X-1 Loi de la quantité de mouvement

I – Eléments cinétiques d'un point matériel

I-1) Masse

D'un point de vue cinématique, un point matériel est décrit à l'aide des vecteurs position, vitesse et accélération. Cependant quelques exemples de la vie courante mettent en évidence que le comportement d'un corps ne dépend pas uniquement de ces paramètres cinématiques. Ainsi un joueur de ping-pong sera dans l'impossibilité de renvoyer la balle si celle-ci est remplacée par une boule de billard. De même, si un enfant joue avec des boules de pétanque, il ne pourra pas lancer celles-ci très loin. *Il est donc nécessaire d'introduire une grandeur physique mesurant la capacité du corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imposer. Cette propriété s'appelle l'inertie du système.*

La grandeur introduite est fondamentale au niveau dynamique et s'appelle masse inerte ou masse inertielle du corps. Il s'agit d'un scalaire positif qui est d'autant plus grand que le corps s'oppose au mouvement. Son unité légale est le kilogramme, de symbole kg. On constate expérimentalement que cette grandeur est proportionnelle à la quantité de matière composant le corps.

C'est une grandeur additive, c'est-à-dire que la masse de l'ensemble formé par deux corps est égale à la somme des masses de chacun d'entre eux.

La mesure de cette grandeur s'obtient en pratique à l'aide d'une balance en utilisant la mesure du poids du corps : P=mg où m est alors la masse pesante. Plusieurs problèmes apparaissent avec cette méthode. Tout d'abord, le champ de pesanteur g varie à la surface de la Terre. Il est donc a priori nécessaire d'effectuer des réglages à chaque déplacement de la balance grâce à une référence. Le deuxième point est l'hypothèse selon laquelle masse inertielle et masse pesante (celle qui apparaît dans l'expression du poids) ne sont qu'une seule et même grandeur. Cette égalité, posée en principe appelé « principe d'équivalence » est vérifiée expérimentalement avec une précision relative de 10^{-12}. Par conséquent, on ne fera pas de différence entre masse inerte et masse pesante.

Remarque :

La référence universelle de masse est un étalon cylindrique de platine iridié conservé au Pavillon de Breteuil au sein du Bureau International des Poids et Mesures. À l'heure actuelle, la masse est la dernière grandeur dont l'unité est définie par un étalon.

La grandeur qui mesure la capacité d'un corps à résister à la mise en mouvement est sa masse mesurée en kg. La masse est un scalaire d'autant plus grand que le corps est inerte. C'est une grandeur extensive (additive) et intrinsèque (liée uniquement au corps considéré).

I-2) Quantité de mouvement

a) Quantité de mouvement d'un point matériel

La quantité de mouvement est une grandeur introduite par Isaac Newton pour formuler les lois de la mécanique portant son nom. Elle est définie par le vecteur :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

pour un point M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel R. Contrairement à la masse, cette quantité dépend du référentiel dans lequel on travaille puisqu' elle est fonction de la vitesse dans ce référentiel.

b) Quantité de mouvement d'un système de points matériel

Lorsque le système est constitué de plusieurs points matériels, on peut définir sa quantité de mouvement comme la somme des quantités de mouvement de chacun des points qui le constituent. Pour fixer les idées, on se place dans le cas où le système est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 et de vitesses respectives $\overrightarrow{v_1}\ et\ \overrightarrow{v_2}$ dans le référentiel R. La quantité de mouvement $\vec{p}$ du système est définie comme la somme des quantités de mouvement de chacun des deux points :

$$\vec{p} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\,\overrightarrow{v_2}$$

La position du centre de gravité G du système de point est définie par la relation barycentrique :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\,\overrightarrow{OM_2}$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m_1\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + m_2\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\vec{v}_G = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\,\overrightarrow{v_2}$$

$$\text{Donc} : \vec{p} = m\vec{v}_G \text{ où } m = m_1 + m_2$$

Il s'agit d'un résultat général, qui reste vrai pour un système constitué de plus de deux points matériels et par exemple pour un solide de masse m. On peut alors revenir sur notre définition initiale du point matériel en mécanique : on peut assimiler un solide à un point matériel s'il suffit d'étudier le mouvement de son centre de gravité pour comprendre son mouvement.

