm{mg}\overrightarrow{u_z}.(dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z})$$

$$\Leftrightarrow dE_p = \mathrm{mg}dz \Rightarrow E_p = mgz + C$$

où C est une constante d'intégration que l'on peut choisir de manière arbitraire.

Dans cette expression, l'axe (Oz) est dirigé selon la verticale ascendante. Il s'agit donc d'un axe des altitudes, et l'énergie potentielle augmente lorsque l'altitude augmente. On peut alors retenir la formule ci-dessus sous la forme :

Ep = mg.altitude.

Le choix arbitraire de l'altitude 0, c'est-à-dire de la référence des altitudes, correspond au choix arbitraire de la constante C.

b) Force exercée par un champ électrique uniforme

On étudie un point matériel de charge électrique q placé dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\overrightarrow{u_z}$. Il est soumis à la force $qE\overrightarrow{u_z}$

$$\Rightarrow dE_p = -\vec{f}.\overrightarrow{dOM} = qE\overrightarrow{u_z}.(dz\overrightarrow{u_z} + \cdots)$$

On déduit l'énergie potentielle correspondante :

$E_p = qEz + C$ où C est une constante.

c) Force gravitationnelle exercée par un astre ponctuel

On considère un point matériel M de masse m soumis à la force gravitationnelle exercée par un astre de centre P et de masse m_p. M est soumis à la force gravitationnelle :

$\vec{f} = -\frac{Gmm_p}{r^3}\overrightarrow{PM} = -\frac{Gmm_p}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ où r est la distance entre P et M.

$$dE_p = -\vec{f}.\overrightarrow{dOM} = \frac{Gmm_p}{r^2}\overrightarrow{u_r}\,(dr\overrightarrow{u_r} + \cdots)$$

$$\Leftrightarrow dE_p = \frac{Gmm_p}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{Gmm_p}{r} + C$$

On prend généralement comme référence des énergies potentielles : $E_p = 0\ lorsque\ r \to \infty$, ce qui revient à choisir C = 0 et on obtient :

$$E_p = -\frac{Gmm_p}{r}$$

d) Force électrique

La force coulombienne exercée par une charge ponctuelle On considère un point matériel M de charge q soumis à la force coulombienne exercée par une charge q_p placée en P. M est soumis à la force coulombienne :

$$\vec{f} = \frac{qq_p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{PM} = \frac{qq_p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

$$Donc\ E_p = \frac{qq_p}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

e) Force Newtonienne

Si on pose $k = \frac{qq_p}{4\pi\varepsilon_0} = -Gmm_p$ alors :

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r} \Rightarrow E_p = \frac{k}{r}$$

f) Force de rappel d'un élastique d'un ressort

Un ressort de raideur k ayant subi un allongement $\Delta x = x - x_0$ exerce une force de rappel élastique dans la direction de l'allongement : $\vec{f} = -k(x - x_0)\overrightarrow{u_x}$

Donc :

$$dE_p = -\vec{f}.\overrightarrow{dOM} = k(x - x_0)\overrightarrow{u_x}\,.\,(dx\overrightarrow{u_x} + \cdots)$$

$$\Leftrightarrow dE_p = -k(x - x_0)dx$$
$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + C$$
où C est une constante.

On prend généralement comme référence des énergies potentielles E_p=0 lorsque le ressort est à sa longueur à vide donc que $x - x_0 = 0$. Cela revient à choisir C = 0 et on obtient alors l'expression l'énergie potentielle élastique dont dérive la force de rappel du ressort :

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

IV-3) Exemples de forces non conservatives

On considère une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \vec{f}.\overrightarrow{dOM} = -\lambda\vec{v}.\vec{v}dt = -\lambda v^2 dt < 0$$

Donc $W_{A\to B} < 0$ *et même* $W_{A\to A} < 0$. Il s'agit d'une force dissipative. Les forces de frottement dissipant de l'énergie, on parle de forces dissipatives. On ne peut pas l'écrire sous la forme d'une différentielle : il ne s'agit donc pas d'une force conservative.

V - Énergie mécanique

V-1) Définition de l'énergie mécanique

La quantité E_m qui est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles est appelée énergie mécanique du point matériel :

$$E_m = E_c + E_p.$$

Dans cette définition, Ep est l'énergie potentielle du système, c'est-à-dire la somme des énergies potentielles des différentes forces conservatives.

