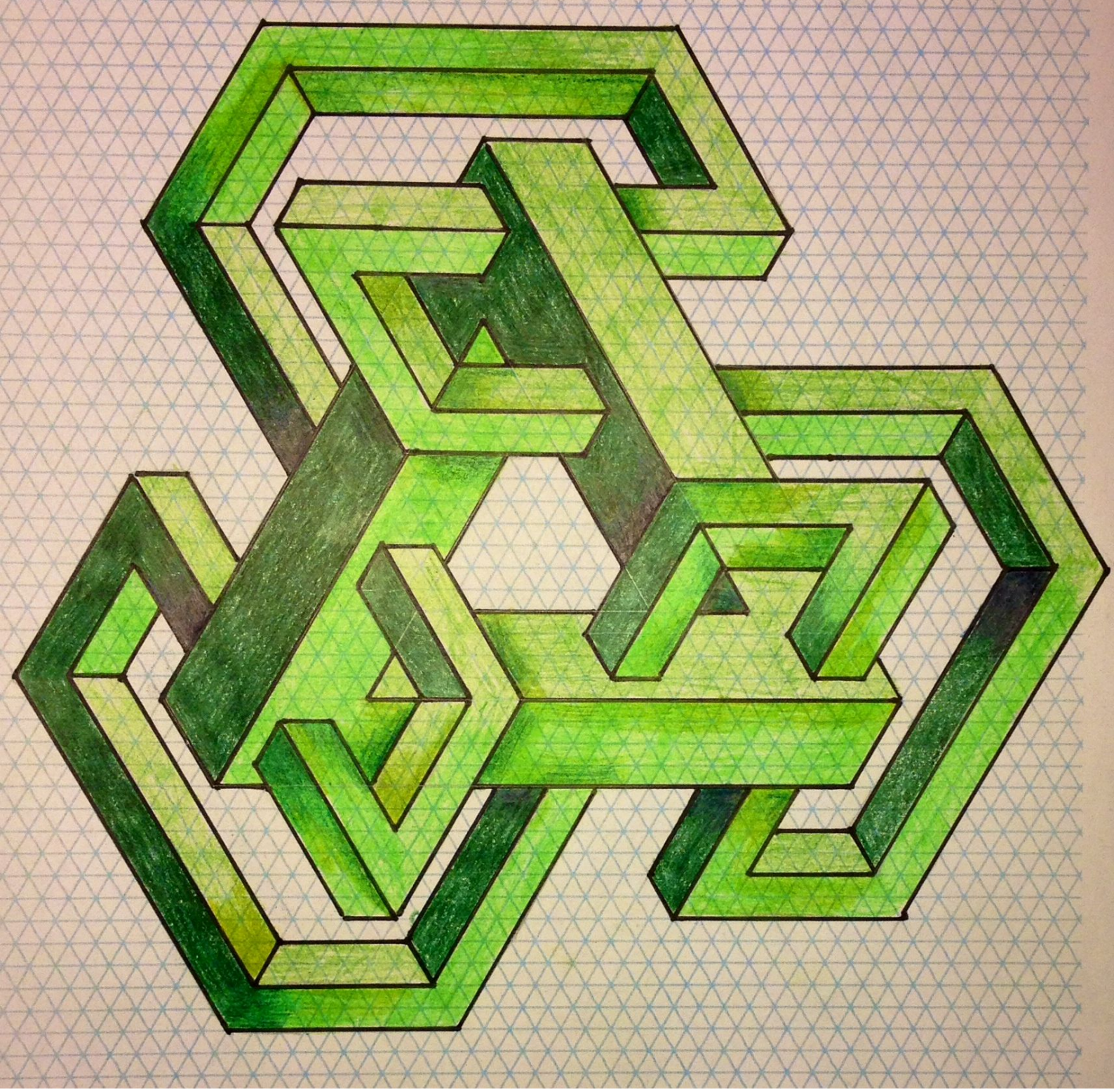


Cahier d'entraînement en physique

PC/PC*

Page web du *Cahier d'entraînement*,
dernières versions

Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.

Coordination

Colas Bardavid et Catherine Lavainne

Équipe des participants

Steve Arnefaux
Stéphane Bargot
Chloé Barraud
Fabien Baudribos
Laurent Beau
Julien Bellier
Lionel Beluze
Marc Beutier
Ariane Beyrath
Allan Bildé
Guillaume Blot-Teyssedre
Olivier Boinot-Turpault
Cécile Bonnand
Alexis Brès
Frédéric Bruneau
Geoffroy Burgunder
Erwan Capitaine
Vincent Combette
Guillaume Davieau
Jean-Marie Delorme
Frédéric Desforges
Alexis Drouard
Hervé George
Florence Goutverg
Mathieu Hebding
Lucas Henry
Didier Hérisson
Fanny Jospitre
Joris Laleque
Catherine Lavainne
Alain Lombard
Louis Péault
Gwenaël Raillet
Mathieu Rigaut
Alain Robichon
Renaud Ruamps
Pierre-Simon Saulue
Théo Tassin
Étienne Thibierge
Delphine Viandier
Anthony Yip

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme du bulldozer a été créé par Ayub Irawan (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Regolo Bizzi.

Version 0.0.15 — 19 septembre 2024

Sommaire

Mode d'emploi du cahier d'entraînement v

Généralités

☐ fiche 1. Opérateurs vectoriels 3

Mécanique

☐ fiche 2. Changements de référentiel 13

Électromagnétisme en régime permanent

☐ fiche 3. Électrostatique 23

☐ fiche 4. Magnétostatique 36

Électromagnétisme en régime variable

☐ fiche 5. Équations de Maxwell 47

☐ fiche 6. Induction 59

☐ fiche 7. Ondes électromagnétiques I 74

☐ fiche 8. Ondes électromagnétiques II 85

Optique

☐ fiche 9. Modèle scalaire de la lumière 93

☐ fiche 10. Interférences à deux ondes 101

☐ fiche 11. Interférences à N ondes 113

Thermodynamique

☐ fiche 12. Outils mathématiques pour la diffusion 125

☐ fiche 13. Diffusion particulaire 129

☐ fiche 14. Diffusion thermique 141

☐ fiche 15. Transferts thermiques 158

☐ fiche 16. Tables et diagrammes thermodynamiques 167

☐ fiche 17. Thermodynamique industrielle 180

Électronique

- ☐ fiche 18. Signaux 190
- ☐ fiche 19. ALI 202
- ☐ fiche 20. Oscillateurs électroniques 211

Physique moderne

- ☐ fiche 21. Physique quantique 218
- ☐ fiche 22. Physique du laser 227

Ondes

- ☐ fiche 23. Propagation des ondes et interfaces 237
- ☐ fiche 24. Propagation des ondes et dispersion 244

Mécanique des fluides

- ☐ fiche 25. Cinématique des fluides 252
- ☐ fiche 26. Dynamique des fluides 259
- ☐ fiche 27. Bilans en mécanique des fluides 274

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique**.

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants : un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu de votre programme de deuxième année.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.

Les pictogrammes

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme.

Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi car le bulldozer permet de construire les fondations, et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.

Ces entraînements vous entraînent au **calcul à la main**.

Dans ces entraînements, les calculs doivent être faits **sans calculatrice**.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahier.entrainement@gmail.com`.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

Énoncés

Opérateurs vectoriels

Prérequis
Notation avec et sans le symbole nabla $\vec{\nabla}$ des opérateurs :
- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f$
- divergence : $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Expressions de ces opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes.

Dans toute cette fiche, les grandeurs a, b et c sont des constantes ayant la dimension d'une longueur.

Sur l'opérateur gradient

Entraînement 1.1 — Quelle écriture pour le gradient ?

Le gradient est un opérateur vectoriel qui s'applique à des fonctions scalaires. Pour un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrivant l'espace, la définition du gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

On considère la fonction $V(x, y, z) = xyz$. Quelle est la bonne expression du gradient de V ?

(a) $\nabla(V) = zy\,\vec{e_x} + zx\,\vec{e_y} + yx\,\vec{e_z}$

(b) $\text{grad}\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = zy\,\vec{e_y} + zx\,\vec{e_x} + yx\,\vec{e_z}$

(d) $\vec{\nabla}(V) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

.....

Entraînement 1.2 — Calcul de gradients en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On rappelle l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3x^2 + 2a(y - z) + b^2\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(x^2y + y^2z + z^2x + a^3\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z\right)$ .....

Entraînement 1.3 — Calcul de gradients en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(7\theta\left(\dfrac{r}{a}\right)^4 + \ln(z/b)\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{z}{r}\sin(\theta)\right)$ .....

Entraînement 1.4 — La bonne formule.

On introduit deux systèmes de coordonnées pour décrire un plan : des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) et des coordonnées polaires (ρ, α).

Parmi les formules suivantes de gradient à deux dimensions d'une fonction scalaire g du plan, identifier la seule écriture valable :

(a) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(x_1,x_2)) = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_2}}$

(b) $\vec{\nabla} g(x_1,x_2) = \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(r,\alpha)) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \rho}\vec{e_\alpha}$

(d) $\vec{\nabla} \bullet g(r,\rho) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}\vec{e_\alpha}$

.....

Entraînement 1.5 — Valeurs et projections d'un gradient.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\nabla}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

On considère la fonction $g(x,y,z) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 1$, on note $\mathrm{M}(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace et A le point de coordonnées $(-1,1,2)$.

a) Calculer $g(\mathrm{A})$ .....

b) La quantité $2z$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$

.....

c) La quantité $2y + 2$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$

.....

d) La quantité $2x - 4$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$

.....

e) La quantité $\vec{\nabla} g(M)$ correspond au vecteur :

(a) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2(y-1) \\ 2(x+2) \\ 2z \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$

.....

f) Calculer $\left\| \vec{\nabla} g(\mathrm{A}) \right\|$ .....

Entraînement 1.6 — Enquête sur une fonction.

On considère une fonction $f(x,y,z)$ inconnue telle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = 2xy\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + a^2\vec{e_z}$.

a) Quelle est l'unique relation valable ?

(a) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy$ (b) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y$

.....

b) Quelle primitive est solution de la réponse précédente ?

(a) $f(x,y,z) = xy^2 + g(x,y)$ (c) $f(x,y,z) = x^2y + yx^2$

(b) $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$

.....

c) Que vérifie la dérivée partielle par rapport à y de la réponse précédente ?

(a) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ (b) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 1$

.....

d) En s'appuyant sur les réponses précédentes, quelle est la bonne expression de g ?

(a) $g = a^2 y + \text{Cste}$ (b) $g = a^2 z + \text{Cste}$ (c) $g = a^2 + \text{Cste}$

.....

e) Quelle est l'expression de la fonction $f(x, y, z)$ telle que $f(0, 0, 0) = 0$?

(a) $f = x^2 y + a^2 z$ (b) $f = y^2 z + a^2 x$ (c) $f = x^2 z + a^2 y$

.....

Sur l'opérateur divergence

Entraînement 1.7 — Calcul de divergences en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(3x^2\vec{e_x} + 2ay\vec{e_y} - 2bz\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\text{div}\left(2xy\vec{e_y} + 8a^2 \text{e}^{\frac{z}{2b}}\vec{e_z} - 6b^2\vec{e_x}\right)$ .....

c) $\text{div}\left(8x^2 y\vec{e_x} + \frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\text{div}(x\vec{e_z} + z\vec{e_x})$ .....

e) $\text{div}\left(x^2 y\vec{e_x} - yx^2(\vec{e_y} - \vec{e_z})\right)$ .....

Entraînement 1.8 — Calcul de divergences en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$ .....

b) $\text{div}(r\vec{e}_\theta)$ .....

Entraînement 1.9 — Bataille de divergences.

Quel est le champ dont la divergence au point $A(-1,-1,1)$ est maximale ?

(a) $x^2\vec{e_x}+y^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$ (c) $z^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+y^2\vec{e_z}$

(b) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$ (d) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_z}+z^2\vec{e_y}$

.....

Entraînement 1.10 — Choix du système de coordonnées.

On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) et d'un système de coordonnées sphériques (r,θ,φ). On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}=r\vec{e_r}$ et on donne l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}(\vec{A})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\operatorname{div}(x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z})$ .....

b) $\operatorname{div}(r\vec{e_r})$ .....

On munit l'espace de dimension 2 d'un système de coordonnées cylindro-polaires (r,θ).

On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}=r\vec{e_r}$.

c) La divergence de ce champ en tout point vaut :

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

.....

Sur l'opérateur rotationnel

Entraînement 1.11 — Calcul de rotationnels en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x,y,z).

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(3x^2\vec{e_x}+2by\vec{e_y}-2cz\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(2xy\vec{e_x}+8c^2\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_y}-6c^2\vec{e_z}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(8x^2y\vec{e_x}+\frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(-x\vec{e_z}+z\vec{e_x})$ .....

e) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(x^2y\vec{e_x}-yx^2(\vec{e_y}-\vec{e_z})\right)$ .....

Entraînement 1.12 — Calcul de rotationnels en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e_\theta} + 3z\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

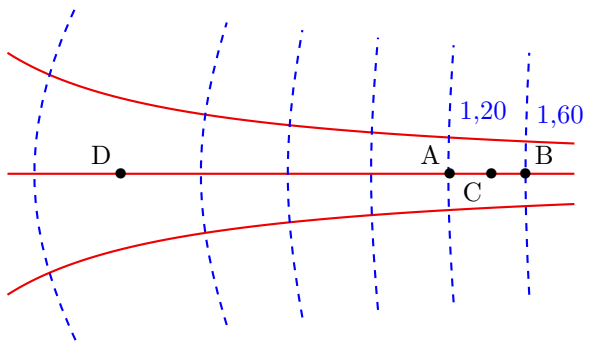
Sur la représentation graphique

Entraînement 1.13 — Exploiter une carte de champ.

On considère un champ $\vec{v}(\text{M})$ dérivant d'un gradient de potentiel Φ, c'est-à-dire tel qu'en tout point M :

$$\vec{v}(\text{M}) = \overrightarrow{\text{grad}}\ \Phi(\text{M})$$

La figure dessous représente les lignes de champ (en traits pleins) et les équipotentielles (en tirets). Le système est invariant par translation orthogonalement au plan de la figure. Les valeurs du potentiel $\Phi(\text{M})$ sont données pour chaque équipotentielle en UA (unité arbitraire).



On admet que le champ est tel que $\text{div}\ \vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire à flux conservatif. Autrement dit, le long d'un tube de champ de section S la quantité vS est conservée.

a) Par rapport aux équipotentielles, les lignes de champ sont orientées :

(a) parallèlement (b) orthogonalement (c) aléatoirement

.....

b) Estimer graphiquement $v(\text{C})$ en UA/m sachant que AB $\approx 50\,\text{cm}$ .....

c) Le vecteur $\vec{v}(\mathrm{C})$ est orienté dans le sens du vecteur :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

.....

d) Estimer graphiquement $\dfrac{v(\mathrm{C})}{v(\mathrm{D})}$ en calculant un rapport de longueurs .....

Sur les opérateurs Laplaciens

Entraînement 1.14 — Opérateur Laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (scalaire) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\Delta\left(\dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2\right)$ .....

b) $\Delta(y^2 - 5az)$ .....

c) $\Delta\left(b^2 \ln(\dfrac{z}{a}) + 3x^2\right)$ .....

Entraînement 1.15 — Opérateur Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (vectoriel) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(\vec{A}(x,y,z)) = \Delta A_x \overrightarrow{e_x} + \Delta A_y \overrightarrow{e_y} + \Delta A_z \overrightarrow{e_z}$$

On dispose d'un vecteur $\vec{A}$ dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes : $\begin{pmatrix} \dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2 \\ y^2 - 5az \\ b^2 \ln\left(\dfrac{z}{a}\right) + 3x^2 \end{pmatrix}$

Développer $\Delta\vec{A}$ .....

Bilan sur les opérateurs

Entraînement 1.16 — Scalaire ou vecteur ?

Les différents opérateurs rencontrés peuvent être des opérateurs :

(a) scalaires s'appliquant à des scalaires
(b) scalaires s'appliquant à des vecteurs
(c) vectoriels s'appliquant à des scalaires
(d) vectoriels s'appliquant à des vecteurs

a) Quel cas correspond à l'opérateur « gradient » ? .....

b) Quel cas correspond à l'opérateur « divergence » ? .....

c) Quel cas correspond à l'opérateur « rotationnel » ? .....

d) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien »appliqué à un champ scalaire ? .....

e) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien »appliqué à un champ vectoriel ? .....

Autres entraînements

Entraînement 1.17 — Calcul de gradients en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left((r\sin(\theta-\varphi))^3\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}(\tan(\theta))$ .....

Entraînement 1.18 — Calcul de divergences en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\operatorname{div}\left(r\vec{e_r} + 2a\sin\theta\vec{e_\theta} + \dfrac{6a}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\operatorname{div}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}(\vec{e_r} + \vec{e_\theta} + \vec{e_\varphi})\right)$ .....

c) $\operatorname{div}(r\vec{e_\theta})$ .....

Entraînement 1.19 — Calcul de rotationnels en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}) = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(r\vec{e_r} + 2a\theta\vec{e_\theta} + \dfrac{6b}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\vec{e_r}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

Réponses mélangées

$-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x} - 2x\vec{e_z}$ (a) $\left(-\frac{2r}{a} - 2\theta\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$ (b) (a)

$-\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \frac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$ $\frac{2y}{a}$ $4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}$ $2x + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

$\vec{e_r} + \frac{2a}{r}\vec{e_\theta} + \frac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}$ 0,80 UA/m $\frac{6b}{r\varphi\tan\theta}\vec{e_r} - \frac{6b}{r\varphi}\vec{e_\theta} + \frac{2a\theta}{r}\vec{e_\varphi}$

$28\frac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r} + 7\frac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta + \frac{1}{z}\vec{e_z}$ (a) $\left(z + y + \frac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + z + \frac{xz}{a}\right)\vec{e_y}$ $+\left(x + y + \frac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$ $\vec{0}$ $2\vec{e_\varphi}$

$-4\theta\vec{e_z}$ $3r^2\begin{pmatrix}\sin^3(\theta-\varphi)\\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\\ -\frac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$ 2 (b) (c) $-3\frac{r}{a} + 1$

(b) (c) $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$ 0 $r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix}2\sin\theta\\ \cos\theta\\ \frac{1}{2\varphi}\end{pmatrix}$ (b) $\frac{8x^2}{y}(3x - y)\vec{e_z}$

$\begin{pmatrix}\frac{2y}{a}\\ 2\\ 6 - \frac{b^2}{z^2}\end{pmatrix}$ (b) (a) $-\frac{z\sin\theta}{r^2}\vec{e_r} + \frac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta + \frac{\sin\theta}{r}\vec{e_z}$ (a) 0

$2\vec{e_y}$ (b) $6 - \frac{b^2}{z^2}$ (a) $1/\tan(\theta)$ $\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\vec{e_r}$ $6x + 2a - 2b$ 3

$2\vec{e_z}$ $x^2\vec{e_x} - 2xy(\vec{e_y} + \vec{e_z}) - x^2\vec{e_z}.$ 2 $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$

$(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y}$ $+(2xz + y^2)\vec{e_z}$ (d) 3 $2\sqrt{17}$ (d) $x(2y - x)$

(d) (b) (c) $\frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}$ $3 + \frac{4a\cos\theta}{r} - \frac{6}{\varphi^2\sin\theta}\frac{a}{r}$

$\frac{1}{r\cos^2\theta}\vec{e_\theta}$ (a) $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$ 16 $16xy - \frac{6x^4}{y^2}$

▶ Réponses et corrigés page 284

Changements de référentiel

Prérequis
Principe fondamental. Mouvement relatif de référentiels. Forces d'inertie.