II - Les lois de Newton

II-1) Première loi de Newton : Principe d'inertie

a) Point matériel isolé

Un point matériel est isolé s'il n'est soumis à aucune interaction avec l'extérieur.

Il s'agit d'un cas limite utilisé en mécanique. En pratique, un point matériel est considéré comme isolé lorsque l'on peut négliger les forces auxquelles il est soumis.

Exemple :

Les sondes Pionneer 10 et 11 et Voyager 1 et 2 qui se dirigent vers les confins du système solaire sont approximativement des systèmes isolés.

b) Énoncé du principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés référentiels galiléens dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Le principe d'inertie formule l'existence de référentiels particuliers, les référentiels galiléens, dont il fournit une définition à partir du mouvement des points matériels isolés. On constate la différence essentielle apportée par la dynamique vis-à-vis de la cinématique : les référentiels ne jouent plus tous le même rôle.

Cependant, si l'on considère deux référentiels R_1 et R_2 en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre, tout point matériel animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à R_1 sera également en translation rectiligne et uniforme par rapport à R_2. Lorsque l'un est galiléen alors l'autre l'est également.

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

c) Exemples de référentiel galiléen

Tout comme la notion de point isolé, à partir duquel elle est définie, la notion de référentiel galiléen est un cas limite. En pratique, on utilise principalement trois référentiels en fonction de la durée du phénomène étudié :

- **Le référentiel terrestre** ou référentiel du laboratoire est lié à la Terre. Son origine est située au point de la surface du globe où se déroule l'expérience et ses axes sont fixes par rapport à la Terre. **Il est considéré comme galiléen lorsque l'on peut négliger la rotation de la Terre autour de l' axe des ses pôles.** Il est adapté à l' étude des mouvements se déroulant sur Terre et dont la durée est faible devant la durée d'un jour ;
- **Le référentiel géocentrique** a son origine au centre de la Terre et des axes pointant vers des étoiles lointaines fixes. Dans ce

référentiel, la Terre tourne sur elle-même autour de l'axe de ses pôles. **Il est considéré comme galiléen lorsque l'on peut négliger le mouvement orbital de la Terre dont la durée caractéristique est un an**. Il est adapté à l'étude du mouvement des satellites autour de la Terre.

- **Le référentiel héliocentrique** a son origine au centre du Soleil et des axes pointant vers des étoiles lointaines fixes. Il est considéré comme galiléen tant que l'on peut négliger le mouvement orbital du Soleil autour du centre de notre galaxie, la Voie lactée, dont la durée caractéristique est estimée à environ 230 millions d'années. Il est adapté à l' étude du mouvement des planètes autour du Soleil.

II-2) Deuxième loi de Newton

a) Notion de force

Un système peut être mis en mouvement ou, s'il est déjà en mouvement, ce dernier peut être modifié. Les causes de cette « modification » doivent être recherchées dans ses interactions avec l'extérieur. Cela conduit à définir la notion de forces.

Une force est une grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou de produire un mouvement ou une déformation du système.

La force est décrite par un vecteur ; le caractère vectoriel de la force apparaît dans des expériences simples. Par exemple, lorsque l'on tire sur un ressort, on constate que ce dernier s'allonge le long d'une direction et dans un sens qui sont ceux de l'effort ou de la force qu'on exerce sur lui. Son allongement est d'autant plus grand que la force est importante. Trois paramètres : direction, sens et intensité interviennent pour déterminer l'action exercée sur le ressort. Un vecteur défini par ces trois mêmes paramètres décrit la force. Il faudra donc donner la direction, le sens et la norme d'une force pour la connaître parfaitement.

On distingue deux grandes catégories de forces : les forces à distance et les forces de contact. On abordera plus tard en détail ces deux types d'interactions.

b) Le principe fondamental de la dynamique

Ayant admis l'existence d'un référentiel galiléen et de forces caractérisant les interactions du système avec l'extérieur, on se place dans ce référentiel et on modélise les effets des forces extérieures sur le système.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système. Mathématiquement, cela se traduit par la relation :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$$

Le principe fondamental de la dynamique est également appelé « relation fondamentale de la dynamique» ou « théorème de la quantité de mouvement ».

c) Cas particuliers

i. Systèmes pseudo-isolés

Les systèmes pseudo-isolés sont définis comme les systèmes pour lesquels la somme des forces extérieures appliquées est nulle : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$