V-2) Conservation de l'énergie mécanique

On considère un système soumis à un ensemble de forces. Dans le cas où ces forces sont conservatives ou ne travaillent pas, on peut écrire pour chacune des forces :

$$dE_p = -\delta W_c$$

$$Et : dE_c = \delta W = \delta W_c$$

Donc :

$$dE_p + dE_c = 0 \Leftrightarrow dE_m = 0$$

Donc :

$$E_m = cste\ si\ les\ forces\ sont\ conservatives$$

L'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas est une constante du mouvement.

Lorsque toutes les forces sont conservatives, le mouvement est qualifié de mouvement conservatif car l'énergie mécanique est conservée.

Dans le cas d'un mouvement conservatif, l'énergie mécanique est une quantité qui se conserve au cours du mouvement et qui n'est fonction que de la position et de ses dérivées premières par rapport au temps. L'énergie mécanique est alors une intégrale première du mouvement.

L'énergie mécanique est répartie sous deux formes : énergie cinétique et énergie potentielle. L'énergie potentielle peut être convertie en énergie cinétique et réciproquement, mais, pour un mouvement conservatif, la somme des deux formes d'énergie reste constante. La conservation de l'énergie mécanique et l'échange permanent entre les deux formes d'énergies ont été mis en évidence lors de l'étude de l'oscillateur harmonique.

V-3) Cas général : Non conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas général, il est nécessaire de distinguer les forces conservatives notées $\overrightarrow{f_c}$ de celles qui ne le sont pas que l'on notera $\overrightarrow{f_c}$. En notant leurs travaux respectifs W_c et W_{Nc}, on sait, d'après ce qui précède, que :

$$dE_p = -\delta W_c$$
$$Et : dE_c = \delta W = \delta W_c + \delta W_{Nc}$$

Donc :

$$dE_p + dE_c = \delta W_{Nc}$$
$$\Leftrightarrow dE_m = \delta W_{Nc}$$

Parfois ce résultat est appelé « théorème de l'énergie mécanique ».

La variation d'énergie mécanique au cours du mouvement est égale au travail des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel, autrement dit des forces non conservatives.

C'est une autre formulation du théorème de l'énergie cinétique.

Il est à noter que le problème de la conservation de l'énergie fait partie d'un cadre beaucoup plus général que celui de la mécanique. On reviendra sur ce point dans le cours de thermodynamique et plus précisément lors de l'étude du premier principe qui postule la conservation de l'énergie totale. Le résultat qui vient d'être établi sera alors généralisé.

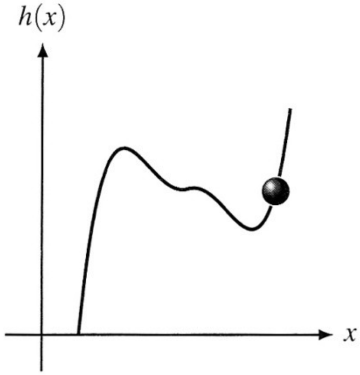
VI - Étude qualitative des mouvements et des équilibres

VI-1) Exemple introductif

On considère un jeu dans lequel une perle est enfilée sur une tige rigide formant des puits et des bosses. Le profil d'altitude de la tige est noté h(x) et la pesanteur dérive de l'énergie potentielle Ep=mgh. La courbe d'altitude h(x) est, à un facteur d'échelle près, identique à la courbe d'énergie potentielle de pesanteur. Tous ceux qui ont joué à ce jeu savent que :

- Si on lâche la perle sans vitesse initiale, elle glisse spontanément vers le fond du puits le plus proche ;
- Les positions où la perle peut rester en équilibre sont les sommets des bosses (positions instables) et les fonds des puits (positions stables) ;

- Pour pouvoir sortir la perle d'un puits, il faut lui procurer une vitesse (une énergie cinétique) de norme suffisante pour pouvoir gravir la bosse d'à côté sur son élan. Dans ce paragraphe, on va modéliser, expliquer et généraliser ces observations.



Jeu constitué d'une perle enfilée sur une tige rigide. Le profil d'altitude $h(x)$ coïncide, à un facteur d'échelle près, au profil d'énergie potentielle.