Constantes utiles
→ Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Avant toute chose

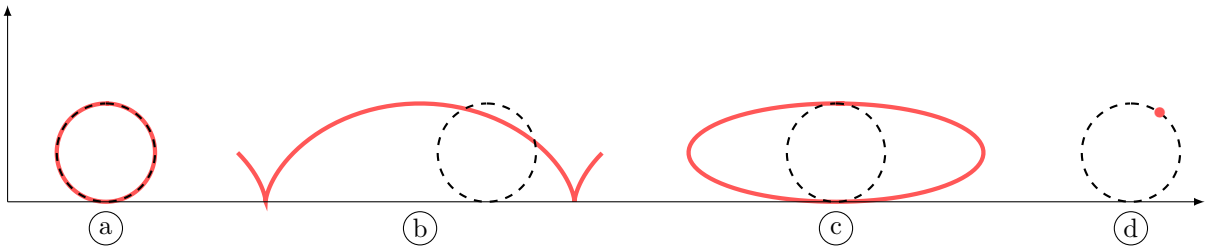
Entraînement 2.1 — Trajectoires et référentiels.

On s'intéresse ici au mouvement de la valve V d'une roue de vélo. En changeant de référentiel, la trajectoire de ce point peut être perçue de manière différente.

On définit trois référentiels :

- le référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à la Terre,
- le référentiel $\mathcal{R}_2$ lié au cadre du vélo,
- le référentiel $\mathcal{R}_3$ lié à la roue du vélo.

Voici différentes trajectoires pour le point V.



Parmi les quatre trajectoires présentées ci-dessus, quelle est celle qui peut correspondre à un mouvement décrit dans :

a) le référentiel $\mathcal{R}_1$? .....

b) le référentiel $\mathcal{R}_2$? .....

c) le référentiel $\mathcal{R}_3$? .....

Entraînement 2.2 — Référentiel galiléen... ou pas (I) ?

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout solide ne subissant aucune force extérieure est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

On considère un référentiel $\mathcal{R}_0(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ galiléen ainsi que les trois référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_1(\mathrm{O}', \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.
- $\mathcal{R}_2(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$, animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.
- $\mathcal{R}_3(\mathrm{A}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, en translation non uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.

a) $\mathcal{R}_1$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ? .....

b) $\mathcal{R}_2$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ? .....

c) $\mathcal{R}_3$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ? .....

Entraînement 2.3 — Référentiel galiléen... ou pas (II) ?

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout solide ne subissant aucune force extérieure est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, on s'intéresse aux mouvements d'un train et de l'un des passagers à bord. On note $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ le référentiel lié au train et $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ le référentiel lié au passager à bord du train.

Dans chacune des situations proposées, indiquez quel(s) est (sont) le(s) référentiel(s) galiléen(s) parmi les options suivantes :

(a) $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ et $\mathcal{R}_\mathrm{p}$
(b) ni $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ ni $\mathcal{R}_\mathrm{p}$
(c) uniquement $\mathcal{R}_\mathrm{t}$
(d) uniquement $\mathcal{R}_\mathrm{p}$

a) Le train suit une ligne droite à vitesse constante ; le passager est assis sur son siège.

.....

b) Le train suit une courbe à vitesse constante ; le passager est assis sur son siège.

.....

c) Le train freine sur une ligne droite ; le passager marche le long du train à vitesse constante.

.....

d) Le train suit une courbe à vitesse constante ; le passager marche le long du train.

.....

Composition de mouvements

Entraînement 2.4 — Autour de l'accélération.

On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen lié au repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et un référentiel $\mathcal{R}'$, lié au repère cylindrique $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Un point M, en mouvement dans ces deux référentiels, est repéré par ses coordonnées cylindriques habituelles r, θ et $z = 0$. L'angle θ suit la loi : $\theta = \omega t$ où ω est une constante.

• Caractérisation du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$

a) Le vecteur rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, $\vec{\Omega}$, vaut :

(a) $\theta\vec{e_z}$ (b) $-\dot{\theta}\vec{e_x}$ (c) $\omega\vec{e_z}$ (d) $\dot{\omega}\vec{e_z}$

.....

b) Le référentiel $\mathcal{R}'$ est galiléen.

(a) Vrai (b) Faux

.....

• Composantes de l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$

c) Par homogénéité, identifier l'expression de l'accélération radiale a_r de M dans $\mathcal{R}$ en coordonnées cylindriques.

(a) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (b) $\dot{r} - r^2\dot{\theta}$ (c) $\ddot{r} - r^2\dot{\theta}^2$ (d) $\ddot{r} - r^2\dot{\theta}$

.....

d) Par homogénéité, identifier l'expression de l'accélération orthoradiale a_θ de M dans $\mathcal{R}$ en coordonnées cylindriques.

(a) $2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\theta}$ (b) $2\ddot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (c) $2\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (d) $2\dot{r}\dot{\theta}$

.....

• Composition des accélérations

La loi de composition des accélérations assure que :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{a_e} + \vec{a_C}$$

avec $\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}}$, $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}'}$, et comme $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à $\mathcal{R}$,

$$\vec{a_e} = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \quad \text{et} \quad \vec{a_C} = 2\vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'}$$

e) Exprimer $\vec{a_e}$ en fonction de r, ω et d'un vecteur unitaire de la base cylindrique ..

f) Exprimer $\vec{a_C}$ en fonction de $\dot{r}$, ω et d'un vecteur unitaire de la base cylindrique ..

g) En déduire l'accélération $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$ .....

Forces d'inertie

Entraînement 2.5 — Forces d'inertie à prendre en compte.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ est considéré galiléen. On considère l'étude d'une masse ponctuelle M dont on observe le mouvement dans différents référentiels $\mathcal{R}_i$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_t$.

On définit les quatre référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_1$ lié à un manège en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}_t$,
- $\mathcal{R}_2$ lié à un paquebot en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_t$,
- $\mathcal{R}_3$ lié à un train en phase de décélération uniforme en ligne droite dans $\mathcal{R}_t$.
- $\mathcal{R}_4$ lié à une caisse en chute libre dans $\mathcal{R}_t$.

L'étude du mouvement de M dans ces référentiels $\mathcal{R}_i$ amène à envisager de prendre en compte des forces d'inertie :

(a) force d'inertie d'entraînement centrifuge quand $\mathcal{R}_i$ est en rotation dans $\mathcal{R}_t$

(b) force d'inertie de Coriolis

(c) force d'inertie d'entraînement quand $\mathcal{R}_i$ est en translation rectiligne dans $\mathcal{R}_t$

(d) aucune force d'inertie

Déterminer les forces d'inertie à prendre en compte dans les situations suivantes :

a) M est immobile dans $\mathcal{R}_1$ .....

b) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_1$ ..

c) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_2$ ..

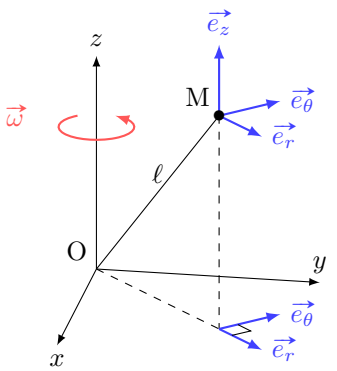
d) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_3$ ..

e) M est fixe dans $\mathcal{R}_3$ .....

f) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_4$ ..

Entraînement 2.6 — Force d'inertie centrifuge.

Un point M de masse m est animé d'une vitesse $\vec{v}(M) = v\vec{e_\theta}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ lié au repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. On étudie le mouvement de M dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}_0$ caractérisée par le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$.



Une force d'inertie d'entrainement, ici centrifuge, s'exerce sur le point M : $\vec{f_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation. La distance OM vaut ℓ.

Déterminer, dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$, l'expression de la force d'inertie centrifuge dans les situations suivantes.

a) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ et le point M est placé sur l'axe (Oz) .....

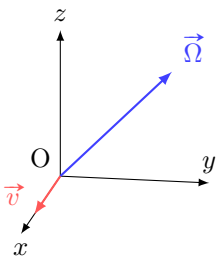
b) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ et le point M possède les coordonnées cylindriques $(\ell,0,0)$ ...

c) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{OM}$ est incliné de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à (Oz). .....

Entraînement 2.7 — Force de Coriolis.

L'étude du mouvement d'un point M est réalisée dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$, en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$.

Ce point matériel M de masse m possède un vecteur vitesse $\vec{v} = v_1\vec{e_x}$ dans $\mathcal{R}_1$, quand il passe en O. Le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ vaut $\vec{\Omega} = \Omega_0(\vec{e_y} + \vec{e_z})$.



On rappelle l'expression de la force d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{f_{iC}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$.

La force de Coriolis subie par le point M en O vaut :

(a) $\overrightarrow{f_{iC}} = 2mv_1\Omega_0(-\vec{e_y} - \vec{e_z})$

(b) $\overrightarrow{f_{iC}} = 2mv_1\Omega_0(\vec{e_y} + \vec{e_z})$

(c) $\overrightarrow{f_{iC}} = 2mv_1\Omega_0(-\vec{e_y} + \vec{e_z})$

(d) $\overrightarrow{f_{iC}} = 2mv_1\Omega_0(\vec{e_y} - \vec{e_z})$

.....

Entraînement 2.8 — Forces de Coriolis (II).

Un point M de masse m est animé d'une vitesse $\vec{v}(\mathrm{M})$ dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ en rotation par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$. Le vecteur rotation de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}_0$ est noté $\vec{\omega}$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la force de Coriolis définie par $\overrightarrow{f_{iC}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(\mathrm{M})$).

• Premier cas : on étudie le mouvement de M dans la base cartésienne.

a) $\vec{v}(\mathrm{M}) = v_1\vec{e_y}$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{v}(\mathrm{M}) = v_1\vec{e_y} + v_2\vec{e_z}$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_x}$ .....

• Deuxième cas : on étudie le mouvement de M dans la base cylindrique.

c) $\vec{v}(\mathrm{M}) = v_1\vec{e_r}$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ .....

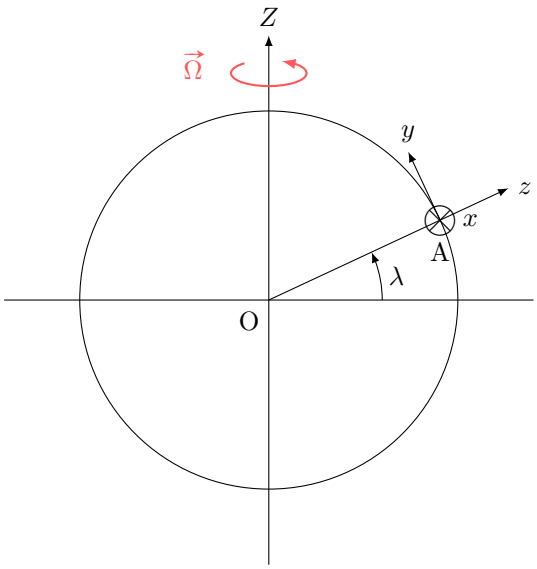
d) $\vec{v}(\mathrm{M}) = v_1\vec{e_\theta} + v_2\vec{e_z}$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ .....

Entraînement 2.9 — Force de Coriolis dans le référentiel terrestre.

On s'intéresse au référentiel terrestre $\mathcal{R}_\text{t}$, lié au repère $(\text{A}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Ce référentiel est en rotation autour de l'axe (O, Z) par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_\text{g}$, supposé galiléen. Le mouvement de rotation de $\mathcal{R}_\text{t}$ par rapport à $\mathcal{R}_\text{g}$ est caractérisé par le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e_z}$.

Le point A est repéré par sa latitude λ.

Ces référentiels sont représentés ci-dessous.



a) Quelle est la valeur numérique de Ω ?

(a) $2{,}6 \times 10^{-2}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

(b) $1{,}7 \times 10^{-3}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

(c) $7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

.....

b) Parmi les projections du vecteur $\vec{\Omega}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, laquelle est correcte ?

(a) $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ \cos\lambda \end{pmatrix}$

(b) $\Omega \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$

(c) $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$

.....

On s'intéresse au mouvement d'un point M de masse m dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_\text{t}$; on suppose qu'il est animé d'une vitesse $\vec{v}(M) = \dot{z}\vec{e_z}$.

On rappelle l'expression de la force de Coriolis subie par M *dans* $\mathcal{R}_\text{t}$ *:*

$$\overrightarrow{f_{iC}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(\text{M}).$$

c) Exprimer $\overrightarrow{f_{\text{iC}}}$ en fonction de m, Ω, $\dot{z}$ et d'un vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

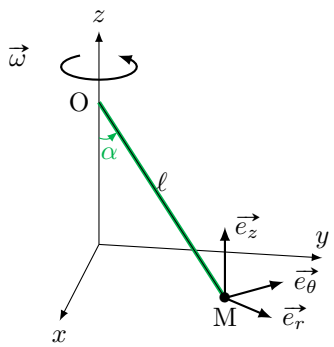
Entraînement 2.10 — Pendule en rotation.

On s'intéresse à un pendule composé d'une tige (masse négligeable, longueur $\ell = 1{,}0\,\text{m}$) et d'une bille placée en M de masse m. Ce pendule est fixé en O à un axe vertical en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$. Sous l'action de la rotation, le pendule s'incline d'un angle α par rapport à la verticale tout en restant dans le plan $(\text{O}, \vec{e_r}, \vec{e_z})$.

On rappelle que la force d'inertie centrifuge vaut

$$\vec{f_{\text{ie}}} = m\omega^2\,\overrightarrow{\text{HM}},$$

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.



a) La force centrifuge subie par le M vaut :

(a) $\vec{f_{\text{ie}}} = -m\omega^2\overrightarrow{\text{OM}}$

(b) $\vec{f_{\text{ie}}} = m\omega^2\ell\sin(\alpha)\vec{e_z}$

(c) $\vec{f_{\text{ie}}} = m\omega^2\ell\sin(\alpha)\vec{e_r}$

(d) $\vec{f_{\text{ie}}} = -m\omega^2\ell\vec{e_\theta}$

.....

b) Par homogénéité, déterminer la relation qui lie ω et α :

(a) $\omega = \dfrac{\ell}{g\sqrt{\cos\alpha}}$

(b) $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell\cos\alpha}}$

(c) $\omega = \dfrac{g}{\ell}\sqrt{\cos\alpha}$

(d) $\omega = \sqrt{\dfrac{\ell}{g}\cos\alpha}$

.....

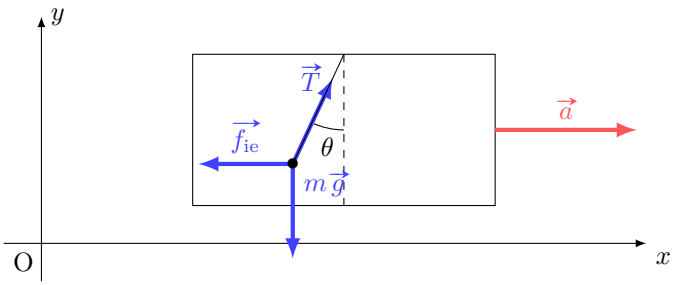
c) Déterminer pour quelle valeur de la vitesse angulaire ω l'angle α vaut 45° .....

Entraînement 2.11 — Un pendule sur une voiture.

On s'intéresse à un pendule de masse $m = 5\,\text{g}$ suspendu au rétroviseur d'une voiture animée pour $t < 0$ d'une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$ constante dans le référentiel terrestre (galiléen) $\mathcal{R}_0(\text{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

À $t = 0$, le véhicule accélère avec une accélération $\vec{a} = a\vec{e_x}$ constante, avec $a = 5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

L'étude du mouvement du pendule est menée dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à la voiture.



On rappelle que la force d'inertie d'entraînement vaut $\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e}$. Sous l'action de cette force, le pendule se stabilise pour une valeur particulière de l'angle θ notée θ_e.

a) Déterminer $\dfrac{f_{ie}}{P}$, le rapport de la norme de $\vec{f_{ie}}$ sur celle du poids .....

b) La force d'inertie d'entrainement est négligeable devant le poids.

(a) vrai (b) faux

.....

c) Décomposer le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

d) Décomposer le vecteur $\vec{T}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

e) Décomposer le vecteur $\vec{f_{ie}}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

f) Parmi les quatre expressions du principe fondamental appliqué à la bille, dans le référentiel de la voiture, laquelle est juste ?

(a) $m\left.\dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{P} + \vec{T}$

(b) $m\left.\dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{f_{ie}} = \vec{P} + \vec{T}$

(c) $m\left.\dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{P} + \vec{T} + m\vec{a}$

(d) $m\left.\dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f_{ie}}$

.....

g) L'application du principe fondamental permet d'exprimer la position d'équilibre du pendule. Parmi les trois propositions, laquelle est homogène ?

(a) $\tan(\theta_e) = \dfrac{g}{ma}$ (b) $\tan(\theta_e) = \dfrac{a}{g}$ (c) $\tan(\theta_e) = mag$

.....

h) Grâce à la relation trouvée à la question précédente, calculer θ_e en degrés .....