Pour de tels systèmes, le principe fondamental de la dynamique montre que la quantité de mouvement, et donc la vitesse sont constantes au cours du temps. Ces systèmes sont animés d'un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.

ii. système à masse constante

Dans ce cas, il est possible de « sortir» la masse de la dérivée de la quantité de mouvement puisqu'il s'agit d'une constante :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{f_i}$$

Il faut se méfier de cette formulation qui ne s'applique qu'aux systèmes de masse constante. Le cas d'une fusée qui consomme du carburant et voit sa masse diminuer ou encore celui d'une goutte d'eau qui tombe dans une atmosphère contenant de la vapeur d'eau et grossit au cours du mouvement ne peuvent pas être traités avec cette relation.

iii. Système à l'équilibre

Un système est en équilibre si sa position n'évolue pas au cours du temps. Donc $\vec{p} = \vec{0}$.

D'où le principe fondamental de la statique :

$$\sum_i \vec{f_i} = \vec{0}$$

II-3) Troisième loi de Newton

a) Énoncé du principe des actions réciproques

Ce principe, qui constitue la troisième loi de Newton, est également appelé « principe de l'action et de la réaction ».

Si le milieu extérieur exerce la force $\vec{f}_{ext \to M}$ sur M, alors M exerce la force $\vec{f}_{M \to ext}$ sur le milieu extérieur telle que $\vec{f}_{M \to ext} = -\vec{f}_{ext \to M}$.

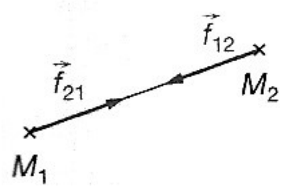
Les actions de M sur l'extérieur et de l'extérieur sur M sont opposées donc de même norme et de sens différents.

Exemple : Lorsque l'on réalise un coup au tennis, les cordes de la raquette appliquent une force sur la balle pour la mettre en mouvement. Par réaction, la balle applique une force sur les cordes. À la longue, ces forces provoquent l'usure des cordes qui finissent par casser.

b) Cas des points matériels

Le problème présentant une symétrie d'axe M_1M_2 :

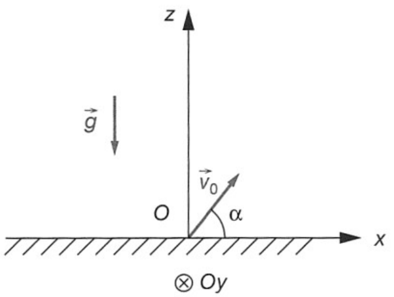
- Les forces sont opposées sur l'axe M_1M_2.



III - Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

III-1) Étude sans frottement : mouvement parabolique

Une masse ponctuelle m est lancée en l'air avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$. On désire obtenir la trajectoire de cette masse, évidemment choisie comme système. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre, supposé galiléen. Vu la généralité du problème, des coordonnées cartésiennes sont choisies, le point O étant la position initiale de la masse.



La masse est soumise au champ de pesanteur terrestre g, et la force associée est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$. Dans un premier temps, supposons que ce soit la seule force.

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$$

Le mouvement de chute libre est donc un mouvement à vecteur accélération constant, comme étudié au chapitre précédent. La trajectoire est ainsi une parabole.

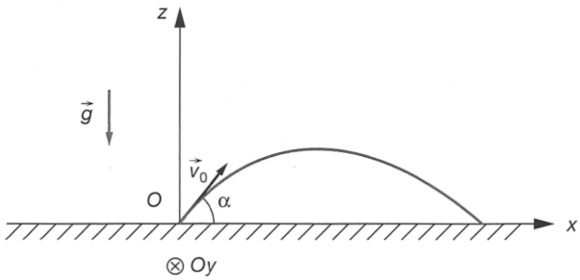
Soit : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \Rightarrow \vec{v} = \vec{g}t + \overrightarrow{v_0} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \overrightarrow{v_0}\mathrm{t} + \overrightarrow{OM}_0$

Or :
$\overrightarrow{OM}_0 = \vec{0}\ et\ \overrightarrow{v_0} = v_0\sin(\alpha)\overrightarrow{u_z} + v_0\cos(\alpha)\overrightarrow{u_x}$
Alors : $\overrightarrow{OM} = v_0\cos(\alpha)\mathrm{t}\overrightarrow{u_x} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\mathrm{t}\right)\overrightarrow{u_z}$

$$Donc : x = v_0\cos(\alpha)\mathrm{t}\ \text{et}\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\mathrm{t}$$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)}gx^2 + v_0\tan(\alpha)\mathrm{x}$

Comme attendu, la trajectoire est parabolique, avec la concavité de la parabole tournée vers le bas (Fig. 8).