VI-2) Position du problème

Pour simplifier l'analyse, on considère que le point matériel M de masse m n'est soumis qu'à une force conservative notée qui dérive de l'énergie potentielle Ep. On suppose que le problème est paramétré par une variable d'espace cartésienne notée x. La force est alors de la forme $\vec{F} = F(x)\overrightarrow{u_x}$ et l'énergie potentielle une fonction de la variable x : $E_p(x)$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, l'énergie mécanique se conserve soit :

$$E_p + E_c = E_m = \text{cste}$$

Par ailleurs, l'énergie cinétique est une quantité positive :

$$E_c = E_m - E_p > 0$$

Ce qui entraîne que l'énergie mécanique est supérieure ou égale à l'énergie potentielle :

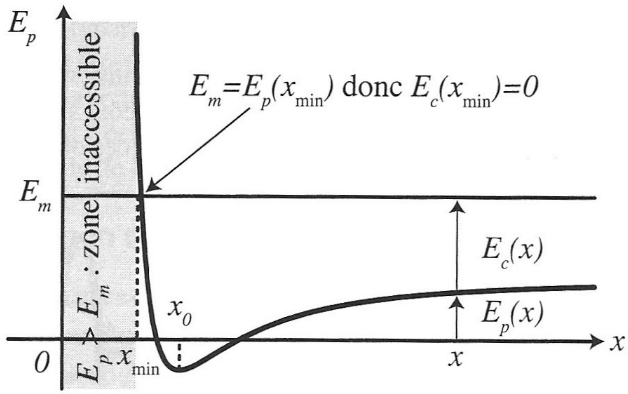
$$E_m > E_p$$

On peut généraliser cette situation au cas où toutes les forces qui travaillent sont conservatives. $\vec{F}$ est alors la résultante des forces et E_p l'énergie potentielle totale. Par ailleurs, les résultats que l'on démontre ici sont transposables au cas où la variable est une variable angulaire qui sera traitée en exercice.

VI-3) Analyse du mouvement à l'aide d'un graphe énergétique

a) Graphe

La connaissance de l'énergie potentielle Ep(x) en fonction de la variable de position x permet de distinguer les différents mouvements possibles. Pour cela, on trace le graphe de l'énergie potentielle Ep(x) et la droite horizontale d'ordonnée E_m.



Graphe d'énergie potentielle. Avec l'énergie mécanique E_m, le mobile peut atteindre l'ensemble des positions telles que $x > x_{min}$. En $x = x_{min}$, sa vitesse s'annule, en $x = x_0$, elle est maximale.

b) Positions accessibles

Graphiquement, l'inégalité $E_m > E_p$ entraîne que le mobile ne peut accéder qu'aux positions pour lesquelles la courbe d'énergie potentielle est en dessous de la droite horizontale d'ordonnée E_m.

c) Vitesse en un point

Graphiquement, l'égalité $E_m = E_p + E_c$, permet de déterminer l'énergie cinétique E_c, en un point d'abscisse x : c'est l'écart entre la droite d'ordonnée E_m, et la courbe $E_p(x)$. On en déduit la norme de la vitesse v(x) par la relation :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\left(\frac{2\left(E_m - E_p\right)}{m}\right)}$$

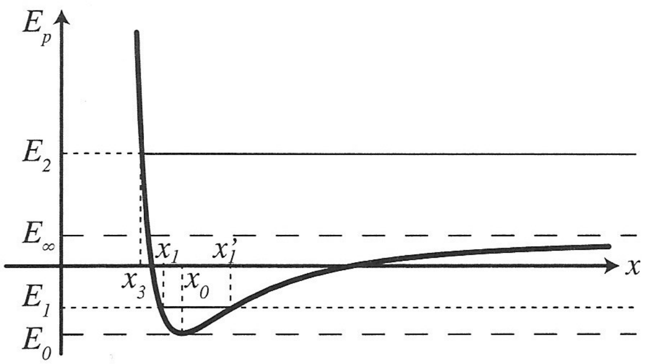
En un point où $E_p = E_m$, l'énergie cinétique est nulle. Cette position représente un point de vitesse nulle. C'est le cas en $x = x_{min}$ sur la figure.