Entraînement 2.12 — Palet sur un disque en rotation.

Un disque horizontal de centre O tourne autour de son axe (Oz) à vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$.

Un palet (assimilable à un point matériel de masse m) est posé en un point A du disque, à une distance OA $= d$. On rappelle la force d'inertie centrifuge : $m\omega^2\overrightarrow{\text{OA}}$.

a) Quelle est l'orientation de la force centrifuge ?

(a) $-\vec{e_\theta}$ (b) $\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_r}$ (d) $\vec{e_\theta}$

b) Sans frottement entre le disque et le palet, quel mouvement du palet peut-on prévoir ?

(a) Le palet se rapproche inexorablement du centre du disque.

(b) Le palet reste immobile dans le référentiel du disque.

(c) Le palet est expulsé radialement du disque.

Il existe une force de frottement telle que le palet reste immobile tant que la norme de la force d'inertie centrifuge est inférieure à μmg.

c) Déterminer l'expression de la valeur limite $\omega_{\max}$ de la vitesse angulaire en-deçà de laquelle le palet reste immobile.

d) Calculer $\omega_{\max}$ sachant que $d = 5\,\text{cm}$, $m = 150\,\text{g}$ et $\mu = 0{,}5$

Entraînement 2.13 — Anneau sur tige en rotation.

On s'intéresse dans cet entraînement au mouvement d'un anneau de masse m placé sur une tige en rotation à la vitesse angulaire ω. Cet anneau subit aussi une force de rappel exercée par un ressort de raideur k fixé sur l'axe de rotation. L'abscisse x de l'anneau sur la tige satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = 0$$

a) Quelle est la dimension du terme $\dfrac{k}{m}$?

On propose les solutions suivantes pour $x(t)$, dans lesquelles A, Ω, φ et β sont des constantes.

(a) $x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$

(b) $x(t) = A\cosh(\Omega t + \varphi)$

(c) $x(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\Omega t + \varphi)$

b) Quelle est la forme des solutions si $\omega^2 > \dfrac{k}{m}$?

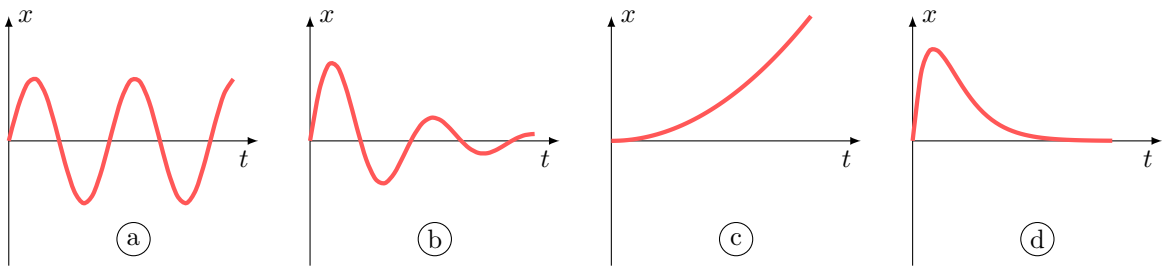
c) Quelle est la forme des solutions si $\omega^2 < \dfrac{k}{m}$?

d) On pose $\Omega^2 = \dfrac{k}{m} - \omega^2 > 0$. Expliciter la solution dans le cas où $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

.....

e) Parmi les trois solutions représentées sur les graphiques ci-dessous, laquelle correspond à la situation de la question b).

.....



Réponses mélangées

c $\sqrt{\dfrac{\mu g}{d}}$ d $\dfrac{m\omega_0^2 \ell \vec{e_r}}{2}$ b b a d T^{-2} d

c a $10\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ $T\sin(\theta_e)\vec{e_x} + T\cos(\theta_e)\vec{e_y}$ $-ma\vec{e_x}$ $2m\omega_0 v_1 \vec{e_r}$ $\ddot{r}\vec{e_r}$

b c d b c c $-mg\vec{e_y}$ c $-\omega^2 r\vec{e_r}$ c

$-2m\omega_0 v_1 \vec{e_\theta}$ b $2\omega\dot{r}\vec{e_\theta}$ b $-2m\Omega\dot{z}\cos\lambda\vec{e_x}$ c a $m\omega_0^2\ell\vec{e_r}$

b $2m\omega_0(v_2\vec{e_y} - v_1\vec{e_z})$ c $\dfrac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$ b a et b b $27°$ a

b 0,5 c Faux $\vec{0}$ a Faux $2m\omega_0 v_1\vec{e_x}$ Vrai $3{,}8\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

► Réponses et corrigés page 293

Électrostatique

Prérequis
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique.
Intégrales curvilignes, de surface et de volume.
Champs scalaires et vectoriels. Gradient. Théorème de Gauss.

Constantes utiles
→ Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
→ Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

Distributions de charge : symétries, invariances, charge totale

Entraînement 3.1 — Calculs intégraux de longueurs, surfaces et volumes.

On rappelle les déplacements élémentaires dans chacun des trois systèmes de coordonnées :
- en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$
- en coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$
- en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$

a) Exprimer l'élément de circonférence $\mathrm{d}\mathcal{C}$ d'un disque de rayon R .....

b) Grâce à un calcul intégral, retrouver la circonférence d'un cercle de rayon R.

.....

c) En coordonnées cylindriques, exprimer l'aire $\mathrm{d}\mathcal{S}$ de l'élément de surface orthogonal à $\vec{e}_z$.

.....

d) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver la surface d'un disque de rayon R .

e) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver le volume d'une boule de rayon R .

Entraînement 3.2 — Charge totale d'une distribution linéique.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la charge totale des distributions linéiques suivantes à l'aide de la relation : $Q = \int \lambda(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\ell_\mathrm{M}$.

a) Pour une tige de longueur ℓ chargée avec une densité linéique de charge uniforme λ_0.

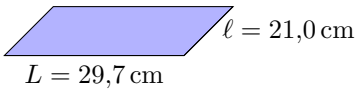
.....

b) Pour un anneau de rayon a dont la densité linéique de charge, non uniforme, est $\lambda(\mathrm{M}) = q_0\theta/a$ avec q_0 une constante et θ l'angle qui repère le point M sur l'anneau.

.....

Entraînement 3.3 — Feuille d'aluminium chargée.

Soit une feuille d'aluminium de format A4 à laquelle 1 000 électrons ont été arrachés. La feuille porte alors la charge électrique Q.



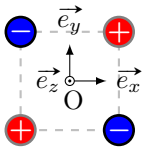
a) Exprimer la charge Q en fonction de la charge électrique élémentaire e .....

b) Exprimer la surface S de la feuille en fonction des longueurs L et ℓ .....

c) En déduire la valeur de la charge surfacique moyenne $\sigma = Q/S$ portée par la feuille ....

Entraînement 3.4 — Quadrupôle électrostatique.

On considère la distribution de charges ci-dessous.



a) Quels sont les trois plans de symétrie de la distribution ?

.....

b) Quels sont les deux plans d'antisymétrie de la distribution ?

.....

Entraînement 3.5 — Autour d'une sphère chargée.

Tous les résultats devront être donnés en écriture scientifique.

a) Quel est le volume en m^3 d'une sphère de rayon $R = 25\,\text{cm}$? .....

b) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulomb, si celle-ci est chargée avec une densité volumique uniforme de $\rho_0 = 50{,}0\,\text{nC} \cdot \text{m}^{-3}$?

.....

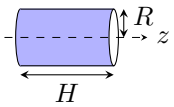
c) Quelle est l'aire de la surface de la sphère en m^2 ? .....

d) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulomb, si celle-ci est chargée avec une densité surfacique uniforme $\sigma = 8\,\mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$?

.....

Entraînement 3.6 — Tube chargé localement.

Un tube conducteur d'axe (Oz) possède une densité surfacique de charge $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, avec σ_0 une constante et θ l'angle des coordonnées cylindriques (r, θ, z).



a) Comment s'exprime l'aire d'un élément de surface $\mathrm{d}S$ du tube ?

(a) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (c) $R\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Comment s'exprime la charge totale Q portée par le tube ?

(a) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

(b) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

(c) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

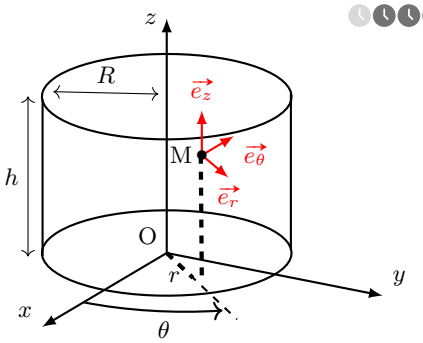
(d) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

c) À l'aide du calcul d'une intégrale, déterminer la charge totale Q .....

Entraînement 3.7 — Autour d'un cylindre chargé.

Soit un câble cylindrique d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon R, doté d'une densité volumique de charge ρ.



a) Laquelle de ces formules permet de calculer l'aire de la surface latérale du cylindre ?

(a) $\pi R^2 h$ (b) $2\pi R h$ (c) $4\pi R^2 h$ (d) $4\pi R h$

.....

b) Sans négliger les effets de bords, déterminer les invariances de cette distribution de charge si,

$$\text{pour } 0 \leqslant z \leqslant h,\ \rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

avec ρ_0 une constante homogène à une charge volumique.

(a) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_x}$ (c) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_z}$

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz) (d) aucune invariance

.....

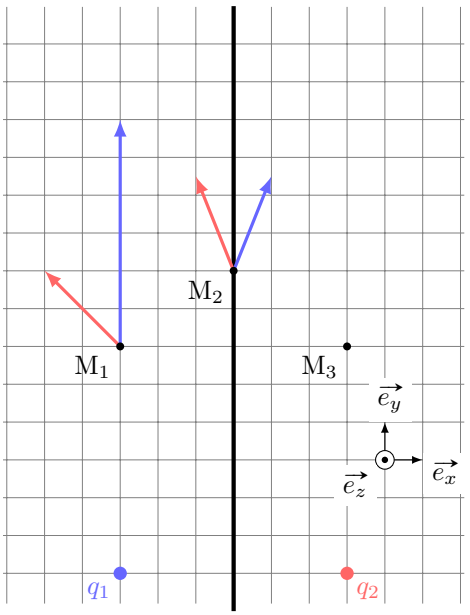
c) Même question si, pour $0 \leqslant z \leqslant h$, $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

d) Même question si le cylindre est de hauteur infinie avec $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3$ .....

De la distribution de charge au champ électrostatique

Entraînement 3.8 — Superpositions et symétries.

Sur le schéma ci-contre figurent, en M_1 et M_2, les champs électrostatiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ respectivement générés par les deux charges $q_1 = +e$ et $q_2 = +e$.



a) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_1 en fonction des vecteurs de la base.

.....

b) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_2 en fonction des vecteurs de la base.

.....

Le plan $(M_2, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, nommé $\mathcal{P}$, est un plan de symétrie de la distribution de charge.

c) Quelles propositions sont correctes ?

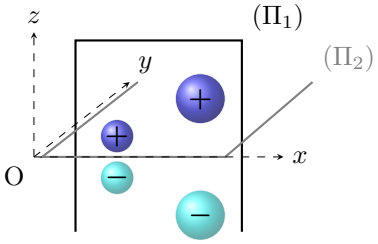
(a) $\vec{E}(M_3) = -2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (c) $\vec{E}(M_2) \in \mathcal{P}$

(b) $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M_2) \perp \mathcal{P}$

.....

Entraînement 3.9 — Symétrie d'une distribution volumique de charge.

Le champ électrostatique créé par la distribution volumique ci-contre est noté $\vec{E}$. Le plan (Π_1) est un plan de symétrie de la distribution. Le plan (Π_2) est un plan d'antisymétrie de la distribution.



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution, le champ électrostatique appartient (resp. est perpendiculaire) à ce plan.

a) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_1) ? .....

b) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_2) ? .....

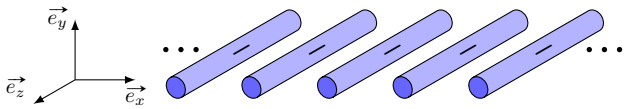
c) En un point $M(x, 0, 0)$ de l'axe (Ox), identifier l'expression correcte parmi celles proposées.

(a) $\vec{E}(M) = \vec{0}$ (b) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_x}$ (c) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_z}$

.....

Entraînement 3.10 — Invariances d'une distribution volumique de charge.

La grille infinie représentée ci-dessous est constituée de tiges infinies selon $\vec{e_z}$ et est chargée uniformément négativement.



Soit M un point de l'espace repéré par (x, y, z).

Sachant que les composantes du champ électrique $\vec{E}$ possèdent les mêmes invariances que celles de la distribution de charges, lesquelles de ces expressions sont valides si l'étude des symétries a déjà été menée ?

(a) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(y)\vec{e_x} + E_y(y)\vec{e_y}$

(b) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y)\vec{e_x} + E_y(x,y)\vec{e_y}$

(c) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y) + E_y(x,y)$

(d) $\|\vec{E}\|(x,y,z) = \|\vec{E}\|(x,y,0)$

.....

Entraînement 3.11 — Homogénéités.

Dans les expressions suivantes, ρ, σ et λ sont des densités de charge volumique, surfacique et linéique. Le potentiel électrostatique est noté V et a, ℓ, h et r sont des longueurs.

a) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à une charge électrique.

(a) $4\pi a^2 \rho$ (b) $\lambda \pi a^2$ (c) $\rho \pi a^2 h$ (d) $\dfrac{\sigma \ell^3}{a}$

.....

b) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à un champ électrostatique.

(a) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (b) $(V_2 - V_1)e$ (c) $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (d) $\dfrac{\rho r}{\varepsilon_0}$

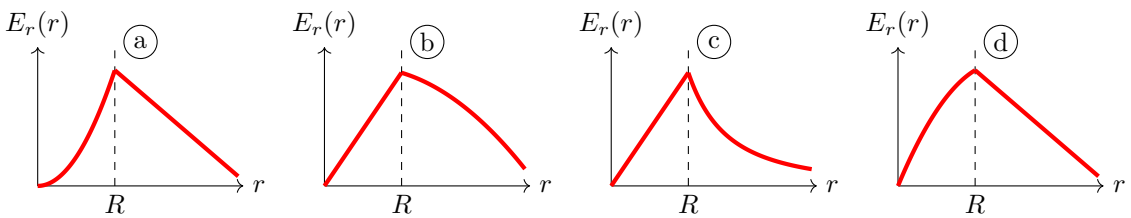
.....

Entraînement 3.12 — Tracé d'une composante du champ.

La composante radiale du champ électrostatique créé au point M par une sphère de centre O, de rayon R, dotée d'une densité volumique de charge ρ_0, est donnée en fonction de la distance $r = \text{OM}$ par

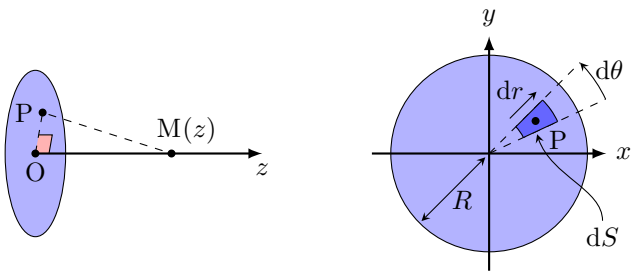
$$E_r(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad E_r(r > R) = \frac{3\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de E_r en fonction de r ? .....



Entraînement 3.13 — Calcul d'un champ électrostatique par intégration.

Un disque, d'axe (Oz) et de rayon R, possède une charge surfacique uniforme σ. On note P un point du disque tandis que M est un point de l'espace qui appartient à l'axe (Oz).



a) Comment s'exprime l'aire élémentaire dS centrée sur P(r,θ) ?

(a) d$S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$
(b) d$S = r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$
(c) d$S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$
(d) d$S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

b) Quelle est l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z$?

(a) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = \mathrm{PM}$
(b) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = \mathrm{d}z$
(c) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = z$
(d) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = r$

c) Quelle est l'expression de la distance $\mathrm{PM} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right\|$?

(a) $\mathrm{PM} = z^2 + r^2$
(b) $\mathrm{PM} = \sqrt{z^2 + r^2}$
(c) $\mathrm{PM} = \sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2}$
(d) $\mathrm{PM} = \mathrm{d}r + \mathrm{d}z$

Le principe de superposition énonce que le champ électrostatique en M est la somme des champs électrostatiques créés par chaque élément de surface d'aire dS et de charge d$Q = \sigma\,\mathrm{d}S$. L'expression du champ créé par une source ponctuelle permet alors d'exprimer la composante axiale $E_z = \vec{E} \cdot \vec{e}_z$ du champ créé par le disque sur l'axe (Oz) par :

$$E_z = \iint_P \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z}{\mathrm{PM}^3} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

d) Calculer l'intégrale précédente à l'aide du changement de variable $u = r^2$.

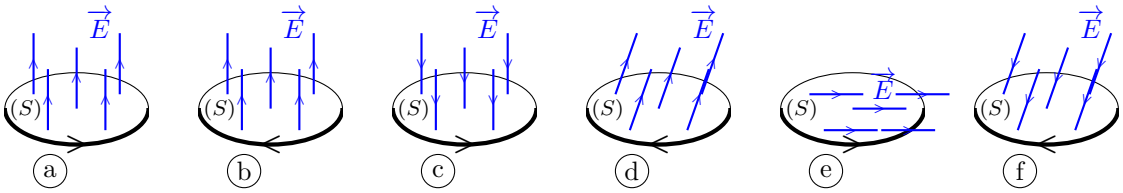
e) Simplifier l'expression obtenue en d) si $z \ll R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé.

f) Sachant que $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε quand $\varepsilon \to 0$, simplifier l'expression obtenue en d) si $z \gg R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par une charge ponctuelle $Q_0 = \pi R^2 \sigma$.

Flux électrostatique

Entraînement 3.14 — Signe d'un flux électrostatique à travers une surface.

Le flux $\phi = \iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface orientée (S) dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).



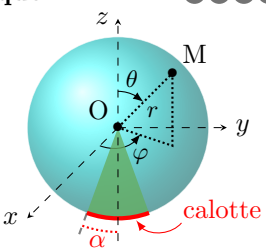
a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$? .....

b) Que vaut ϕ dans le cas (e) ? .....

Entraînement 3.15 — Flux électrostatique à travers une calotte sphérique.