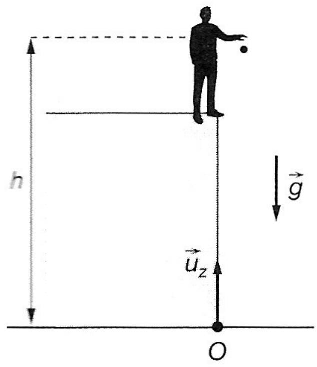
III-2) Chute verticale avec frottements fluides

a) Modélisation

La trajectoire parabolique obtenue au paragraphe précédent est une bonne approximation de ce qui est couramment observé. Il est cependant possible d'améliorer la modélisation en ajoutant une force de frottement exercée par l'air. La possibilité la plus simple, dans le cadre des vitesses pas trop élevées, est de considérer une force de frottement proportionnelle à la vitesse, on parle alors de frottement fluide :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}$$

Où λ est une constante, dite constante de frottement fluide. Le signe moins signifie que la force de frottement est opposée à la vitesse de la balle.



Le mouvement étudié est la balle lâchée d'une hauteur h, sans vitesse initiale. La trajectoire sera alors verticale, mais on aimerait connaître l'évolution de la vitesse au cours du temps. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la balle dans le référentiel terrestre galiléen donne, en considérant le poids et la force de frottement fluide :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \lambda \vec{v}$$

La projection sur le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est la seule qui donne des informations :

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \lambda v$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \text{ où } \tau = \frac{m}{\lambda}$$

Il faut faire très attention aux expressions des vecteurs : ici, on a pris $\vec{g} = -\ g\overrightarrow{u_z}\ et\ \vec{v}\ =\ v\overrightarrow{u_z}$. La quantité v est la projection de la vitesse sur le vecteur $\overrightarrow{u_z}$, cette quantité sera donc négative.

b) Résolution des équations dynamiques

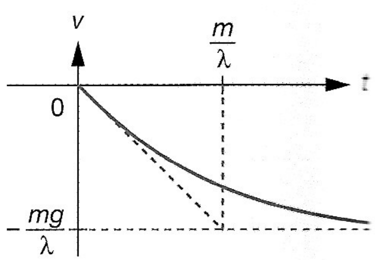
Le principe fondamental de la dynamique mène immanquablement à une ou des équations différentielles. Une équation du type de (1) a déjà été rencontrée en électrocinétique, pour les circuits linéaires du premier ordre. Rappelons le principe de sa résolution.

La solution est la somme de :

- La solution dite homogène de l'équation sans second membre:
$$\frac{dv_h}{dt} + \frac{v_h}{\tau} = 0 \Rightarrow v_h = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$
- Une solution particulière de l'équation, choisie ici comme une constante : $v_p = -g\tau$

D'où $v = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau \text{ où } v(0) = 0 \Rightarrow v = -g\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

L'allure de la projection de la vitesse v(t) est tracée sur la figure.



Évidemment, v(t) est négative : la balle tombe vers le bas ! Deux points sont à souligner :

- la vitesse finit par atteindre la valeur limite :

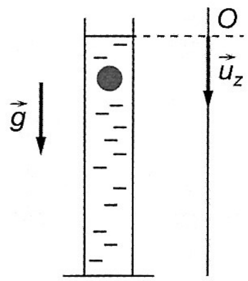
$$v_{lim} = -g\,\tau = -g\,\frac{m}{\lambda} \Rightarrow v = v_{lim}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Les frottements empêchent la balle d'atteindre une vitesse arbitrairement grande car ils deviennent alors de plus en plus importants. Il est à noter qu'on aurait pu trouver cette valeur limite sans résoudre l'équation différentielle. La présence de frottements augmentant avec la vitesse suggère que celle-ci finit par se stabiliser (avec par conséquent une dérivée nulle), donc v(t) tend vers 0 quand le temps augmente suffisamment. Alors, l'équation (1) se réduit à :
$0 + \frac{v}{\tau} = -g$ ce qui redonne bien l'expression de la vitesse limite ;