En un point où l'énergie potentielle est minimale, l'énergie cinétique du mobile est maximale. En ce point, le mobile atteint sa vitesse maximale. C'est le cas en $x = x_o$ sur la figure.

d) Etats libres ou liés

Considérons l'énergie potentielle décrite par la figure ci-dessous : $E_p(x)$ est une fonction décroissante puis croissante de x qui admet un minimum en x_o et tend vers E_∞ lorsque $x \to \infty$. On veut établir graphiquement les différents types de mouvements que l'on peut observer suivant la valeur de l'énergie mécanique du mobile.

- Si $E_m < E_0$, alors $E_m <$ Ep quelle que soit la position. Aucun mouvement n'est possible avec une énergie mécanique aussi basse : **Etats Impossibles**.
- Si $E_m = E_0$, le point matériel ne peut être qu'en $x = x_0$ et son énergie cinétique (donc sa vitesse) est nulle. Le point matériel est en équilibre en $x = x_o$.
- Si $E_0 < E_m < E_\infty$ ($E_m = E_1$ dans l'exemple considéré) alors le point matériel ne peut évoluer qu'entre les positions x_1 et x_1'. Il reste dans une zone bornée de l'espace et ne peut pas s'en aller à l'infini. Il est dans un état lié. Lorsqu'il passe en x_o, son énergie potentielle est minimale, sa vitesse est alors maximale. En x_1 et x_1' la vitesse du mobile s'annule, il fait demi-tour et repart dans l'autre sens.
- Si $E_m > E_\infty$ ($E_m = E_2$ dans l'exemple considéré) alors le point matériel peut évoluer aux positions d'abscisses x vérifiant $x \geq x_3$. Le point matériel peut s'échapper à l'infini. Il est dans un état libre ou état de diffusion. x_3 est une position de vitesse nulle et x_o une position de vitesse maximale.



Analyse graphique des positions accessibles au mobile en fonction de son énergie mécanique.

VI-4) Analyse des équilibres à l'aide d'un graphe énergétique

a) Définitions

Un point matériel est en équilibre lorsque sa vitesse est nulle à tout instant. On en déduit que son accélération est nulle à tout instant puis, d'après le principe fondamental de la dynamique, que la somme des forces qui s'appliquent sur ce point est nulle.

En une position d'équilibre, la somme des forces qui s'appliquent au mobile est nulle : $\sum \vec{f} = \vec{0}$.
Le mobile peut rester indéfiniment en une position d'équilibre.

Quand on écarte le mobile de sa position d'équilibre,

- S'il revient vers sa position d'équilibre initiale, la position d'équilibre est stable ;
- S'il s'éloigne définitivement de sa position d'équilibre initiale, la position d'équilibre est instable.

b) Lien entre la force et l'énergie potentielle

Lorsqu'on considère uniquement la force $\vec{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$, qui dérive de l'énergie potentielle E_p (x), on a :

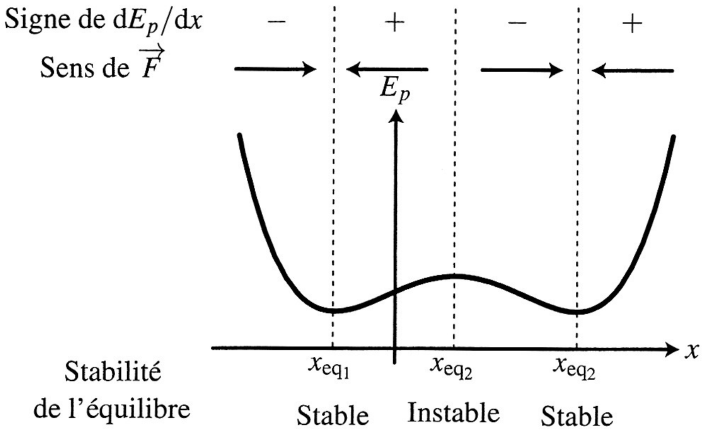
$$dE_p = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -F_x(x)\overrightarrow{u_x}.(dx\overrightarrow{u_x} + \cdots)$$
$$\Leftrightarrow dE_p = -F_x dx$$
$$\Leftrightarrow F_x(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

⇒ la force est dirigée vers les potentiels décroissants

Cette relation explique pourquoi l'on dit que la force dérive d'une énergie potentielle. Cette relation montre également que :

- Aux endroits où E_p admet une tangente horizontale, sa dérivée par rapport à x est nulle et la force également.