Une charge ponctuelle q, placée au centre O d'un repère sphérique, crée le champ électrostatique $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e}_r$ avec (r, θ, φ) les coordonnées sphériques du point M .

La calotte sphérique représentée ci-contre (en deux dimensions) est la portion de sphère de rayon R qui intersecte le demi-cône d'axe de révolution $(\mathrm{O}z)$ et de demi-angle $\alpha > 0$.



a) Comment s'exprime un élément de surface $\mathrm{d}S$ de la calotte sphérique ?

(a) $\mathrm{d}S = R^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$
(b) $\mathrm{d}S = R \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$
(c) $\mathrm{d}S = R \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$
(d) $\mathrm{d}S = R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

b) Comment s'exprime le flux ϕ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers la calotte sphérique ?

(a) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=\pi-\alpha}^{\pi+\alpha}\int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$
(b) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}\int_{\theta=0}^{\pi} \vec{E} \cdot R^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$
(c) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$
(d) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$

.....

c) Calculer la double intégrale. Écrire le résultat obtenu sous la forme $\phi = K(1 - \cos\alpha)$, avec K une constante à exprimer en fonction de q et ε_0. .....

d) Réaliser l'application numérique de ϕ dans le cas où $\alpha = \pi$ et $q = e$. .....

Entraînement 3.16 — Avec le théorème de Gauss.

Une distribution volumique, de charge volumique inconnue, crée un champ électrostatique dont l'expression en repérage sphérique est $\vec{E}(\mathrm{M}) = E_r\,\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\,\vec{e}_r$, où q et a sont des constantes positives.

a) Exprimer le flux électrostatique $\phi(\vec{E})$ à travers une sphère de rayon r en fonction de $E(r)$ et r.

.....

b) Exprimer la charge $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E})$ (théorème de Gauss) située à l'intérieur de la sphère de rayon r.

(a) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$ (c) $q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(b) $q\left(a+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$ (d) $-q\,\mathrm{e}^{-r/a}$

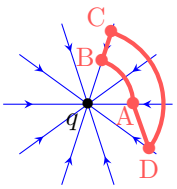
.....

c) Quelles sont les valeurs limites de Q pour $r \to 0$ et $r \to +\infty$? .....

Circulation du champ électrostatique – Potentiel électrostatique

Entraînement 3.17 — Signe d'une circulation électrostatique le long d'un chemin.

Les lignes du champ électrostatique $\vec{E}$ produit par une charge ponctuelle q négative convergent vers cette charge. La circulation $\mathcal{C} = \displaystyle\int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ le long d'un chemin orienté dépend de l'orientation de ce chemin.



Pour chaque chemin orienté, indiquer si la circulation $\mathcal{C}$ est positive, négative ou nulle.

a) A→B . b) B→C . c) C→D . d) D→A .

Entraînement 3.18 — Orientation du champ au sein d'un condensateur plan.

Le schéma ci-contre représente un condensateur plan dont les armatures sont portées aux potentiels $V_1 = -6\,\mathrm{V}$ et $V_2 = 3\,\mathrm{V}$. Deux surfaces équipotentielles sont représentées en pointillés.

a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$?

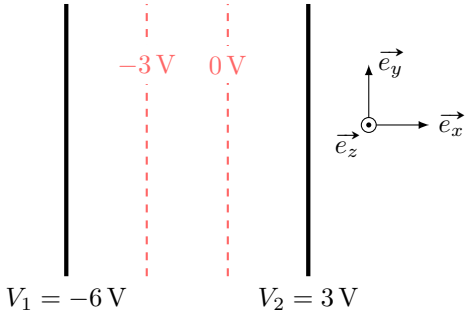
(a) $\vec{e}_x$ (b) $-\vec{e}_y$ (c) $-\vec{e}_x$ (d) $\vec{e}_z$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$?

(a) $\vec{e}_x$ (b) $-\vec{e}_y$ (c) $-\vec{e}_x$ (d) $\vec{e}_z$

.....



Entraînement 3.19 — Circulation et différence de potentiel.

Soit un segment orienté allant d'un point A à un point B de coordonnées cartésiennes respectives $(a, 0)$ et $(2a, 2a)$. Le vecteur-déplacement élémentaire en repérage cartésien s'exprime comme $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable le long du segment AB ?

(a) $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ (b) $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$ (c) $\mathrm{d}x = 0$ (d) $\mathrm{d}y = 0$

Soit un champ $\vec{E} = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-x/a}\right)\vec{e_x}$, avec $a > 0$.

b) Sachant que le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels électriques V décroissants, déterminer sans calcul lequel de $V(x = a)$ ou $V(x = 2a)$ est le potentiel le plus élevé .....

c) La circulation électrostatique sur le segment AB est reliée à la différence de potentiel électrique par

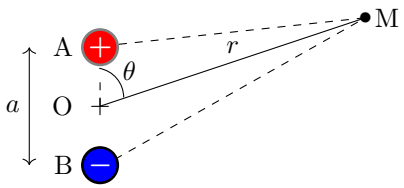
$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}.$$

Exprimer $V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B})$ en fonction de E_0 et a .....

Entraînement 3.20 — Approximation dipolaire.

Soit un dipôle électrostatique constitué de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$, séparées par une distance $\mathrm{AB} = a$. D'après le principe de superposition, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(\mathrm{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathrm{AM}} - \frac{1}{\mathrm{BM}}\right).$$



a) Laquelle de ces propositions donne l'expression de $\mathrm{AM} = \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|$ au carré en fonction de a et θ ?

(a) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\sin(\theta)$ (c) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$

(b) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$

On se place dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire loin du doublet de charges : $r \gg a$.

b) Réaliser un développement limité de $1/\mathrm{AM}$ à l'ordre 1 en a/r .....

c) Même question pour $1/\mathrm{BM}$ .....

d) En déduire l'expression du potentiel $V(\mathrm{M})$ dans l'approximation dipolaire.

.....

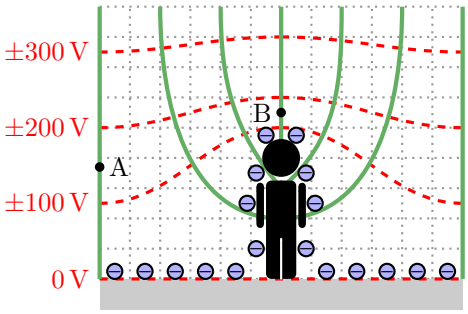
Entraînement 3.21 — Effet de pointe.

Un individu porte une charge négative, ce qui modifie localement les propriétés du champ électrostatique. La figure ci-dessous représente qualitativement les lignes de champ en trait plein tandis que les (surfaces) équipotentielles sont illustrées en pontillés. L'échelle du schéma est 1 division ↔ 40 cm.

a) Comment sont orientées les lignes de champ électrostatique ?

(a) vers l'individu
(b) sortant de l'individu

.....



b) Quel est le signe des valeurs de potentiel électrostatique des équipotentielles représentées ? .....

c) Évaluer l'ordre de grandeur du champ en A .

d) Indiquer par une analyse de la carte de champ, et sans aucun calcul, laquelle de ces propositions est vraisemblable :

(a) $\vec{E}(\mathrm{B}) > \vec{E}(\mathrm{A})$
(b) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| > \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$
(c) $\vec{E}(\mathrm{B}) = \vec{E}(\mathrm{A})$
(d) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| < \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$

.....

Toujours plus d'électrostatique

Entraînement 3.22 — Charge totale et charge moyenne.

La charge totale d'une distribution occupant un volume V s'exprime comme $Q = \iiint_{(V)} \rho \, \mathrm{d}V$ avec ρ la charge volumique et $\mathrm{d}V$ le volume élémentaire dont les expressions en repérages cartésien, cylindrique et sphérique sont respectivement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

Déterminer la charge totale et la charge volumique moyenne $\rho_\mathrm{m} = Q/V$ des distributions ci-dessous.

On notera que ρ_0 est une constante homogène à une charge volumique.

a) Un pavé, d'épaisseur $2H$ selon la direction $\vec{e_z}$ ($-H \leqslant z \leqslant +H$) et de base d'aire $\mathcal{A}$ a une charge volumique $\rho(x,y,z) = \rho_0\left(1 - \dfrac{z^2}{H^2}\right)$.

.....

b) Un cylindre, de rayon R et de hauteur H, a une charge volumique $\rho(r,\theta,z) = \rho_0\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$.

.....

c) L'espace (infini) a une charge volumique $\rho(r,\theta,\varphi) = \rho_0 \dfrac{R^2}{r^2} \exp\left(-\dfrac{r}{R}\right)$ où R est une constante homogène à une distance.

.....

Entraînement 3.23 — Analyse dimensionnelle.

Laquelle de ces expressions n'est pas homogène à un potentiel électrostatique V (ou une tension U) si C est une capacité de condensateur, q une charge électrique, T une température, R la constante des gaz parfaits, $\mathcal{N}_\text{A}$ la constante d'Avogadro, E_z un champ électrostatique et d une distance ?

(a) $U = Cq$ (b) $V = RT/q\mathcal{N}_\text{A}$ (c) $U = E_z d$

Entraînement 3.24 — Calcul de divergence de champ électrostatique.

Le champ électrostatique et sa divergence en repérage cylindrique sont respectivement

$$\vec{E} = E_r\vec{e_r} + E_\theta\vec{e_\theta} + E_z\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,.$$

Exprimer la divergence du champ $\vec{E_1} = \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_r}$ avec α une constante .....

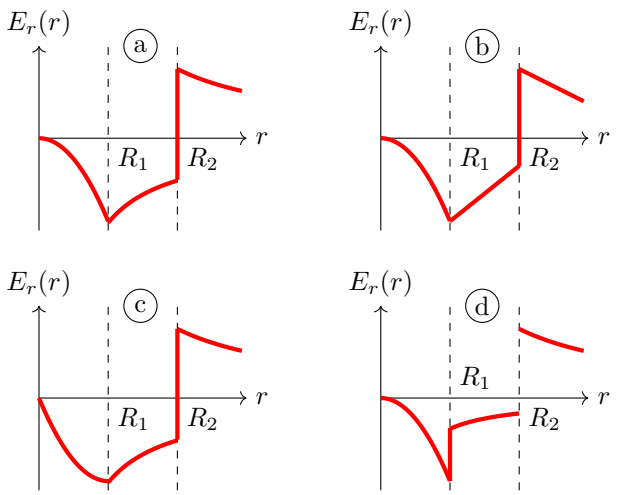
Entraînement 3.25 — Tracé d'une composante du champ – *Bis repetita*.

Une distribution de charge à symétrie cylindrique, d'axe (Oz), de rayons caractéristiques R_1 et R_2, produit en un point de coordonnée radiale r un champ électrostatique de composante radiale donnée par

$$\begin{cases} E_r(r < R_1) = -\dfrac{\alpha r^2}{3\varepsilon_0} \\ E_r(R_1 < r < R_2) = -\dfrac{\alpha R_1^3}{3\varepsilon_0 r} \\ E_r(r > R_2) = \dfrac{1}{\varepsilon_0 r}\left(-\dfrac{\alpha R_1^3}{3} + \sigma R_2\right) \end{cases}$$

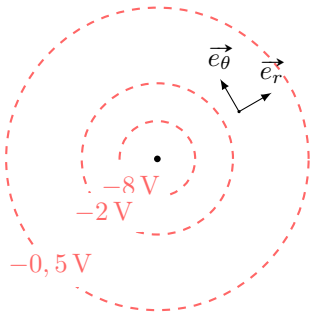
avec α et σ deux constantes positives.

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de E_r en fonction de r ? .....



Entraînement 3.26 — Orientation du champ créé par une charge ponctuelle.

Sur le schéma ci-contre, on trouve 3 surfaces équipotentielles générées par une charge ponctuelle placée au centre.



a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$?

(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$?

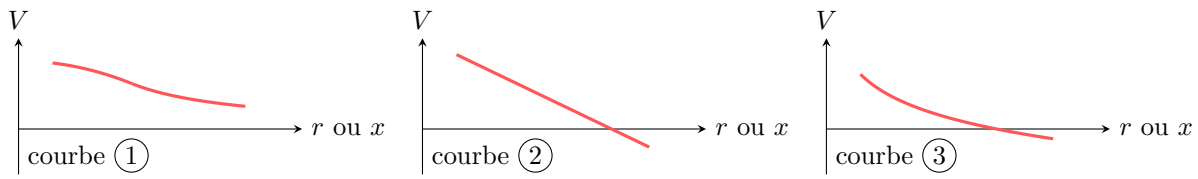
(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

Entraînement 3.27 — Un potentiel, une courbe.

Les expressions des potentiels électrostatiques V_a, V_b et V_c données ci-après rendent compte de situations physiques volontairement non détaillées ici. Les fonctions V_a, V_b et V_c sont définies pour des valeurs de r strictement positives. Enfin, λ, σ et ρ sont des constantes positives.

$$V_\mathrm{a}(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad , \quad V_\mathrm{b}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) & \text{si } r \leqslant R \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases} \quad \text{et} \quad V_\mathrm{c}(x) = V_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$



Attribuer à chaque potentiel électrostatique une courbe.

a) V_a ..... b) V_b ..... c) V_c .....

Entraînement 3.28 — Énergie électrostatique au sein d'un condensateur.

Soit un condensateur sphérique dont l'armature interne est une sphère de rayon R et l'armature externe une sphère de rayon $R + h$. Le champ électrostatique entre les deux armatures est $\vec{E} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$, avec $-Q$ la charge portée par l'armature interne.

L'énergie électrostatique stockée entre les armatures du condensateur est

$$\mathcal{E} = \int_{r=R}^{R+h}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de R, h, Q et ε_0 .....

Réponses mélangées

$\underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1-\cos\alpha)$ (b) $2{,}57\times10^{-15}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$ $6{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m^3}$ (b) $\lambda_0\ell$

(c) $R\,\mathrm{d}\theta$ $\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ $7{,}9\times10^{-1}\,\mathrm{m^2}$ Courbe (3) (a) et (f) $\dfrac{4}{3}\pi R^3$

(b) (c) $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{h}{R(R+h)}$ πR^2 $2\pi R$ (b) et (c) $\dfrac{1}{r}\left(1+\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$

0 $1\times10^{2}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$. q et 0 Courbe (2) négative nulle (b) (d)

(c) $Q=4\rho_0\mathcal{A}H/3$, $\rho_\mathrm{m}=2\rho_0/3$ (c) et (d) $(\mathrm{O},\vec{e_x},\vec{e_z})$ et $(\mathrm{O},\vec{e_y},\vec{e_z})$ $L\times\ell$

$3{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{C}$ (a) (a) $6\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ positive (b) $4\pi r^2E(r)$ $-2\vec{e_x}+8\vec{e_y}$

$5\vec{e_y}$ (d) $+1\,000\times e$ $2\pi^2q_0$ (b) $\vec{e_y}$ $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\sqrt{\dfrac{z^2}{z^2+R^2}}\right)$ positif

(b) et (d) (c) (a) $\dfrac{1}{r}\left(1-\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$ Courbe (1) 0 (d) (d)

$\vec{e_z}$ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ (c) $V(a)$ (c) (a) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (c) nulle (a) et (d)

$(\mathrm{O},\vec{e_x}+\vec{e_y},\vec{e_z})$, $(\mathrm{O},\vec{e_x}-\vec{e_y},\vec{e_z})$ et $(\mathrm{O},\vec{e_x},\vec{e_y})$ 0 $Q=\rho_0\pi R^2H/2$, $\rho_\mathrm{m}=\rho_0/2$ $\dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (b)

(b) et (c) $Q=\rho_0 4\pi R^3$, $\rho_\mathrm{m}=0$ $E_0a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1})$ (d) $1{,}8\times10^{-8}\,\mathrm{V\cdot m}$

▶ Réponses et corrigés page 297

Magnétostatique

Prérequis
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique. Intégrales curvilignes, de surface et de volume. Champs scalaire et vectoriel. Théorème d'Ampère.

Constantes utiles

→ Charge électrique élémentaire : $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

→ Masse de l'électron : $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$

Distributions de courant et densités de courant

Entraînement 4.1 — Dimension de densités de courant.

La dimension d'une intensité électrique est notée I, celle d'un temps T, et celle d'une longueur L.

a) On note $\vec{j}$ une densité volumique de courant, $\vec{j_\mathrm{s}}$ une densité surfacique de courant et I l'intensité d'un courant. Quelles sont les relations correctes ?

(a) $I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ (b) $\vec{j} = \iint I\mathrm{d}\vec{S}$ (c) $I = \iiint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{V}$ (d) $I = \int \vec{j_\mathrm{s}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$

b) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité volumique de courant $\vec{j}$?

(a) $\mathrm{I\cdot L^{-3}}$ (b) $\mathrm{I\cdot T\cdot L^{-2}}$ (c) $\mathrm{I\cdot T\cdot L^{-3}}$ (d) $\mathrm{I\cdot L^{-2}}$

c) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité surfacique de courant $\vec{j_\mathrm{s}}$?

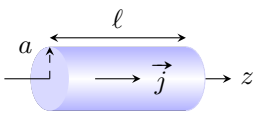
(a) $\mathrm{I\cdot L^{-1}}$ (b) $\mathrm{I\cdot T\cdot L^{-1}}$ (c) $\mathrm{I\cdot L^{2}}$ (d) $\mathrm{I\cdot L^{-2}}$

Entraînement 4.2 — Densité volumique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

où $\vec{j} = j_0 \dfrac{b}{r}\vec{e_z}$ est le vecteur densité volumique de courant, avec j_0 et b constants, et $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e_z}$ un élément de section orientée.



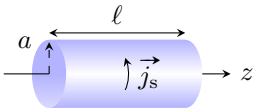
Exprimer I en fonction de la section S du conducteur, du rayon a et des constantes j_0 et b.

Entraînement 4.3 — Densité surfacique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \int \vec{j_s} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell},$$

où $\vec{j_s} = j_{s,0}\vec{e_\theta}$ est un vecteur densité surfacique de courant constant et $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}z\vec{e_z}$ un élément de longueur orientée.



Exprimer I en fonction de la longueur ℓ du conducteur et de la constante $j_{s,0}$.

.....

Symétries et invariances

Entraînement 4.4 — Vent solaire.