- La durée nécessaire pour atteindre cette vitesse limite est de l'ordre de τ. En effet, τ est bien un temps comme on le constate dans l'équation (2) : l'exponentielle ne peut pas posséder un argument dimensionné, donc t/τ est sans dimension. On dit que τ est typiquement le temps mis par la balle pour atteindre sa vitesse limite, c'est-à-dire la durée du régime transitoire pendant lequel la vitesse varie. Rappelons le critère des 5 % : après une durée de 3τ, la balle aura atteint une vitesse au moins égale à 95 % de sa valeur finale. La quantité τ peut être visualisée sur la courbe d'évolution de la vitesse grâce à la tangente à l'origine.

III-3) Mesure d'un coefficient de frottement fluide

Une bille en acier (de masse volumique ρ_a= 7900 kg.m^{-3}) de rayon R=5mm tombe dans de la glycérine de masse volumique ρ_g=1260kg.m^{-3}.



La bille est soumise à :

- la poussée d'Archimède exercée par la glycérine.
- Son poids
- Une force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R\,\vec{v}$, où η est une constante, appelée viscosité (dynamique) de la glycérine.

Calcul de la vitesse limite :

$$Soit : \ m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - M\vec{g} - \lambda\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(1 - \frac{M}{m}\right)\vec{g} - \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_{lim} = \left(1 - \frac{M}{m}\right) g\,\tau$$

$$\Leftrightarrow v_{lim} = \left(1 - \frac{M}{m}\right) g\,\frac{m}{\lambda} = (m - M)\frac{g}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow v_{lim} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_a - \rho_g)\frac{g}{6\pi\eta R}$$

$$\Leftrightarrow v_{lim} = \frac{2g}{9\eta}R^2(\rho_a - \rho_g)$$

Calcul du coefficient de viscosité

L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1{,}6s \ll \tau$ mise pour passer de l'altitude $z_1 = 40$ cm à $z_2 = 80$ cm.

On suppose la vitesse limite atteinte rapidement d'où :

$$v_{lim} = \frac{h}{\Delta t} = 0{,}25m/s$$

$$Or\ \eta = \frac{2g}{9v_{lim}}R^2\left(\rho_a - \rho_g\right) = 1{,}4kg.s^{-1}.m^{-1}$$

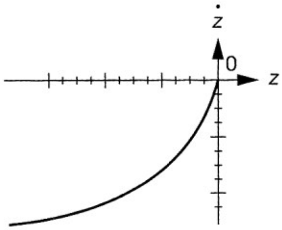
D'où $\tau =$0,031s ce qui confirme notre hypothèse. De plus on a fait les mesures au milieu du tube et non au début.

Remarque :

L'eau est beaucoup moins visqueuse que la glycérine. Ainsi, le régime transitoire durerait bien plus longtemps et la vitesse limite serait beaucoup plus importante. Les mesures ne pourraient donc pas être effectuées à de si faibles profondeurs.

III-4) Utilisation du portait de phase

Le portrait de phase d'un système analogue au précédent est tracé sur la figure :

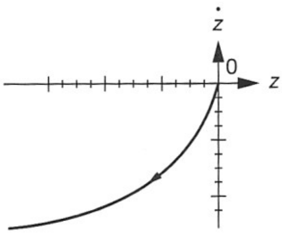


i. Expliquer dans quel sens il est parcouru.

ii. Quelles sont les conditions initiales ? Que dire du point matériel au bout d'un temps assez long ?

iii. Sachant que ce portrait correspond à une bille en chute libre avec des frottements fluides, expliquer comment est orienté l'axe Oz.

i. Tout le mouvement est dans la partie $\dot{z} < 0$, donc z(t) décroissante. Le sens de parcours est donc le suivant.



ii. Initialement, on lit sur le graphique z = 0 et $\dot{z} = 0$. Au bout d'un temps assez long, la vitesse de la bille se stabilise tend vers une constante.

iii. La bille est entraînée par la pesanteur. Comme z=0, cela signifie que l'axe Oz est vers le haut tel que : $\vec{g} = -\ g\overrightarrow{u_z}$

III-5) Force de trainée quadratique

À vitesse plus élevée, les frottements présentent une dépendance quadratique par rapport à la vitesse, c'est ce que l'on nomme une force de traînée.