- Aux endroits où E_p est croissante, sa dérivée par rapport à x est positive et la force est dirigée vers les x décroissants et donc vers les énergies potentielles décroissantes,
- Aux endroits où E_p est décroissante, sa dérivée par rapport à x est négative et la force est dirigée vers les x croissants et donc vers les énergies potentielles décroissantes.



Sens de la force $\vec{F}$ en fonction des variations de l'énergie potentielle E_p.

c) Détermination énergétique des positions d'équilibre

Pour déterminer les positions pour lesquelles le point matériel est à l'équilibre, il faut chercher les positions où la force F s'annule. Cela implique que la dérivée de la fonction $E_p(x)$ s'annule et donc que la courbe représentative de $E_p(x)$ admet une tangente horizontale.

Une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle. Son abscisse x_{eq} vérifie l'équation :

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_e} = 0$$

d) Étude énergétique de la stabilité des équilibres

Pour analyser la stabilité de la position d'équilibre d'abscisse x_{eq}, il faut déterminer si, au voisinage de x_{eq}, la résultante des forces est dirigée vers x_{eq} ou non.

On se place alors au voisinage de x_{eq} en un point d'abscisse $x = x_{eq} + dx$. La force est dirigée vers les énergies potentielles décroissantes donc :

- Si x_{eq} est un minimum d'énergie potentielle, la force tend à ramener le mobile vers x_{eq} qui est donc une position d'équilibre stable (positions x_{eq1} et x_{eq3} de la figure).
- Ss xeq est un maximum d'énergie potentielle, F tend à éloigner le mobile de x_{eq} qui est donc une position d'équilibre instable (positions x_{eq2} de la figure).

Lorsque la fonction E_p est deux fois dérivable et que sa dérivée seconde ne s'annule pas en x_{eq}, on peut exprimer la force au voisinage de x_{eq}. Pour cela, on utilise un développement de Taylor de la fonction $F_x(x)$:

$$F_x\left(x_{eq} + dx\right) = F_x\left(x_{eq}\right) + \left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x_{eq}} dx = \left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x_{eq}} dx$$

car x_{eq} est une position d'équilibre donc $F_x(x_{eq}) = 0$.

Or : $F_x(x) = -\frac{dE_p}{dx}$

Donc :

$$dF_x = F_x\left(x_{eq} + dx\right) = -\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}} dx$$

Si on exerce un déplacement dx > 0, il faut que dF_x< 0 pour ramener le point vers sa position initiale. Cela impose donc :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}} > 0$$

De même, si on exerce un déplacement dx < 0, il faut que dF_x > 0 pour ramener le point vers sa position initiale et on retrouve le même résultat.

La position d'équilibre x_{eq} est stable si l'énergie potentielle est minimale en x_{eq}. Cela se traduit généralement par :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}} > 0$$

La position d'équilibre x_{eq} est instable dans les autres cas.

VI-4) Petits mouvements autour d'un équilibre stable

a) Equilibre stable ou instable

Considérons à nouveau un point matériel mobile seulement sur l'axe Ox et en mouvement conservatif. Soit x_{eq} une position d'équilibre. Alors, au voisinage de cette position, on peut écrire :

$$F_x(x) = F_x\left(x_{eq} + dx\right) = -\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}} dx$$

En posant : $k = \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}}$ et en appliquant le PFD on a :

$$m\ddot{x} = -kdx = -k(x - x_{eq})$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{X} + \mathrm{kX} = 0 \text{ où } \mathrm{X} = \mathrm{x} - \mathrm{x_{eq}}$$

La solution de cette équation, et par conséquent la nature de la trajectoire du point, dépend du signe de k, c'est-à-dire de la dérivée seconde de l'énergie potentielle au point d'équilibre étudié :

- Si k >0, on reconnaît l'équation différentielle régissant un oscillateur harmonique. Les solutions de l'équation différentielle sont, en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$X(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$$

$\Rightarrow$ le mobile oscille autour de la position d'équilibre et l'équilibre est stable