Le vent solaire est un flux de particules chargées, majoritairement constitué de protons et de noyaux d'hélium. Le Soleil est considéré comme ponctuel et placé à l'origine O d'un repère sphérique. En première approximation, le vent solaire est assimilé à un courant de particules radial et stationnaire.

a) Si l'émission est isotrope, quelle est l'expression simplifiée du vecteur densité de courant en M(r, θ, φ) ?

(a) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_\theta}$
(b) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_\theta(r)\vec{e_\theta}$
(c) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_r}$
(d) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r)\vec{e_r}$

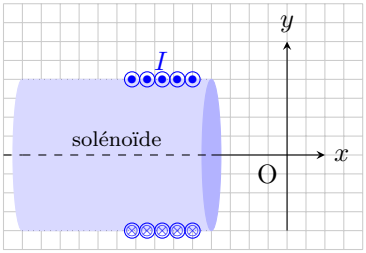
.....

b) Exprimer alors l'intensité I_R du courant électrique traversant une sphère de rayon R.

.....

Entraînement 4.5 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (I).

Soit un solénoïde d'axe (Ox), parcouru par un courant stationnaire d'intensité I.



On rappelle qu'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) d'une distribution de courant est un plan pour lequel les courants de la distribution sont répartis de manière strictement identique (resp. opposée) de part et d'autre du plan.

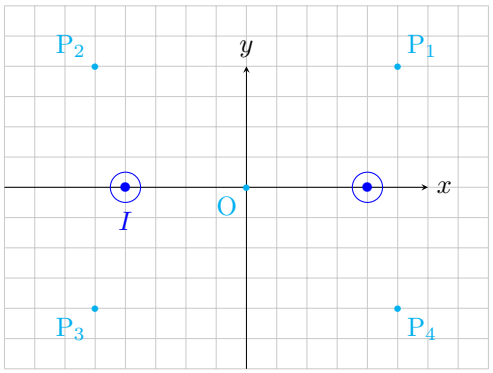
Parmi les propositions ci-dessous, quelles sont celles qui sont correctes ?

(a) Le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution.
(b) Le plan (xOy) est un plan d'antisymétrie de la distribution même si le solénoïde n'est pas infiniment long.
(c) Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie de la distribution.
(d) Le plan (xOz) est un plan de symétrie de la distribution seulement si le solénoïde est infiniment long.

.....

Entraînement 4.6 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (II).

On considère la situation suivante, où deux fils infinis sont parcourus par des courants de même intensité I et de même sens (de l'arrière vers l'avant).



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (respectivement d'antisymétrie) de la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire (respectivement appartient) à ce plan.

a) Le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions correctes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

(b) Au point O, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_z}$.

(c) Au point P_1, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

(d) Au point P_3, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

.....

b) Le plan $(y\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions incorrectes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_x}$ est normal à ce plan.

(b) $\vec{B}(\mathrm{P}_4) = B_y(\mathrm{P}_4)\vec{e_y} + B_z(\mathrm{P}_4)\vec{e_z}$

(c) Au point P_2, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_y}$.

(d) $\vec{B}(\mathrm{O}) = B(\mathrm{O})\vec{e_z}$

.....

c) Quelles sont les propositions incomplètes ou incorrectes ?

(a) Le plan $(x\mathrm{O}z)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

(b) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \vec{0}$

(c) Le champ $\vec{B}$ est toujours perpendiculaire au plan $(x\mathrm{O}z)$.

(d) $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\vec{B}(\mathrm{P}_1)$

.....

Entraînement 4.7 — Couche épaisse infinie parcourue par un courant.

Soit une couche infinie suivant les axes (Ox) et (Oy), située entre les plans d'équations $z = d$ et $z = -d$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$.

a) Exprimer l'intensité I du courant qui traverse la surface Σ orientée suivant $\vec{e_x}$ ...

b) Quelles sont les invariances de cette distribution de courant ?

(a) invariance par translation parallèlement à l'axe (Ox)

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz)

(c) invariance par translation parallèlement à l'axe (Oy)

(d) aucune invariance

.....

c) Le champ magnétostatique au point M est suivant le vecteur $\vec{e_y}$.

Sachant que les composantes du champ magnétostatique possèdent les mêmes invariances que la distribution, déterminer l'expression correcte.

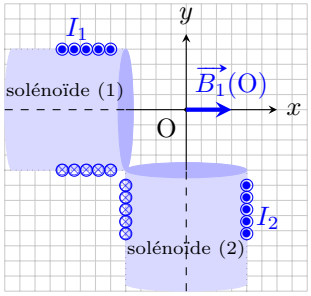
(a) $\vec{B}(M) = B_y(y)\vec{e_y}$ (b) $\vec{B}(M) = B_y(z)\vec{e_y}$ (c) $\vec{B}(M) = B_y(y,z)\vec{e_y}$

.....

Champs magnétostatiques

Entraînement 4.8 — Théorème de superposition.

Deux solénoïdes longs, parcourus par des courants stationnaires d'intensités I_1 et I_2, sont positionnés perpendiculairement entre eux et à égale distance d'un point O. En ce point, le champ magnétostatique produit par le solénoïde (1) est supposé s'écrire $\vec{B_1}(O) = \mu_0 n_1 I_1 \vec{e_x}$, avec n_1 le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (1).



a) Par analogie avec l'expression fournie pour le solénoïde (1), écrire le champ magnétostatique produit par le solénoïde (2) au point O.

.....

b) D'après le théorème de superposition, comment s'écrit alors le champ total produit au point O ?

(a) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 + n_2 I_2)\vec{e_z}$

(b) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)\vec{e_z}$

(c) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)(\vec{e_x} + \vec{e_y})$

(d) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 \vec{e_x} - n_2 I_2 \vec{e_y})$

.....

Entraînement 4.9 — Analyse dimensionnelle et champ magnétique.

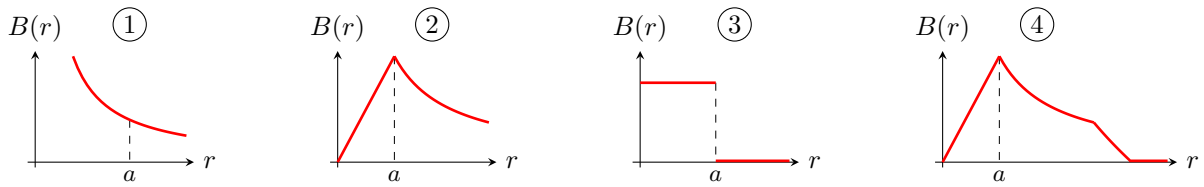
Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, avec $\vec{v}$ une vitesse, q une charge électrique et $\vec{B}$ un champ magnétique, déterminer laquelle des expressions ci-dessous est homogène à la norme B d'un champ magnétique si m est une masse et R un rayon.

(a) $\dfrac{qv}{mR}$ (b) $\dfrac{mR}{qv}$ (c) $\dfrac{qR}{mv}$ (d) $\dfrac{mv}{qR}$

.....

Entraînement 4.10 — Graphes et expressions d'un champ magnétique.

On donne les graphes associés aux champs magnétiques créés par divers dispositifs, chacun étant parcouru par un courant d'intensité I.



Le champ magnétique d'un conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant volumique uniforme est donné par

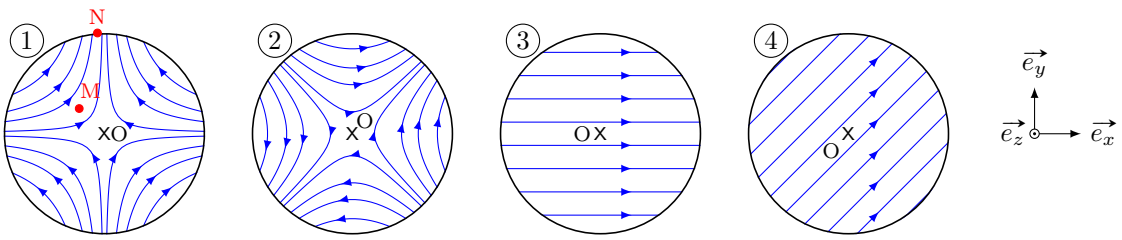
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \text{ pour } 0 < r < a \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ pour } r > a.$$

Quel graphe correspond au champ magnétique créé par ce conducteur cylindrique ? .....

Entraînement 4.11 — Champ magnétostatique quadrupolaire.

En repérage cartésien et dans le plan d'équation $z = 0$, les composantes du champ magnétostatique créé par un quadrupôle sont $B_x = ky$, $B_y = kx$ et $B_z = 0$, avec k une constante non nulle.

a) Quelle carte de champ correspond à l'expression du champ donnée ci-dessus ? .....



b) En ce qui concerne la carte de champ (1), quelle est la proposition valide ?

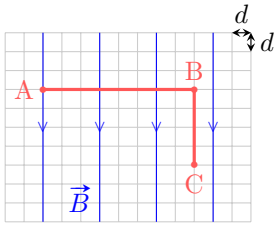
(a) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \vec{B}(\mathrm{N})$ (b) $B(\mathrm{M}) < B(\mathrm{N})$ (c) $B(\mathrm{M}) > B(\mathrm{N})$

.....

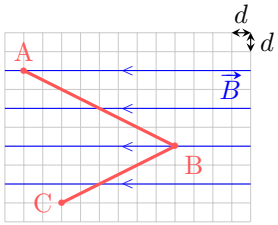
Circulation et flux magnétostatiques

Entraînement 4.12 — Circulation d'un champ magnétostatique sur un chemin.

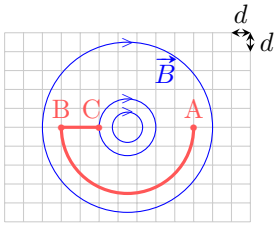
La circulation $\mathcal{C} = \int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un chemin orienté (Γ) dépend de l'orientation de ce chemin. Pour chaque cas, exprimer $\mathcal{C}$ le long du chemin $\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}$ en fonction du pas d du quadrillage. Sur chaque ligne de champ, la norme B du champ est supposée uniforme.



a) .....



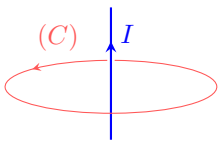
b) .....



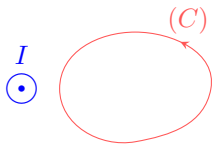
c) .....

Entraînement 4.13 — Courants enlacés.

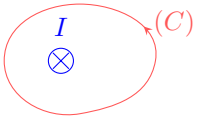
Pour chaque cas, exprimer l'intensité I_{enl} des courants enlacés par le contour (C) en fonction de l'intensité du courant I. Attention aux signes !



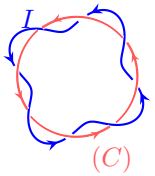
a) .....



b) .....



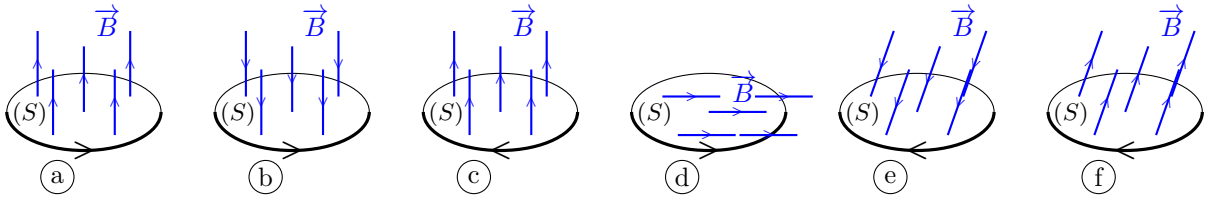
c) .....



d) .....

Entraînement 4.14 — Signe d'un flux magnétostatique à travers une surface.

On sait que le flux $\phi = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ à travers une surface orientée (S) dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).

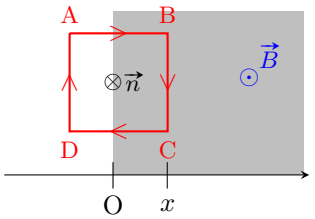


a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$? .....

b) Que vaut ϕ dans le cas (d) ? .....

Entraînement 4.15 — Flux à travers une spire carrée.

Soit une spire carrée de côté a, orientée dans le sens ABCD. On note x l'abscisse du côté BC. Dans le demi-espace tel que $x \geqslant 0$, règne un champ magnétostatique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire au plan de la spire.

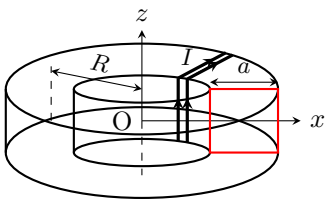


Exprimer le flux magnétostatique à travers la spire orientée, de normale $\vec{n}$, défini par $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$.

a) Pour $x < 0$ ... b) Pour $x \in [0, a]$ c) Pour $x > a$ ...

Entraînement 4.16 — Théorème d'Ampère et flux d'un champ non-uniforme.

Un fil conducteur est bobiné en N spires jointives sur un tore circulaire de rayon moyen R à section carrée de côté a. La normale de chaque spire est orientée suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$ de la base cylindrique. L'intensité du courant parcourant la bobine est notée I.



Le champ magnétostatique créé par cette bobine à l'intérieur du tore s'écrit : $\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$.

a) Soit un cercle de centre O, de rayon $R - \dfrac{a}{2} < r < R + \dfrac{a}{2}$ et orienté suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$. Quelle est l'intensité du courant enlacé par ce cercle ?

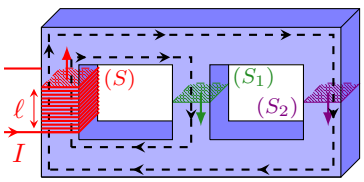
(a) I (b) NI (c) $\dfrac{a}{R}I$ (d) $\dfrac{a}{R}NI$

b) Le théorème d'Ampère s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\text{enl}}$, avec I_{enl} l'intensité du courant enlacé par le contour fermé choisi. En déduire l'expression de la composante $B(r)$ du champ .....

c) Exprimer le flux $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$ à travers la surface d'une spire .....

Entraînement 4.17 — Flux magnétostatique au sein d'un circuit magnétique.

Dans le circuit magnétique représenté ci-contre, de perméabilité relative $\mu_\text{r} = 4\,000$, chaque colonne possède une section carrée de côté $a = 20\,\text{cm}$. Celle de gauche est bobinée, formant un solénoïde de $N = 1\,000$ spires jointives et de longueur $\ell = 10\,\text{cm}$.



Le circuit est alimenté par un courant d'intensité $I = 200\,\text{mA}$. Le champ magnétostatique produit est guidé dans le circuit selon les lignes fléchées en pointillés et a pour intensité $B = \mu_0\mu_\text{r}NI/\ell$.

a) Calculer avec un chiffre significatif la valeur du champ magnétostatique au sein du solénoïde.

b) Le flux magnétostatique à travers (S) s'exprime comme $\phi = NBS$. Calculer ϕ .....

c) Sachant que le flux ϕ_2 traversant (S_2) vérifie $4\phi_2 = \phi$, calculer le flux ϕ_1 traversant (S_1) .

Dipôle magnétostatique

Entraînement 4.18 — Spire circulaire et développement dipolaire.

Le champ magnétostatique créé en un point $\mathrm{M}(0,0,z)$ par un courant d'intensité I parcourant une spire de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}z)$ est $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e_z}$.

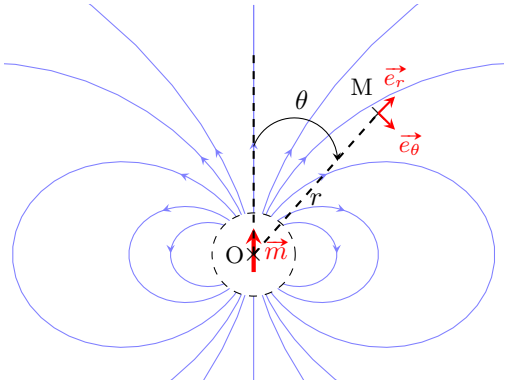
a) Quel est le moment magnétique associé à cette source de champ magnétostatique ?

(a) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I$ (b) $\vec{\mathcal{M}} = \mu_0 \pi R^2 I \vec{e_z}$ (c) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{e_z}$

b) Simplifier l'expression du champ magnétostatique dans l'approximation dipolaire $z \gg R$.

Entraînement 4.19 — Champ créé par un dipôle.

La carte de champ d'un dipôle magnétique de centre O et de moment magnétique $\vec{m}$ est représentée ci-contre. Le champ magnétostatique est noté $\vec{B}$.



En s'aidant de la carte fournie et en étudiant la situation pour certains angles particuliers, identifier l'expression correcte de $\vec{B}$ en un point M quelconque loin du dipôle.

(a) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} - \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

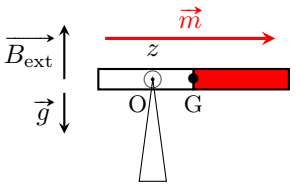
(b) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} + \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

(c) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

(d) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

Entraînement 4.20 — Équilibre d'un aimant.

Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{m}$, est posé sur une pointe en un point O différent de son centre de gravité G. L'ensemble est plongé dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ vertical uniforme. L'aimant subit le couple magnétique de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. À l'équilibre, il est à l'horizontale.



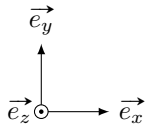
a) Exprimer la projection du moment $\vec{\Gamma}$ suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$

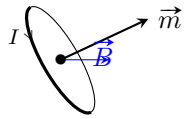
b) Le moment du poids par rapport à l'axe $(\mathrm{O}z)$ s'écrit $-dMg$, avec M la masse de l'aimant et $d = \mathrm{OG}$. En supposant qu'il n'y a pas d'autre moment, exprimer la distance d à l'équilibre.

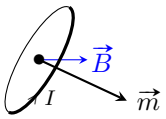
Entraînement 4.21 — Moment de force magnétique.

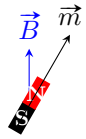
On rappelle qu'un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$, baignant dans un champ magnétostatique extérieur uniforme $\vec{B}$, subit des forces magnétiques de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Pour chaque situation suivante (boucle de courant ou aimant droit), les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan (Oxy). Indiquer la direction et le sens du moment $\vec{\Gamma}$.









a) ..... b) ..... c) ..... d) .....

Entraînement 4.22 — Force exercée sur un dipôle.