Pour des vitesses « assez élevées », la force de frottement exercée par l'air sur une boule de pétanque de diamètre d = 2r = 75 mm et masse m = 700 g est de la forme :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}C\rho\pi r^2 v\vec{v}$$

où C est un coefficient que l'on prendra égal à 1, ρ = 1,3 kg.m^{-3} est la masse volumique de l'air et le champ de pesanteur vaut g = 9,8 m.s^{-2}.

- On laisse tomber la bille sans vitesse initiale. Montrer qu'elle atteint une vitesse limite et donner son expression. La calculer numériquement.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la bille dans le référentiel terrestre (galiléen) donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}.$$

On choisit le vecteur $\overrightarrow{u_z}$, vers le bas et on projette :

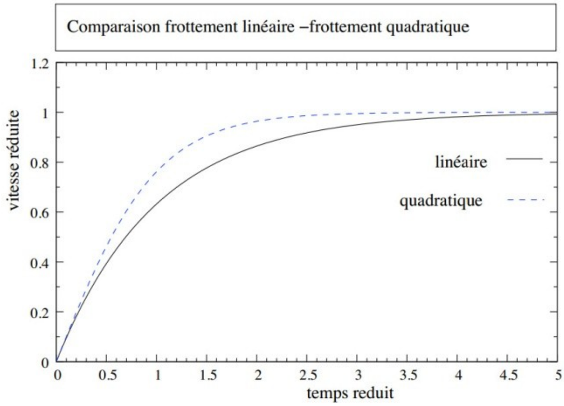
$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C\rho\pi r^2 v^2$$

La vitesse est alors stationnaire quand $\frac{dv}{dt} = 0$ et on déduit la vitesse limite tel que :

$$v^2 = \frac{2mg}{C\rho\pi r^2} \Rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho\pi r^2}}$$

Numériquement : $v_{lim} = 49\ m.s^{-1} = 180\ km.h^{-1}$.

- Une intégration numérique donne le résultat de la figure. Conclure.



Courbes $v(t)$. On remarque que - à constante de temps égale - la vitesse limite est atteinte plus rapidement dans le cas quadratique

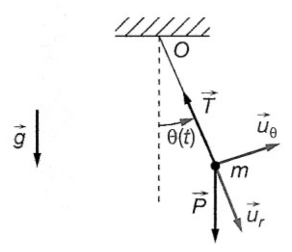
On remarque que dans le cas quadratique la vitesse limite est atteinte plus rapidement ce qui est logique car la vitesse croît plus vite.

IV - Pendule simple

IV-1) Equation du mouvement

Intéressons-nous à une petite masse m attachée à l'extrémité d'une ficelle de longueur l et de masse très faible, l'autre extrémité étant liée en un point O fixe. À l'équilibre, la ficelle est tendue verticalement. On communique alors une petite vitesse horizontale à la masse. En supposant que la ficelle reste tendue, la masse commence à osciller de part et d'autre de sa position d'équilibre. On repère par $\theta(t)$ l'angle entre la ficelle et la verticale. Les coordonnées polaires sont indiquées pour décrire le mouvement, d'autant plus que la distance l entre le point O et la masse (qui correspond à la coordonnée radiale r) ne varie pas

Considérons comme système la masse et étudions son mouvement dans le référentiel terrestre galiléen. Les forces qu'elle subit sont son poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.



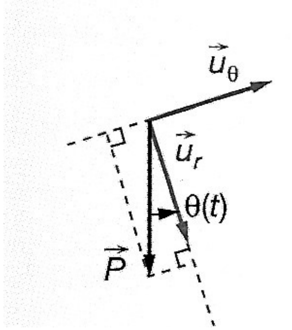
soit $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_z}$, sinon, le fil change de forme. Le signe moins se comprend aisément : le fil a tendance à tirer la masse vers le haut ; si on le coupe avec des ciseaux, la masse tombe.

On peut donc écrire :

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$

En projection on obtient alors :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T + Pcos\theta$$
$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -Psin\theta$$



La première relation permet, une fois le mouvement connu, de calculer la tension T du fil. Nous ne l'exploiterons donc pas.