- Si k < 0, les solutions de l'équation différentielle sont, en posant $\alpha^2 = -\frac{k}{m}$:

$$X(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

En général (si A ≠ 0), elles divergent et le mobile s'éloigne irrémédiablement de la position d'équilibre : l'équilibre est instable.

b) Modèle de l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ne décrit donc pas seulement les systèmes comprenant une masse attachée à un ressort, mais **modélise aussi le comportement d'une multitude de systèmes physiques au voisinage d'une position d'équilibre**. Citons quelques exemples :

- Dans la molécule HCl, l'atome de chlore est bien plus lourd que l'atome d'hydrogène, il peut être considéré comme quasiment immobile. Les interactions entre les deux atomes sont de nature électrique, et leur expression précise est complexe. Il est possible de décrire de manière simple les effets de cette interaction en remarquant qu'à l'équilibre, une certaine distance sépare les atomes. Lorsque la molécule est excitée, l'atome d'hydrogène vibre autour de cette position d'équilibre et son mouvement est harmonique (sinusoïdal) en première approximation. Le système se comporte donc comme un oscillateur harmonique ;

- Dans un modèle simple d'atome d'hydrogène, l'électron est en orbite circulaire uniforme autour du proton. Les projections de son mouvement sur deux axes sont alors oscillantes. Il est possible de les modéliser par un oscillateur harmonique ;
- Dans un solide cristallisé, les atomes occupent à l'équilibre des positions bien précises. Si un atome se déplace un peu de sa position d'équilibre, l'interaction avec les autres atomes du solide a tendance à le ramener vers la position d'équilibre et est donc similaire à une force de rappel élastique en première approximation. Néanmoins, la situation est un peu plus complexe ici. Lorsqu'un atome se déplace, il a de plus tendance à mettre ses voisins en mouvement. Un solide peut alors se modéliser par des oscillateurs dits couplés.

c) Effets non linéaires

Il est donc possible, en première approximation, de réduire le mouvement d'un point matériel au voisinage d'une position d'équilibre x_{eq} à celui d'un oscillateur harmonique.

On a réalisé là une linéarisation en transformant un profil de force quelconque f(x) en une force du type $-k(x - x_{eq})$.

Le pas suivant dans la modélisation est de s'intéresser à un développement limité poussé à un ordre supérieur :

$$F_x(x) = F_x\left(x_{eq} + dx\right) = F_x\left(x_{eq}\right) + \left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x_{eq}} dx + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}} (dx)^2$$

$$\Leftrightarrow F_x(x) = F_x\left(x_{eq} + dx\right) = -k\left(x - x_{eq}\right) - \mathrm{k}'(\mathrm{x} - \mathrm{x_{eq}})^2.$$

D'où : $m\ddot{X} + \mathrm{kX} + \mathrm{k'X^2} = 0$ où $\mathrm{X} = \mathrm{x} - \mathrm{x_{eq}}$

Un nouveau terme non linéaire (quadratique) perturbatif apparaît. Ses conséquences principales sont :

- le non-isochronisme des solutions : des oscillations d'amplitudes différentes possèdent des périodes différentes
- Un déplacement moyen de la position du mobile. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, la position moyenne correspond à la position d'équilibre vu la symétrie du potentiel. Avec l'apparition de ce nouveau terme, les positions moyenne et d'équilibre sont différentes.

VII - Portraits de phase et lien avec le profil d'énergie potentielle

VII-1) Exemple introductif

a) Position du problème

On considère un mobile M de masse m soumis à la seule force conservative $\vec{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$ tracée sur la figure.

Comme la seule force qui travaille est conservative, le théorème de l'énergie cinétique implique que l'énergie mécanique du système est conservée.