Un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ non uniforme subit la force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{\text{p}})$, avec $E_{\text{p}} = -\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. En coordonnées cylindriques, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(f(r)) = \dfrac{\text{d}f}{\text{d}r}\vec{e_r}$.

a) Déterminer l'expression de $\vec{F}$ pour un dipôle qui serait de même direction et de même sens qu'un champ d'expression $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$ (fil rectiligne infini d'axe (Oz)).

.....

b) Vers quelles zones le dipôle est-il alors attiré ?

(a) celles de champ plus faible (b) celles de champ plus intense

.....

Toujours plus de magnétostatique

Entraînement 4.23 — Encore une analyse dimensionnelle (I).

Quelle expression est homogène à la norme B d'un champ magnétique si I est une intensité électrique, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et R un rayon ?

(a) $\dfrac{I}{2\pi R}$ (b) $\dfrac{2\pi R\mu_0}{I}$ (c) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (d) $\dfrac{2\pi\mu_0}{IR}$

.....

Entraînement 4.24 — Encore une analyse dimensionnelle (II).

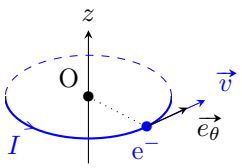
Quelle expression est homogène à une norme B de champ magnétique si I est une intensité électrique, N un nombre de spires, S une surface et L une inductance ?

(a) $B = \dfrac{LI}{NS}$ (b) $B = \dfrac{LS}{NI}$ (c) $B = \dfrac{NS}{LI}$ (d) $B = \dfrac{NL}{IS}$

.....

Entraînement 4.25 — Moment magnétique élémentaire : magnéton de Bohr.

Dans le cadre du modèle classique de Bohr, l'électron (charge $-e$, masse m_e) de l'atome d'hydrogène décrit un cercle (rayon r, période de révolution T) centré sur le noyau atomique (origine O du repère). L'orbite est supposée dans le plan $z = 0$. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ indique le sens de rotation de l'électron. La constante de Planck est $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.



a) En considérant que l'électron définit une boucle de courant circulaire (une spire), comment s'exprime l'intensité I correspondante (voir schéma pour l'orientation) ?

(a) $I = eT$ (b) $I = e/T$ (c) $I = -eT$ (d) $I = -e/T$

b) De loin, le système est équivalent à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$, avec $\vec{S}$ le vecteur surface de la spire. Donner l'expression de $\vec{m}$ en fonction de e, T, r et $\vec{e_z}$.

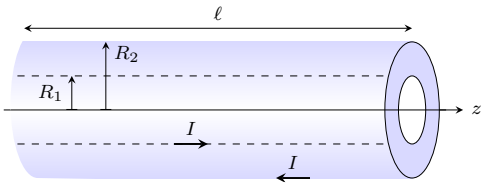
c) Le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau (point O) est $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_\mathrm{e}}{T}\vec{S}$. Montrer alors que $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec γ le rapport gyromagnétique de l'électron à exprimer en fonction de e et m_e.

d) La quantification du moment cinétique $\|\vec{\sigma}\| = n\hbar$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, conduit à définir un moment magnétique élémentaire μ_B (magnéton de Bohr). Indiquer alors la ou les propositions correctes.

(a) $\mu_\mathrm{B} = \hbar\gamma$ (b) $\mu_\mathrm{B} = \dfrac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}}$ (c) $\mu_\mathrm{B} = 9{,}28 \times 10^{-24}\,\mathrm{N \cdot m}$

Entraînement 4.26 — Énergie magnétique d'un câble coaxial.

Un cylindre long et creux de rayon R_1 est parcouru en surface par un courant d'intensité I. Ce courant « revient » par un cylindre de rayon $R_2 > R_1$, coaxial au premier et d'épaisseur négligeable. Cet ensemble forme un câble coaxial de longueur ℓ et d'axe $(\mathrm{O}z)$.



Le champ magnétostatique produit est, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{pour } R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

a) Exprimer le flux propre Φ_p, c'est-à-dire le flux du champ magnétostatique à travers une tranche du câble de surface $S = \ell R_2$, en fonction de I, ℓ, R_1 et R_2.

.....

b) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\text{p}}{\ell I}$ du câble en fonction de R_1 et R_2.

.....

On rappelle que la densité volumique d'énergie magnétique a pour expression $w_\text{m} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ et que l'énergie magnétique s'exprime alors comme $W_\text{m} = \iiint w_\text{m}\,\mathrm{d}\tau$.

c) Déterminer l'expression de l'énergie magnétique W_m correspondant à une portion de longueur ℓ du câble ainsi formé en fonction de I, ℓ, R_1 et R_2.

.....

d) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\text{m}}{\ell I^2}$ du câble en fonction de R_1 et R_2.

.....

Réponses mélangées

$j_{\text{s},0}\ell$ (b) 0 $4Bd$ $+\vec{e_z}$ (a) et (d) $4\pi R^2 j_r(R)$ (a) et (c) (b)
(d) $2j_0 S\dfrac{b}{a}$ $-\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2\vec{e_z}}_{\vec{S}}$ $-\dfrac{e}{2m_\text{e}}$ (2) $-I$ $\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ $\dfrac{mB_\text{ext}}{Mg}$ (a)
$-2Bd$ (d) I $\dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$ (b), (c) et (d) (a) et (e) (2) $+\vec{e_z}$ (d)
$\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ (d) mB_ext 0 $-\mu_0 n_2 I_2\vec{e_y}$ (c) $\dfrac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ (d) $4d\ell j_0$
(b) et (c) $-Bax$ 0 $4I$ (a), (c) et (d) (a), (c) et (d) $-Ba^2$ (b)
$\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ 4×10^2 Wb (c) $+\vec{e_z}$ $\dfrac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R+a/2}{R-a/2}\right)$ 3×10^2 Wb
(a) $\dfrac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ $-\vec{e_z}$ $\dfrac{7\pi}{2}Bd$ 1×10^1 T $-\dfrac{\mu_0 Im}{2\pi r^2}\vec{e_r}$ (d) (b) (b)

► Réponses et corrigés page 304

Équations de Maxwell

Prérequis
Équations de Maxwell. Opérateurs différentiels.

Constantes utiles

→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$

→ dans le vide : $\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide

Pour commencer

Entraînement 5.1 — Équations de Maxwell et dimensions.

On munit l'espace d'un repère cartésien (x, y, z) et on note t la dépendance temporelle.

On s'intéresse aux équations de Maxwell auxquelles obéissent les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un milieu caractérisé par une densité volumique de charge ρ et une densité volumique de courant $\vec{j}$.

a) Parmi les quatre équations suivantes, laquelle n'est pas une équation de Maxwell ?

(a) $\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(d) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$

.....

On s'intéresse aux relations entre les dimensions qui découlent des équations de Maxwell.

On considère les dimensions suivantes : L pour une longueur, T pour un temps, M pour une masse et I pour une intensité du courant électrique.

On rappelle l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

b) Donner la dimension d'une charge électrique q .....

c) Donner la dimension d'un champ magnétique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

d) Donner la dimension d'un champ électrique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

e) Retrouver la dimension d'un champ électrique, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

Entraînement 5.2 — Courants et ordres de grandeurs.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit aussi, en introduisant le courant de conduction $\vec{j}_{\text{cond}}$ et le courant de déplacement $\vec{j}_{\text{dépl}}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\big(\vec{j}_{\text{cond}} + \vec{j}_{\text{dépl}}\big), \quad \text{qui est équivalente à} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j}_{\text{cond}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

On admet la loi d'Ohm $\vec{j}_{\text{cond}} = \sigma\vec{E}$ et on considère un champ électrique $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + \varphi)\vec{e_x}$.

a) Comment s'exprime l'ordre de grandeur de la quantité $\alpha = \dfrac{\|\vec{j}_{\text{cond}}\|}{\|\vec{j}_{\text{dépl}}\|}$?

(a) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (c) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}$

(b) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$

.....

b) Laquelle des conditions suivantes permet d'obtenir $\alpha \gg 1$ dans un conducteur (où σ a pour ordre de grandeur $10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) ?

(a) $f \gg 10^3$ Hz (c) $f \gg 10^{17}$ Hz

(b) $f \gg 10^9$ Hz

.....

On considère une onde électromagnétique de pulsation $\omega = 1{,}0\,\text{rad}\cdot\text{MHz}$.

c) Calculer α si cette onde se propage dans un métal de conductivité $\sigma = 1{,}0\times10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$.

d) Calculer α si cette onde se propage dans de l'eau de mer avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-4}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ ....

e) Calculer α si cette onde se propage dans du verre avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-13}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .....

Entraînement 5.3 — Transposition réels $\longleftrightarrow$ complexes.

On considère les deux champs électriques suivants :

$$\underline{\vec{E}}_1 = E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_y} - \text{i}E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_z}$$
$$\text{et} \quad \vec{E}_2 = -E_0\cos[\omega t + kz]\vec{e_x} - E_0\sin[\omega t + kz]\vec{e_y}.$$

a) Exprimer le champ $\vec{E}_1$ associé à $\underline{\vec{E}}_1$.

.....

b) Exprimer le champ $\underline{\vec{E}}_2$ associé à $\vec{E}_2$.

.....

Entraînement 5.4 — Voir la divergence.

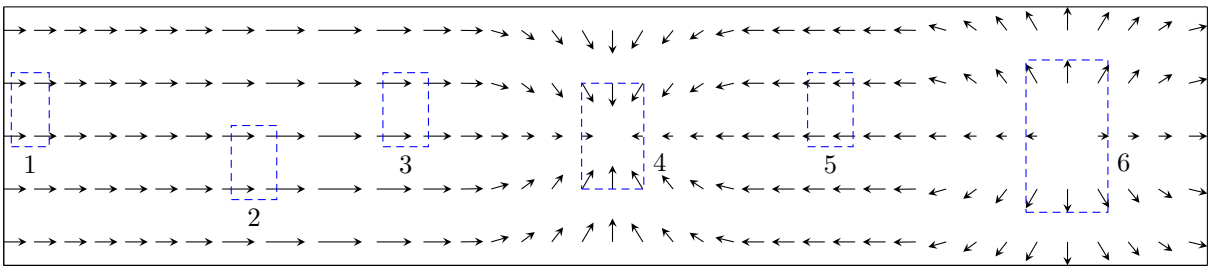
Le théorème de Green-Ostrogradski affirme que pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{A}) \cdot \mathrm{d}\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume délimité par la surface $\mathcal{S}$ fermée.

Ce théorème indique que si le flux élémentaire $\mathrm{d}\phi$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface infinitésimale fermée $\mathrm{d}\mathcal{S}$ autour d'un point M est non nul, alors la divergence de ce même champ de vecteurs au point M est non nulle. En particulier, si $\mathrm{d}\phi > 0$ (flux sortant) alors $\mathrm{div}\,\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère le champ de vecteurs suivant :



Dans chacune des zones, en estimant le flux du champ de vecteurs à travers chacune d'entre elles, indiquer si la divergence du champ de vecteurs est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 .....

b) Zone 2 .....

c) Zone 3 .....

d) Zone 4 .....

e) Zone 5 .....

f) Zone 6 .....

Entraînement 5.5 — Voir le rotationnel.

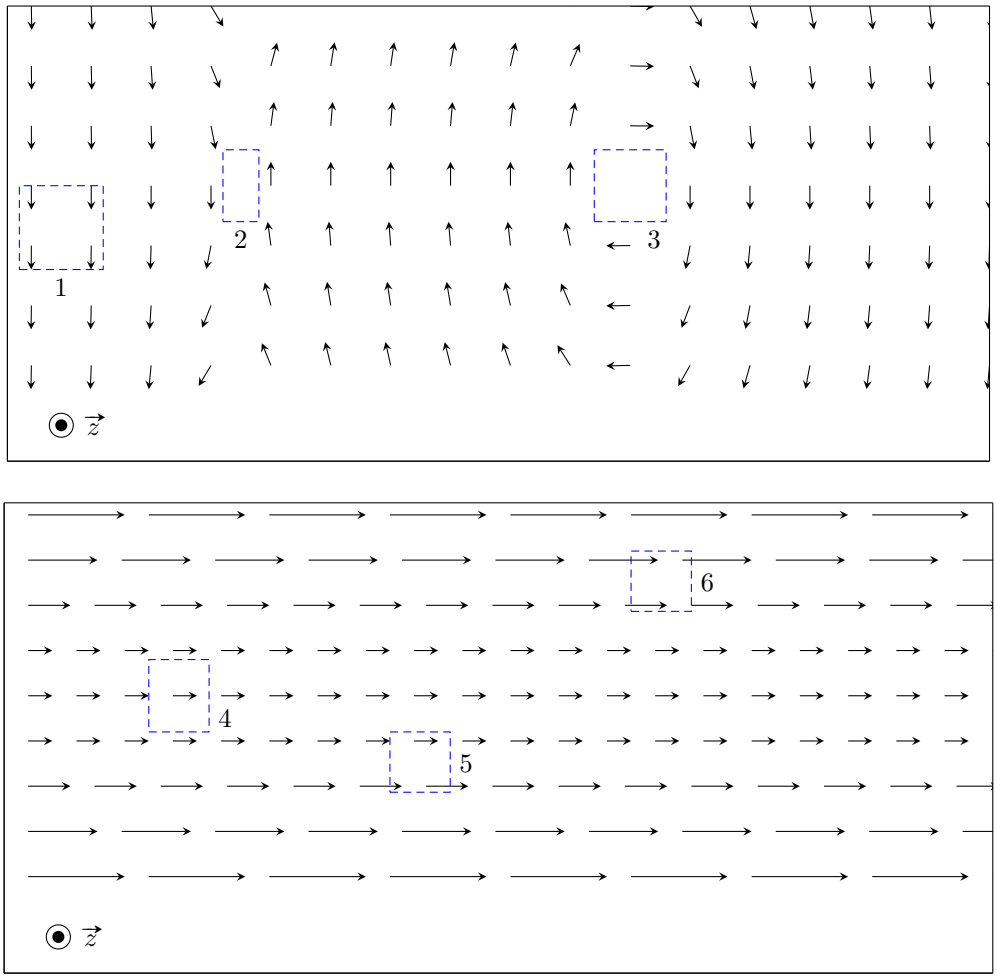
Le théorème de Stokes affirme que pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

où $\mathcal{S}$ est la surface délimitée par le contour Γ fermé.

Ce théorème indique que si la circulation élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{C}$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers un contour fermé Γ délimitant une surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ est non nulle, alors le rotationnel de ce même champ de vecteurs au point M est non nul. En particulier, si $\mathrm{d}\mathcal{C} > 0$ alors $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère les champs de vecteurs suivants :



Dans chacune des zones, en estimant la circulation du champ de vecteurs sur chacune d'entre elles, indiquer si la composante du rotationnel selon $\vec{e_z}$ du champ de vecteurs est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 ..... ☐ c) Zone 3 ..... ☐ e) Zone 5 ..... ☐

b) Zone 2 ..... ☐ d) Zone 4 ..... ☐ f) Zone 6 ..... ☐

Conservation de la charge et potentiel électrique

Entraînement 5.6 — Conservation de la charge.

On note ρ la densité volumique de charge et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant.

On rappelle les équations de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ et de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

On rappelle aussi le théorème de Schwarz : pour tout champ $\vec{A}$, on a $\text{div}\left(\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial(\text{div}\,\vec{A})}{\partial t}$.

a) Développer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère.

.....

b) Exprimer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ en injectant l'équation de Maxwell-Gauss.

.....

c) On rappelle que pour tout vecteur $\vec{A}$, $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0$. Quelle équation obtient-on ?

(a) $\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (b) $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (c) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (d) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

.....

Entraînement 5.7 — Piège électrostatique.

On considère une région de l'espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{a^2}\left(x^2 + 2y^2 - 3z^2\right),$$

où V_0 (en V) et a sont des constantes positives.

a) Donner l'unité de a .....

L'opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes est donné par $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

b) Déterminer l'expression de ΔV .....

c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est-elle vérifiée ? .....

d) L'allure de $V(x,0,0)$ en fonction de l'abscisse x est une portion :

(a) de cercle (b) d'hyperbole (c) d'exponentielle (d) de parabole

.....

L'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes est donné par $\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$.

e) Calculer le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ en O, origine du repère .....

Théorèmes de Stokes-Ampère et Green-Ostrogradski

Entraînement 5.8 — Théorème de Stokes-Ampère.

Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, considérons le vecteur fixe

$$\vec{\omega} = \omega\, \vec{e_z}.$$

Rappelons que, pour tout point M de l'espace, on a

- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ dans la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$;
- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ dans la base cartésienne.

On considère par ailleurs un cylindre infini d'axe $\mathrm{O}z$ et de rayon a.

On considère le champ de vecteurs défini par :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} & \text{pour } r < a\,; \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v} = \vec{0} & \text{pour } r > a\ . \end{cases}$$

a) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z})$ .....

b) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z})$ .....

En coordonnées cartésiennes, l'opérateur rotationnel est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

c) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v}$ pour $r < a$ en coordonnées cartésiennes .....

Le théorème de Stokes s'énonce de la façon suivante.

Soit Γ est un contour fermé et orienté, et soit Σ une surface quelconque s'appuyant sur Γ et orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite. Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oint_\Gamma \vec{A}_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}_{(\mathrm{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_{(\mathrm{M})}.$$

En appliquant ce théorème sur un contour fermé circulaire Γ de rayon r, calculer $v(r)$ dans les deux cas suivants :

d) Pour $r < a$ .....

e) Pour $r > a$ .....

Entraînement 5.9 — Application du théorème de Green-Ostrogradski.

On considère le champ suivant :

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = (ar - br^3)\vec{e_r},$$

en coordonnées sphériques, où a et b sont des constantes.

En coordonnées sphériques, l'opérateur divergence est défini par :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

a) Calculer $\operatorname{div}(\vec{A})$ .....

b) Quelle est l'expression de l'élément de volume d'une boule en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(d) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}\tau.$$

c) À l'aide de ce théorème, exprimer le flux $\oiint_{\text{sphère}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ du champ à travers une sphère de centre O de rayon R.

.....

d) Quelle est l'expression de l'élément de surface d'une sphère en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}S = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}S = r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

e) Calculer directement le flux du champ à travers la sphère de centre O et de rayon R à partir de l'expression du champ $\vec{A}$.

.....

Jouons avec les équations de Maxwell

On donne pour les quatre prochains exercices les expressions du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

Entraînement 5.10 — Existence ou non d'un champ électromagnétique.

Vérifier à l'aide des équations de Maxwell si les champs électromagnétiques suivants existent ou non.