La seconde relation se réécrit, vu que r = cte :

$$ml\ddot{\theta} = -mg sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

C'est l'équation du mouvement d'un pendule simple.

IV-2) Cas des petites oscillations

L'équation différentielle régissant les oscillations du pendule simple est en fait assez complexe et ne peut se résoudre à l'aide des fonctions mathématiques usuelles.

Il est possible d'obtenir une solution numériquement, ou alors il faut se placer dans la limite des petites oscillations, c'est-à-dire :

$sin\theta \approx \theta$

L'équation différentielle se réduit à :

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Cette équation est similaire à celle régissant un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 .

Les solutions sont donc de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \ cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où θ_0 est l'amplitude du mouvement et φ une constante. Les oscillations sont périodiques, de période : $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

On remarque déjà que la période est indépendante de la masse. De plus, la période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations (tant que l'approximation des petits angles reste valide). On parle alors d'oscillations isochrones.

Dans le cas de fortes oscillations les oscillations ne sont plus isochrones : formule de Borda $T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

IV-3) Portrait de phase

Intéressons-nous au portrait de phase du pendule simple, dans la limite des petites oscillations. Comme cela a été établi précédemment, l'angle $\theta(t)$ varie comme :

$$\theta(t) = \theta_0\ cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Alors,

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$$

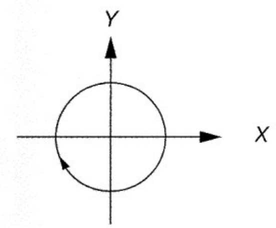
D'où :

$$sin^2(\omega_0 t + \varphi) + cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0\theta_0}\right)^2 = 1$$

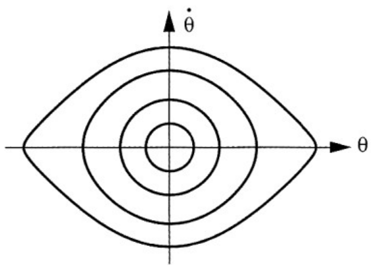
Ainsi, dans un portrait de phase, l'abscisse donnée par X= θ (t) et l'ordonnée par Y= $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0\theta_0}$ vérifient la relation :

$$X^2 + Y^2 = \theta_0^2$$

Le centre du cercle est une position d'équilibre et les cercles parcourus autour décrivent des oscillations sans frottement.



Pour différentes conditions initiales on a obtenu :

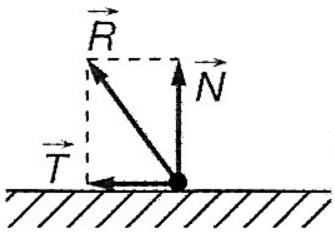


Dans ce cas correspondant à des amplitudes d'oscillations assez importantes, l'approximation des petites oscillations n'est plus valide. L'allure du portrait de phase n'est plus un cercle.

V - Lois de Coulomb

V-1) Description des forces de contact

Quand un point matériel est au contact avec un support, ce dernier exerce une force sur le point matériel, appelée réaction du support et notée $\vec{R}$. On rappelle que cette force a pour origine la répulsion à faible distance des nuages électroniques des atomes du point matériel et du support. La réaction $\vec{R}$ se décompose en une partie normale au support notée $\vec{N}$ et une partie tangente au support notée $\vec{T}$, soit $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$



La partie normale de la réaction possède une caractéristique importante : elle doit absolument être dirigée du support vers le point matériel.

Cette condition résulte de l'origine physique de la force, il s'agit d'une répulsion (électrostatique). Elle constitue une condition absolue de contact : si lors d'un calcul, la réaction normale est dirigée dans le mauvais sens, c'est que le contact entre le point matériel et le support a été rompu auparavant.

La partie tangentielle est liée aux frottements entre le support et le point matériel. Elle est souvent nommée force de frottement.

Un contact sans frottement impose une réaction purement normale.

V-2) Lois de Coulomb

a) Modèle des frottements secs

Le français Charles-Augustin Coulomb a énoncé les lois approchées suivantes, donnant une relation entre les composantes tangentielle et normale de la force de réaction. Ces lois sont parfois qualifiées de phénoménologiques, car tirées directement de l'expérience sans rapport avec leur nature microscopique.