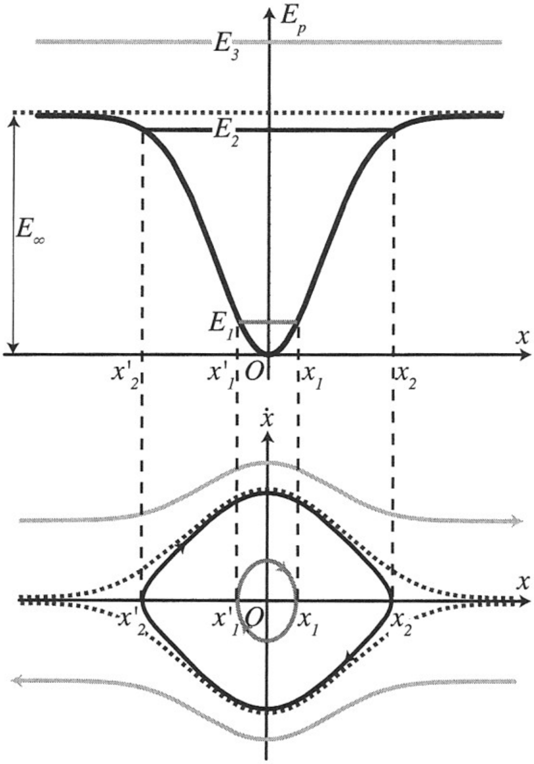
Il s'en suit que l'on peut déterminer v en fonction x à partir de l'expression de l'énergie potentielle E_p (x) et de la valeur de l'énergie mécanique E_m, grâce à la relation :

$$v^2 = \frac{2E_c}{m} = \frac{2\left(E_m - E_p\right)}{m}$$

qui admet deux solutions de signes opposés :

$$v = \pm\sqrt{\frac{2\left(E_m - E_p\right)}{m}}$$

On peut alors tracer une trajectoire de phase point par point en fixant une valeur pour E_m, et en relevant la valeur de $E_p(x)$ sur le profil d'énergie potentielle.



Energie potentielle et portrait de phase. Exemple d'un puits de potentiel de profondeur E_0.

b) Observation du portrait de phase

On a tracé sur la figure un exemple de profil d'énergie potentielle et le portrait de phase associé. L'énergie potentielle $E_p(x)$ est une fonction décroissante puis croissante de x qui admet un minimum en O. Sa courbe représentative dessine une « cuvette » dont les bords ont une hauteur E_∞. Elle forme un puits de potentiel de profondeur E_∞. L'origine de l'axe (Ox), ainsi que la référence d'énergie potentielle sont choisies arbitrairement au minimum d'énergie potentielle. Sur cette courbe d'énergie potentielle, on a fait apparaître trois niveaux d'énergie mécanique E_1, E_2 et E_3 et tracé sur le graphe du dessous les trajectoires de phase associées.

c) Analyse des différents mouvements possibles

- Dans tous les cas, on observe que la norme de la vitesse augmente quand le mobile s'approche du fond du puits puis diminue quand il s'en éloigne. Elle est maximale au fond du puits.
- Pour l'énergie mécanique E_1 «E_∞, ou $E_2 < E_\infty$, le mobile est piégé dans le puits de potentiel. Il est dans un état lié et suit un mouvement périodique. Sa trajectoire de phase est une courbe fermée décrite dans le sens horaire. Lorsque le mobile passe par le minimum d'énergie potentielle, sa vitesse est maximale. La trajectoire de phase admet alors une tangente horizontale.
- Pour $E_m = E_1$, la vitesse du mobile s'annule en x_1 et x_1'. La trajectoire de phase coupe l'axe des abscisses en x_1 et x_1'. Le mobile réalise des oscillations de faible amplitude autour de sa position d'équilibre. On démontrera qu'on peut assimiler ces oscillations à des oscillations harmoniques et la trajectoire de phase à une ellipse.
- Pour $E_m = E_2$, la vitesse du mobile s'annule en x_2 et x'_2. La trajectoire de phase coupe l'axe des abscisses en x_2 et x'_2. Le mobile réalise des oscillations de grande amplitude qui ne sont pas harmoniques. Sa trajectoire de phase change de forme. **Ce changement de forme est une preuve de la non-linéarité du problème**.

- Pour l'énergie mécanique $E_3 > E_\infty$ le mobile est libre de sortir du puits de potentiel. Il est dans un état de diffusion. Deux trajectoires de phase ouvertes sont possibles selon le signe de la vitesse : une trajectoire parcourue de gauche à droite située dans le demi-plan supérieur qui correspond à $v > 0$ et une trajectoire parcourue de droite à gauche située dans le demi-plan inférieur qui correspond à $v < 0$.

VII-3) Caractéristiques principales des portraits de phase

Dans ce paragraphe, on cherche les caractéristiques principales des portraits de phase à partir de l'exemple ci-dessus et on les justifie brièvement.

a) Les trajectoires de phases sont parcourues de gauche à droite dans le demi-plan supérieur et de droite à gauche dans le demi-plan inférieur.