Répondre par « oui » par « non ».

On se place dans le vide donc on rappelle que $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{\omega^2}{k^2}$

a) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ .....

c)
$$\begin{cases} \vec{E} = E_1\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + E_2\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y} \\ \vec{B} = \dfrac{E_2 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - \dfrac{E_1 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y} \end{cases}$$

.....

Entraînement 5.11 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday.

On rappelle l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (sans champ statique).

Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé à chacun des champs électriques $\vec{E}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\dfrac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t)\vec{e_z}$

.....

Entraînement 5.12 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Ampère.

On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (pas de champs statiques).

Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ associé à chacun des champs magnétiques $\vec{B}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\dfrac{cB_0}{(kr)^2} \sin(\omega t)\vec{e_\theta}$

.....

Entraînement 5.13 — Détermination de $\vec{E}$ à partir de $\vec{B}$.

Le champ magnétique créé dans un solénoïde infini de rayon R, d'axe (Oz), comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité électrique $i(t)$ dépendant du temps est

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e_z}.$$

On rappelle que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde est nul.

On rappelle les expressions de l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale et intégrale :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

a) Par analyse des invariances, déterminer la ou les variable(s) dont dépend(ent) le champ électrique. On adoptera les coordonnées cylindriques.

(a) r (b) θ (c) z (d) r et θ

.....

Le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé selon $\vec{e_\theta}$.

En utilisant l'équation locale de Maxwell-Faraday, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants :

b) pour $r < R$ .....

c) pour $r > R$ sachant que le champ est continu .....

On souhaite retrouver ces résultats en passant par la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. Cette méthode nécessite de choisir une surface sur laquelle nous allons calculer le flux et la circulation.

d) En tenant compte de la direction du champ $\vec{B}$ et des dépendances spatiales du champ $\vec{E}$, quelle surface pouvons nous choisir ?

(a) Une sphère de rayon r

(b) Un cylindre de hauteur h et de rayon r

(c) Un plan rectangulaire de dimension $r \times z$

(d) Un disque d'axe (Oz) et de rayon r

.....

En utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur cette surface, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants :

e) pour $r < a$ .....

f) pour $r > a$ .....

Vecteur de Poynting

Entraînement 5.14 — Vecteur de Poynting.

La forme générale du vecteur de Poynting vérifie : $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$

Développer les vecteurs de Poynting pour les champs électromagnétiques suivants :

a) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$ et $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$ ....

b) $\vec{E} = E_0 \cosh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_z}$ et $\vec{B} = B_0 \sinh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$.

Entraînement 5.15 — Vecteur de Poynting complexe.

Une onde électromagnétique plane monochromatique se propage suivant l'axe (Oz). Les expressions des composantes du champ électrique sont :

$$\vec{E} \left| \begin{array}{ll} E_x & = E_{0x} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1) \\ E_y & = E_{0y} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2) \\ E_z & = 0 \end{array} \right.$$

Le vecteur d'onde est noté $\vec{k} = k\,\vec{e_z}$ avec $\omega = k\,c$.

On travaille tout d'abord en notation réelle :

a) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ .....

b) Déterminer l'expression du vecteur du Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ....

On travaille maintenant en notation complexe :

c) Déterminer l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ .....

d) Déterminer l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ .....

e) Déterminer l'expression du conjugué du champ magnétique $\underline{\vec{B}}^*$ ..

f) Calculer les composantes du vecteur complexe $\dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0}$ .....

Conclusion :

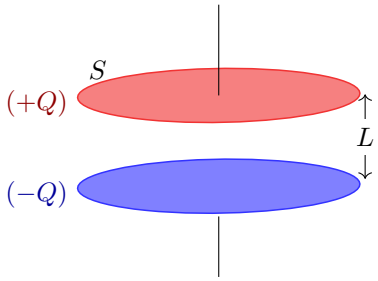
g) On en déduit que $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \left\langle \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$ vaut : (a) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (b) $\left\langle \dfrac{2\,\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (c) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right\rangle$?

.....

Entraînement 5.16 — Un bilan d'énergie.

On considère un condensateur composé de deux disques métalliques de surface S, de rayon R, distants de $L \ll R$ et séparés par du vide. Lors de la charge, on suppose que, dans le système de coordonnées cylindriques, les champs électrique et magnétique régnant entre les deux armatures sont :

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0}{2S}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} r \vec{e_\theta}.$$



On ne considère aucun courant de conduction dans cet exercice.

On considère que l'énergie stockée dans le condensateur est essentiellement sous forme électrique. La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit alors $e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

a) Calculer l'énergie stockée $\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} e\,\mathrm{d}\tau$ dans le condensateur sachant que l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$, en coordonnées cylindriques, vaut $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.
.....

b) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ en $r = R$ .....

c) Calculer le flux sortant $\phi = \iint_{\text{cylindre}} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ à travers la surface cylindrique délimitant le volume entre les deux armatures.
.....

d) Les résultats précédents permettent de déduire que :

(a) $\mathcal{E} + \phi = 0$ (b) $\mathcal{E} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (c) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0$ (d) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

.....

e) On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit Σ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{A})\, \mathrm{d}\tau.$$

En utilisant ce théorème, quelle relation (appelée théorème de Poynting) obtient-on ?

(a) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(b) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

(c) $e + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(d) $e + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

.....

Réponses mélangées

$4\pi R^3(a - bR^2)$ Nulle $\dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}$ $B_0 \dfrac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$ $-\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}$

$-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$ (d) $\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}$ $1{,}1 \times 10^{-8}$ $-\dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

$\mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0 \dfrac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}$ (b) $-\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$ (a) $2\omega\vec{e_z}$ Nulle (c)

$r\omega\vec{e_\theta}$ non $E_0\cos[\omega t - kx]\vec{e_y} + E_0\sin[\omega t - kx]\vec{e_z}$ Négative Nulle oui

$r\omega$ $\dfrac{M}{I\cdot T^2}$ Oui Nulle $\dfrac{M\cdot L}{I\cdot T^3}$ $I\cdot T$ (b) $\dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\Big)$

Positive $1{,}1 \times 10^{12}$ Positive (c) $3a - 5br^2$ $-\dfrac{2E_0}{k^2 r^3}\int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}t$

$1{,}1 \times 10^{1}$ (a) $\dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\Big)$ $-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$ (c) m

$E_0\dfrac{k}{\omega}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$ (d) $\vec{0}$ 0 $-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$ Positive

$-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$ Négative (b) Negative $-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0}\cosh(\beta z)\sinh(\beta z)\exp(-2\alpha t)\vec{e_x}$

$\dfrac{M\cdot L}{I\cdot T^3}$ $\dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\vec{e_z}$ $\dfrac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\,c}\vec{e_z}$ $4\pi R^3(a - bR^2)$ $\dfrac{a^2}{r}\omega$

$\mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \mu_0\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ (b) (d) $\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0}\cos(\omega t - kz + \varphi)\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}$ Positive

oui $E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y}$ $-\dfrac{E_{0y}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} + \dfrac{E_{0x}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}$

$\dfrac{c^3 B_0}{k^2\omega r^3}\cos(\omega t)\vec{e_z}$ $E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}$ Négative $-E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_x} + \mathrm{i}E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_y}$

► Réponses et corrigés page 311

Induction

Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer
⟶ *Champ magnétique, Induction*

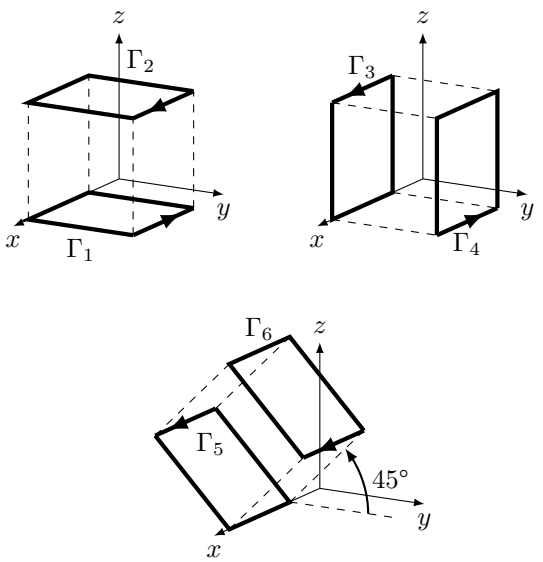
Prérequis
Champ magnétique. Loi de Faraday. Orientation d'une surface à l'aide de la règle de la main droite (règle du tire-bouchon).
Flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.
Force élémentaire de Laplace $\mathrm{d}\vec{F_L} = i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Loi des mailles.

Pour commencer

Entraînement 6.1 — Orientation d'une surface.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon.

Pour chaque contour Γ_i orienté suivant, exprimer le vecteur normal unitaire $\vec{n_i}$ de la surface qu'il délimite en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.



a) $\vec{n_1}$ ..... d) $\vec{n_4}$ .....

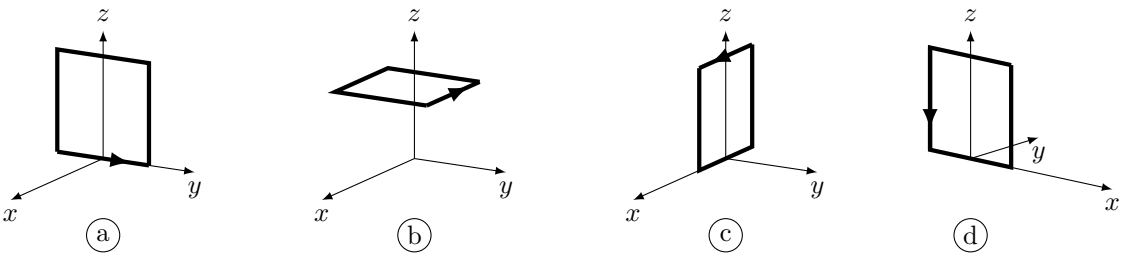
b) $\vec{n_2}$ ..... e) $\vec{n_5}$ .....

c) $\vec{n_3}$ ..... f) $\vec{n_6}$ .....

Entraînement 6.2 — Orientation d'un contour.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon. Quelle représentation du contour pourrait correspondre aux vecteurs suivants ?

La réponse peut être « aucune » !



a) $-\vec{e_y}$ ..... ☐ c) $\vec{e_z}$ ..... ☐

b) $-\vec{e_x}$ ..... ☐ d) $\vec{e_x}$ ..... ☐

Entraînement 6.3 — Varie ou ne varie pas ? Telle est la question.

Soit un cadre de vecteur normal $\vec{n}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

Dans les situations suivantes, le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre varie-t-il au cours du temps ?

Répondre par « oui » ou « non ».

On rappelle que le flux est défini par $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

a) $\vec{B}$ est uniforme et initialement $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$. Le cadre tourne autour d'un de ses cotés ... ☐

b) Le cadre pénètre dans une zone où règne $\vec{B}$ uniforme. $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ..... ☐

c) Le champ $\vec{B}(t)$ dépend du temps et est perpendiculaire à $\vec{n}$. Le cadre est fixe et indéformable.

..... ☐

d) Le cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans $\vec{B}$ uniforme et constant.

..... ☐

e) La surface du cadre diminue. Le champ $\vec{B}$ est uniforme, colinéaire de sens opposé à $\vec{n}$.

..... ☐

f) Le cadre est fixe. Le champ $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{n}$, non uniforme et indépendant du temps.

..... ☐

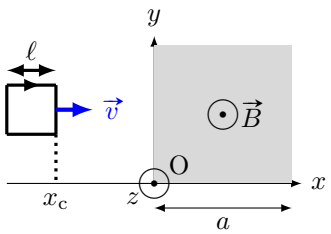
Flux du champ magnétique

Entraînement 6.4 — Flux à travers un circuit mobile (I).

On considère un circuit carré de côté ℓ se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ et dont le côté droit est repéré par l'abscisse x_c.

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$ règne dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = a > \ell$.

On oriente le circuit tel que $\vec{n} = -\vec{e_z}$.



Exprimer le flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ en fonction de B, x_c, ℓ et a si :

a) $x_c < 0$ ..... c) $\ell < x_c < a$ .....

b) $0 < x_c < \ell$ ..... d) $a < x_c < a + \ell$ .....

En déduire la dérivée du flux par rapport au temps en fonction de B, v et ℓ si :

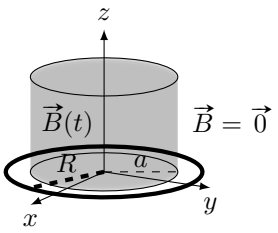
e) $x_c < 0$ ..... g) $\ell < x_c < a$ .....

f) $0 < x_c < \ell$ ..... h) $a < x_c < a + \ell$ .....

Entraînement 6.5 — Flux à travers un disque.

On considère le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Soit un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B_m \cos(\omega t)\vec{e_z} \text{ si } r < a \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$



Déterminer le flux Φ du champ magnétique à travers un disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$ si :

a) $R < a$ ..... b) $R > a$ .....

On considère maintenant un champ magnétique $\vec{B'}$ défini par

$$\vec{B'}(\mathrm{M}) = B_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)\vec{e_z} \text{ si } r < a \qquad \text{et} \qquad \vec{B'} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$

On désire exprimer son flux Φ' aussi à travers le disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$.

c) Quelle sera l'expression de l'élément de surface $\mathrm{d}S$ du disque à considérer pour calculer le flux de $\vec{B'}$?

.....

Déterminer Φ' si :

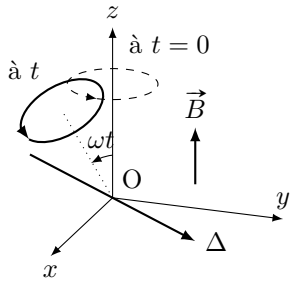
d) $R < a$ ..... e) $R > a$ .....

Entraînement 6.6 — Flux à travers un circuit mobile (II).

Dans une zone de champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B\vec{e_z},$$

on considère une spire orientée de rayon R en rotation autour d'un axe Δ perpendiculaire à l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω.



a) Quelle est l'expression du flux de $\vec{B}$ à travers la spire à t quelconque ? .....

Exprimer le flux en fonction de B et R pour les différentes valeurs de ωt suivantes :

b) $\frac{\pi}{2}$ .... c) $\frac{2\pi}{3}$ ... d) $\frac{11\pi}{6}$ .. e) 2π ...

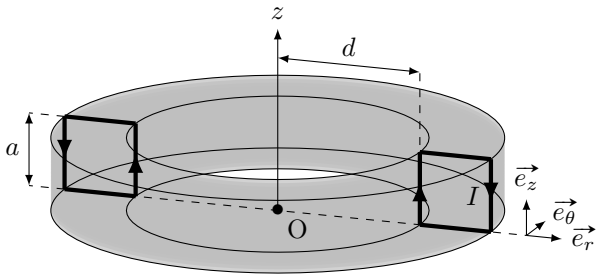
Entraînement 6.7 — Flux propre d'un tore.

Soit un tore d'axe (Oz), constitué de N spires carrées de coté a. Le champ magnétique créé par ce dispositif est tel que

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

pour $0 < z < a$ ou $d < r < d + a$, et nul sinon.

On désire, dans un premier temps, calculer le flux de ce champ à travers une seule des spires. Le vecteur normal à la spire est le vecteur $\vec{e_\theta}$.



a) Quelle sera la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ à utiliser pour le calcul du flux $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$?

(a) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ (c) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

.....

b) Quelle sera l'expression du flux à travers une spire ?

(a) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(b) $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(c) $\Phi = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

(d) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

.....

c) En réalisant le calcul intégral, calculer Φ .....

d) En déduire l'expression du coefficient d'auto-induction L défini par $\Phi_{\text{tore}} = LI$, où Φ_{tore} désigne le flux du champ créé par le tore à travers ses N spires (aussi appelé flux propre).

.....

Lien avec l'équation de Maxwell-Faraday

Entraînement 6.8

Soient un champ électrique $\vec{E} = E(r)\vec{e_\theta}$ et un champ magnétique $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{e_z}$. Ils sont reliés par l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

a) Quelle est l'équation vérifiée par $E(r)$?

(a) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = -B_0\sin(\omega t)$

(b) $-\dfrac{\mathrm{d}(E(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(c) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(d) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}E(r)}{\mathrm{d}\theta} = B_0\omega\cos(\omega t)$

.....

b) En déduire $E(r)$.

On prendra $E(r=0) = 0$.

.....

Systèmes d'équations couplées

Entraînement 6.9

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, un étudiant obtient ce système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} Ri + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par v ?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{R} = g$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

.....

b) La dimension temps est notée T, la masse par M. Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$?

(a) T^{-1}

(b) 1

(c) T

(d) $\mathrm{T}\cdot\mathrm{M}^{-1}$

.....

Entraînement 6.10 — Passage en complexe.

On considère un dispositif dont les équations mécaniques et électriques permettent d'établir le système suivant, où u est une tension :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \alpha B v = u \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -iB\alpha - kz - hv \\ v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Les grandeurs i, u et v sont sinusoïdales donc du type $x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$.

Leur grandeur complexe associée est du type $\underline{x}(t) = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\omega t + \varphi)$ et leur amplitude complexe associée $\underline{X} = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\varphi)$ (où $\mathrm{j}^2 = -1$)

a) Comment s'écrit le système après passage en complexe ?

(a) $\begin{cases} R\underline{I} + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega}\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - \mathrm{j}k\omega\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t) \\ \dfrac{m}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

.....

b) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{V}$ en fonction de $\underline{I}$.

.....

c) Quelle est l'impédance complexe $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ en éliminant $\underline{V}$ dans les deux premières équations du système ?

(a) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega} + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(k\omega - \frac{m}{\omega})}$

(b) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)\right)$

(c) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(m\omega - \frac{k}{\omega})}$

(d) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2}{\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right)}$

.....

Entraînement 6.11 — Bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, la force de Laplace de valeur $f_\text{L} = Bai$ et f une force exercée par un opérateur extérieur

$$\begin{cases} e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f + f_\text{L} & \text{(EM)} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *et que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$.

a) Exprimer, en fonction de R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE).

.....

b) Exprimer, en fonction de m, v et f, le terme $Bavi$ à partir de f_L dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie par l'opérateur fv en fonction de E_c et $\mathcal{P}_\text{J}$.