- **Si la vitesse de glissement $\vec{\mathbf{v}}$ est non nulle :**
  - **le vecteur $\vec{\mathbf{T}}$ est colinéaire à $\vec{\mathbf{v}}$;**
  - **le vecteur $\vec{\mathbf{T}}$ s'oppose au mouvement, ainsi $\vec{\mathbf{T}}.\vec{\mathbf{v}} \leq \mathbf{0}$;**

- **Il existe un paramètre $\mathbf{f_D}$ sans dimension, appelé coefficient de frottement dynamique, vérifiant $\|\vec{\mathbf{T}}\| = \mathbf{f_D}\|\vec{\mathbf{N}}\|$**
- **D'où : $\|\vec{\mathbf{T}}\| = -\frac{\mathbf{f_D}\|\vec{\mathbf{N}}\|\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{v}}$**

- **Si le point matériel est au repos, la force de frottement $\vec{\mathbf{T}}$ et la réaction normale $\vec{\mathbf{N}}$ vérifient : $\|\vec{\mathbf{T}}\| < \mathbf{f_s}\|\vec{\mathbf{N}}\|$ où $\mathbf{f_s}$est appelé coefficient de frottement statique. On parle d'adhérence.**

b) Les coefficients de frottements

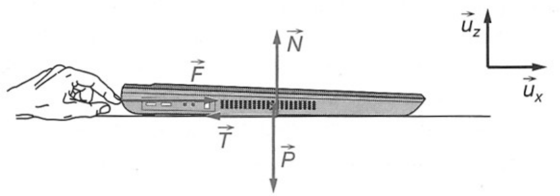
Les coefficients de frottement, sont des paramètres expérimentaux. Ils caractérisent les matériaux en contact, mais dépendent des conditions (température, pression, humidité, etc.) du contact et aussi de l'état de surface. Leur étude fait partie d'un sous-domaine de la mécanique appelé tribologie. Notons que plus f_D est grand, plus les frottements sont importants. Par exemple pour un contact acier-acier, f_D varie de 0,15 à 0,60 suivant l'état de surface et les conditions expérimentales. Le contact béton-sol est tel que f_D est compris entre 0,60 et 0,90.

Enfin, le freinage automobile est souvent assuré par un contact entre des plaques en dérivés carbonés et un disque d'acier pour lequel le coefficient f_D est de l'ordre de 0,5.

En général, $\mathrm{f_D} < \mathrm{f_s}$; cependant, dans de nombreux modèles simplifiés, on écrit souvent $\mathbf{f_D} = \mathbf{f_s} = \mathbf{f}$.

c) Exemple.

Un ordinateur portable (replié) est posé sur une table et une personne le pousse vers la droite. L'ordinateur est supposé se comporter comme un point matériel. Les forces exercées sur l'ordinateur sont : le poids; la réaction de la table; la force exercée par la personne.



Étudions successivement les deux cas :

- Si, malgré les efforts de la personne, l'ordinateur ne glisse pas, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'ordinateur s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + (\vec{N} + \vec{T}) + \vec{F}$$

Donc :

$$\vec{F} = -\vec{T} \text{ et } \vec{N} = -m\vec{g}$$

Or : $\|\vec{\mathrm{T}}\| < f\|\vec{\mathrm{N}}\| \Rightarrow F \leq fmg$

où f est le coefficient de frottement. Le sens physique est donc clair : tant que la personne ne pousse pas assez fort, l'ordinateur reste immobile. Plus l'ordinateur est lourd, plus la force de contact table-ordinateur est intense, et plus la personne devra pousser pour mettre l'ordinateur en mouvement.

- Si l'ordinateur glisse, on obtient :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + (\vec{N} + \vec{T}) + \vec{F}$$

soit en projection sur l'horizontale et la verticale :

$$m\ddot{x} = F - T \; et \; 0 = N - mg$$

Or : $\|\vec{\mathrm{T}}\| = \mathrm{f}\|\vec{\mathrm{N}}\| = \mathrm{fmg}$

Donc :

$$m\ddot{x} = F - \mathrm{fmg}$$

Ce résultat est bien cohérent avec le cas où l'ordinateur ne glisse pas. Les lois de Coulomb ont donc permis de préciser les conditions pour que l'ordinateur se mette à glisser, ainsi que de déterminer son mouvement en cas de glissement.