- Dans le demi-plan supérieur $v > 0$ donc x est croissante et évolue de gauche à droite.
- Dans le demi-plan inférieur, $v < 0$ donc x est décroissante et évolue de droite à gauche.

b) Les mouvements périodiques correspondent à des trajectoires de phase fermées décrites dans le sens horaire.

Si le mouvement du mobile est périodique, il retrouve la même position et la même vitesse après une période donc le même point du plan de phase. D'après le point (a), elles sont décrites dans le sens horaire.

c) Les trajectoires de phases ne se croisent pas.

Ceci se démontre par l'absurde en supposant que deux trajectoires se croisent en P_0. P_0 représente une condition initiale pour l'évolution du système. Si deux trajectoires de phases passent par P_o, c'est qu'une même condition initiale peut conduire à deux mouvements différents. C'est incompatible avec le déterminisme classique.

d) Une trajectoire de phase coupe généralement l'axe (Ox) selon la verticale.

selon la verticale. En effet, la tangente à la trajectoire de phase en un point (x,v) peut être définie comme la droite passant par ce point et faisant un angle α avec l'axe Ox tel que :

$$\tan \alpha = \frac{dv}{dx} = \frac{dv/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{v}}{v} =$$

Sur l'axe (Ox), la vitesse v est nulle. Dans le cas général, l'accélération $a=\dot{v}$ est non nulle, donc $\tan(\alpha)\to\infty$ et $\alpha\to\pm\pi/2$

On peut noter que les positions d'équilibres pour lesquelles $\dot{v} = 0$ sont des exceptions à cette règle.

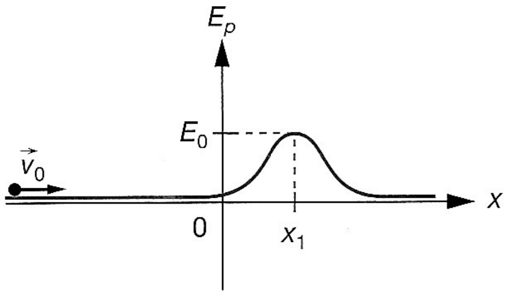
e) Les positions d'équilibres stables sont entourées de trajectoires de phase elliptiques.

On a vu que les trajectoires de phases d'un oscillateur harmonique sont des ellipses. On a démontré que les mouvements de faible amplitude au voisinage d'une position d'équilibre stable sont des mouvements harmoniques.

VIII – Barrière de potentiel

VIII-1) Position du problème

Considérons l'énergie potentielle tracée sur la figure :



Ce cas peut correspondre à une bille glissant sans frottement sur un sol dont la topographie serait la suivante : altitude nulle pour x 0, et puis grimpant jusqu'à une altitude maximale en x_1 avant de revenir à l'altitude nulle. Le point provient de la partie plate de gauche avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_o} = v_0\overrightarrow{u_x}$.

VIII-2) Condition de franchissement

Deux cas sont possibles :

- Si $E_m < E_o$, la bille ne parvient pas jusqu'en x_1 et rebrousse chemin. L'énergie mécanique peut être évaluée dans la partie x < 0 :

$$E_m = \frac{1}{2}m{v_0}^2 < E_0$$

La condition sur la vitesse pour que la bille effectue un demi-tour est donc : $v_0 < \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$;

- Si $E_m > E_o$, la bille arrive en x_1 avec une vitesse non nulle. Elle franchit donc la « montagne » en x_1 et accède à la zone $x > x_1$;
- Si $E_m = E_0$, la bille finit en théorie par s'immobiliser en x_1, équilibre instable. Ce cas est peu intéressant en pratique : le mobile finit en pratique par basculer d'un côté ou de l'autre.

VIII-3) Effet tunnel

Cette situation où deux régions de l'espace sont séparées par une région de haute énergie potentielle se nomme une barrière de potentiel. La particule parvient ou ne parvient pas à la franchir selon son énergie.

L'analogue quantique de cette situation est très différent. Même si la particule ne possède pas l'énergie suffisante pour passer la barrière, il existe une certaine probabilité qu'elle réussisse à la franchir : c'est l'effet tunnel.