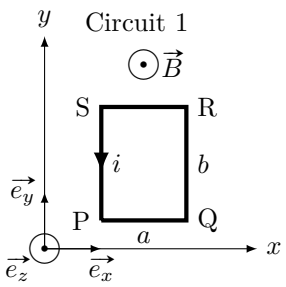
On rappelle que $\left(f^2(x)\right)' = 2f'(x)f(x)$.

.....

Force de Laplace

Entraînement 6.12 — Force de Laplace sur une spire rectangulaire.

Soit un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, et un circuit 1 rectangulaire parcouru par un courant i.



Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 1 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?

a) PQ .....

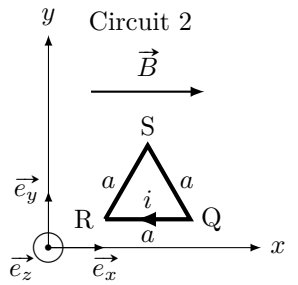
b) QR .....

c) RS .....

d) SP .....

e) Quelle est la résultante des forces de Laplace exercées sur le circuit 1 ? ....

Entraînement 6.13 — Force de Laplace sur une spire triangulaire.

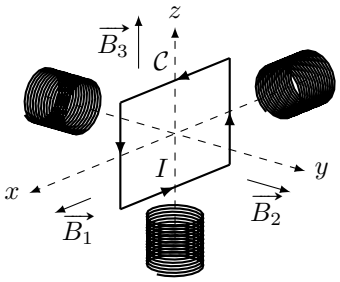


On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et un circuit 2, triangulaire, parcouru par un courant i.

Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 2 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?

a) QR. ... b) RS .... c) SQ ....

Entraînement 6.14 — Couple des forces de Laplace sur une spire.



Un circuit mobile $\mathcal{C}$ de surface S dans lequel circule un courant d'intensité I est soumis à différents champs magnétiques uniformes et constants produits par trois bobines tels que :

$\vec{B_1} = B\vec{e_x}$; $\vec{B_2} = B\vec{e_y}$; $\vec{B_3} = B\vec{e_z}$.

On rappelle que le moment magnétique d'une spire $\vec{\mathcal{M}}$ est défini par $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ avec $\vec{S}$ son vecteur surface.

a) Exprimer le vecteur surface $\vec{S}$ en fonction de S et de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. .....

Exprimer le couple des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_{\text{L}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ que subit la spire $\mathcal{C}$ en fonction de S, I et B pour :

b) $\vec{B_1}$ ... c) $\vec{B_2}$ ... d) $\vec{B_3}$ ...

Les couples des forces de Laplace mettent la spire en rotation. Parmi les champs produits par les bobines, déterminer à l'aide de la règle de la main droite celui qui provoque les rotations du circuit $\mathcal{C}$ données ci-dessous.

e) La rotation de la spire autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

f) La rotation de la spire autour de l'axe (Oy) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

g) La rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

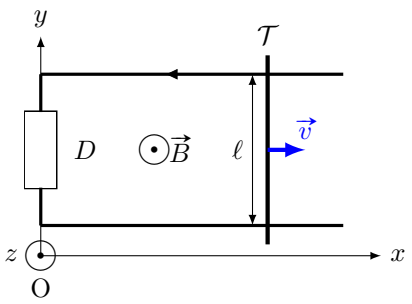
Autour du rail de Laplace

Le rail de Laplace est un circuit constitué de deux rails conducteurs parallèles horizontaux espacés d'une distance $\ell = 10$ cm sur lesquels repose une tige conductrice $\mathcal{T}$ de masse $m = 10$ g.

Celle-ci glisse sans frottement sur les rails tout en leur restant perpendiculaire.

On repère la position x de la tige sur l'axe (Ox). On suppose que les rails conducteurs et la tige ont une résistance nulle.

L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme permanent $\vec{B} = B\vec{e_z}$, avec $B = 1$ T. À l'instant initial, la tige est lancée à une vitesse $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e_x}$.



Le composant D est un dipôle dont la nature sera indiquée dans les exercices suivants.

Entraînement 6.15 — Rail de Laplace (I).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une résistance R. On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM)} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse $v(t)$?

(a) $v_0 \exp\left(-\dfrac{mR}{B^2\ell^2}t\right)$ (c) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$

(b) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B\ell}{mR}t\right)$ (d) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{R}t\right)$

.....

Entraînement 6.16 — Rail de Laplace (II).

Dans cet entraînement, le dipôle D est un générateur de tension non idéal (constitué d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E en série avec sa résistance interne r). On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v(t) + E = ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM)} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la tige ? .....

Entraînement 6.17 — Rail de Laplace (III).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une bobine d'inductance $L = 0,5$ H et de résistance $r = 1\ \Omega$.

On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t) & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i(t) & \text{(EM)} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ .....

b) Quelle est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$?

(a) $x^2 + \dfrac{r}{L}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(b) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(c) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}x = 0$

.....

c) Comment peut-on qualifier le discriminant associé à l'équation caractéristique ?

(a) Il est strictement positif.

(b) Il est nul.

(c) Il est strictement négatif.

.....

d) Quelle est l'expression de $i(t)$?

Les nombres α et β sont réels.

(a) $\alpha \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t} + \beta \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t}$

(b) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right)\right)$

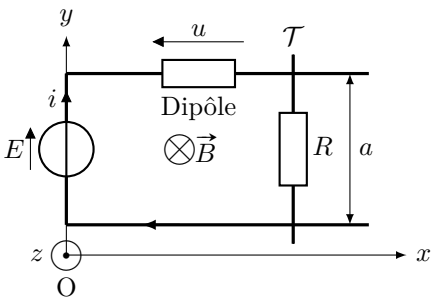
(c) $(\alpha+\beta t)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}$

(d) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right)\right)$

.....

Entraînement 6.18 — Équations différentielles.

On considère un circuit constitué d'un générateur de force électromotrice constante E, d'un dipôle et d'une tige mobile $\mathcal{T}$ de résistance R repérée par la coordonnée x sur l'axe (Ox), plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. On oriente le circuit dans le sens horaire.

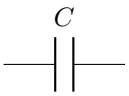


On admet que le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige $\mathcal{T}$ selon l'axe (Ox) permet d'écrire la relation $m\ddot{x} = iaB$. De plus, la force électromotrice induite est $e = -Ba\dot{x}$.

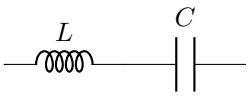
On étudie les cas où le dipôle correspond à ces trois montages suivants.

Dipôle 1 : Fil

Dipôle 2 :

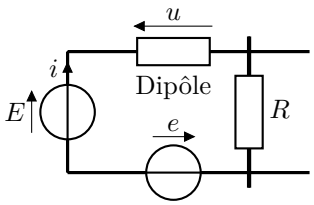


Dipôle 3 :

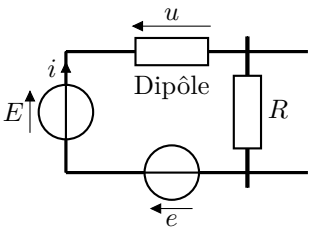


a) Quel sera le montage complet en tenant compte de la force électromotrice induite e ?

(a)



(b)



.....

b) Exprimer la tension u à partir de la loi des mailles en fonction de E, i, R, B, a et $\dot{x}$.

.....

c) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en fonction de B, a, m, R, i et de $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ .....

d) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 1.

.....

e) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 2.

.....

f) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 3.

.....

Autres entraînements

Entraînement 6.19 — Vitesse limite.

L'expression de la vitesse $v(t)$ d'une tige sur des rails de Laplace a pour expression

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{Ba}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

a) La dimension temps est notée T, la longueur par L. Comment s'écrit la dimension du coefficient τ ?

(a) 1
(b) T
(c) T^{-1}
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$

.....

b) En supposant qu'à $t = 0$, $x(t = 0) = x_0$, déterminer $x(t)$.

.....

Entraînement 6.20 — Un système couplé.

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{aBv}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

.....

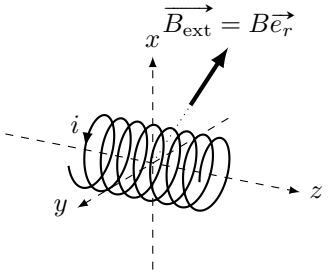
b) La dimension temps est notée T, la longueur par L. Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{Rg}{L}$?

(a) 1
(b) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-3}$
(c) $\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{3}$
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$

.....

Entraînement 6.21 — Force de Laplace.

Soit une bobine de N spires de rayon R d'axe (Oz) et soumise à un champ magnétique extérieur radial $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = B\overrightarrow{e_r}$ dans le système de coordonnées cylindriques.



a) Donner l'expression d'un élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ de la bobine.

(a) $\mathrm{d}r$ (b) $\mathrm{d}z$ (c) $\mathrm{d}x$ (d) $R\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Déterminer l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la bobine.

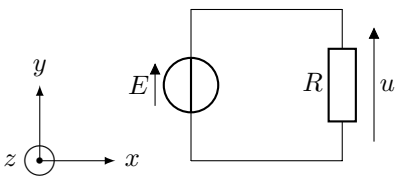
.....

Entraînement 6.22 — Choix du sens du courant induit.

Soit un circuit électrique de surface $S = 500\,\mathrm{cm}^2$, composé d'un générateur idéal délivrant une tension $E = 200\,\mathrm{mV}$ et un résistor de résistance $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Il est plongé dans un champ magnétique tel que $\vec{B} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}$ avec $B = 2\,\mathrm{T}$.

On prendra $\tau = 1\,\mathrm{s}$.



On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens horaire.

a) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

b) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

.....

c) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

d) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

e) Quelle est la valeur de la tension u aux bornes du résistor ? .....

On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens anti-horaire.

f) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

g) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

h) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

i) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

j) Calculer la valeur de la tension u aux bornes du résistor .....

Entraînement 6.23 — Un bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant, avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, la force de Laplace de valeur $f_{\text{L}} = Bai$, la force de rappel d'un ressort de valeur $-kx$ et une force de frottement fluide de valeur $-\alpha v$:

$$\begin{cases} E + e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f_{\text{L}} - kx - \alpha v & \text{(EM)} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *; que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$ *; que l'énergie potentielle de la barre est* $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ *; enfin, que la puissance dissipée par frottements est* $\mathcal{P}_f = \alpha v^2$.

a) Exprimer, en fonction de E, R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE).

.....

b) Exprimer, en fonction de m, v, k, x et α le terme $Bavi$ à partir de f_{L} dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie Ei en fonction des grandeurss E_{c}, $\mathcal{P}_{\text{J}}$, E_{p} et $\mathcal{P}_{\text{f}}$.

On rappelle que $v = \dot{x}$.

.....

Réponses mélangées

oui $\quad x_0 + \dfrac{e}{Ba}\left(t + \tau \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} - \tau\right) \quad$ (d) $\quad ibB\vec{e_x} \quad -B(a-(x_\mathrm{c}-\ell))\ell \quad$ (c)

(a) $\quad -iaB\vec{e_y} \quad 300\,\mathrm{mV} \quad$ oui $\quad \mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \quad \vec{0} \quad -B\dfrac{t}{\tau}S \quad -\vec{e_z}$

(c) $\quad \dfrac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i(t) = 0 \quad \vec{0} \quad -IBS\vec{e_z} \quad E - Ba\dot{x} - Ri$

$\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\dfrac{B\ell E}{mr} \quad$ non $\quad S\vec{e_z} \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mR}v = 0 \quad \vec{e_y} \quad -Bv\ell$

$300\,\mathrm{mV} \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z}) \quad 0 \quad -\dfrac{E}{B\ell} \quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})$ (a) (a) (b)

(b) $\quad B\pi R^2\cos(\omega t)$ (d) $\quad Bv\ell \quad i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}$ (b) $\quad 2\pi B_0\dfrac{a^2}{6} \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2$

non $\quad -B\ell^2$ (a) $\quad -iB2\pi RN\vec{e_z} \quad -ibB\vec{e_x} \quad \vec{0} \quad \pi R^2 B_\mathrm{m}\cos(\omega t)$

(b) non $\quad \dfrac{-\alpha B\underline{I}}{h + \mathrm{j}(m\omega - \frac{k}{\omega})} \quad \vec{e_y} \quad IBS\vec{e_x}$ (c) $\quad -\dfrac{B\pi R^2}{2} \quad \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}$

$R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0 \quad \dfrac{BS}{\tau} \quad \dfrac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right) \quad R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0 \quad \dfrac{BSt}{\tau}$

(a) aucune $\quad -Ri^2 \quad 0 \quad 0 \quad -S\vec{e_z} \quad Ei - Ri^2 \quad \vec{e_z} \quad iaB\vec{e_y}$ (d)

(c) $\quad mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2$ (d) (a) oui $\quad 0 \quad \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{J}$

$2\pi B_0\left(\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{R^3}{3a}\right)$ (d) (c) $\quad S\vec{e_y} \quad mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv \quad \dfrac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right)$

(b) (c) (b) $\quad L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0 \quad -\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$-Bx_\mathrm{c}\ell$ (c) $\quad B\pi R^2 \quad \pi a^2 B_\mathrm{m}\cos(\omega t) \quad B_0\omega\sin(\omega t)\dfrac{r}{2} \quad -i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z} \quad -\dfrac{BS}{\tau}$

▶ Réponses et corrigés page 321

Ondes électromagnétiques I

Prérequis

Pour une onde plane progressive monochromatique : $\lambda = c/f$ et $f = 1/T$.
Équations de Maxwell dans le vide :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Gauss)}$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Thomson)}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Faraday)}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

Formules d'analyse vectorielle, en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$
$$\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x \vec{e_x} + \Delta A_y \vec{e_y} + \Delta A_z \vec{e_z}$$
$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Constantes utiles

→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$
→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Calculs numériques

Entraînement 7.1 — Fréquence, longueur d'onde, vitesse de propagation.

Calculer, avec un chiffre significatif, les grandeurs suivantes :

a) la vitesse de propagation des ondes electromagnétique dans le vide $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ ..

b) La fréquence f d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ .....

c) La longueur d'onde dans le vide d'une onde de fréquence $f = 3\,\mathrm{GHz}$ .....

d) La période d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 3\,\mathrm{pm}$ .....

Entraînement 7.2 — Combat de grandeurs (I).

On considère un pointeur LASER emmettant une onde représentée par son champ électromagnétique

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = -\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e_y},$$

avec $E_0 = 100\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et une ampoule classique à filament de puissance lumineuse égale à 100 W.

Le faisceau LASER est un cylindre de section $S = 1{,}0\,\mathrm{mm}^2$.

a) Expliciter la puissance moyenne surfacique $\langle P\rangle = \left\langle \iint \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right\rangle$, avec $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

On rappelle que $\langle\cos^2(\alpha)\rangle = 1/2$ *si* α *dépend du temps* .....

b) Calculer numériquement la puissance moyenne du LASER .....

c) Qui de l'ampoule classique ou du LASER est le plus puissant en moyenne ? .....

Entraînement 7.3 — Combat de grandeurs (II).

On souhaite comparer le champ magnétique terrestre égal à $5\times10^{-5}\,\mathrm{T}$ à une onde radiofréquence représentée par son champ magnétique $\vec{B}(M,t) = B_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$, de puissance moyenne 1 W.

Le faisceau a une section $S = 1\,\mathrm{m}^2$. On rappelle que dans ce cas $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$ où E_0 est la norme du champ électrique de l'onde plane.

a) Exprimer B_0 en fonction de la puissance moyenne rayonnée $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$ .....

b) Que dire du champ magnétique de l'onde radiofréquence ?

(a) Il est plus intense que le champ terrestre.
(b) Il est moins intense que le champ terrestre.
(c) Il est du même ordre de grandeur que le champ terrestre.

.....

Dérivées partielles et opérateurs

Entraînement 7.4 — Calculs de dérivées partielles (I).

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer

a) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ .....

b) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial x}$ .....

c) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial z}$ .....

d) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}$ .....

e) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ .....

Entraînement 7.5 — Calculs de dérivées partielles (II).

On considère le champ magnétique suivant : $\vec{B}(M,t) = B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer

a) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .....

b) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x}$ .....

c) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial y}$ .....

d) $\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ .....

e) $\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$ .....

f) $\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2}$ .....

Entraînement 7.6 — Calculs d'opérateurs vectoriels (I).

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer

a) $\operatorname{div} \vec{E}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

Entraînement 7.7 — Calculs d'opérateurs vectoriels (I).

On considère le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ dont les composantes sont données par

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$
$$E_z = \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz).$$

Calculer :

a) $\operatorname{div} \vec{E}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

Entraînement 7.8 — Équation de propagation.

On cherche dans cet entraînement à démontrer l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. On rappelle pour cela la formule du double rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}.$$

a) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday puis celle de Maxwell-Ampère, on montre que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \alpha\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Quelle est l'expression de α ?

(a) $\alpha = \mu_0\varepsilon_0$ (b) $\alpha = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ (c) $\alpha = -\mu_0\varepsilon_0$

b) En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss et la formule du double rotationnel, établir une seconde expression de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ .....

c) En égalisant les expressions de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ obtenues aux questions précédentes, on obtient l'équation de d'Alembert $\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.

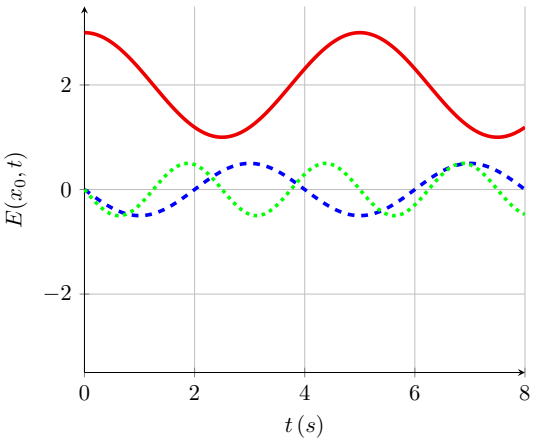
Exprimer c en fonction de ε_0 et μ_0 .....

Solutions de l'équation de propagation

Entraînement 7.9 — Représentation d'un signal.

On considère trois signaux :

- signal n° 1 :
$$E(x_0,t) = 2 + \cos\left(2\pi\frac{t}{T_1}\right) \text{ avec } T_1 = 5\,\text{s}$$
- signal n° 2 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_2 = 4\,\text{s}$$
- signal n° 3 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_3 = 2{,}5\,\text{s}$$



On donne ci-contre leurs représentations graphiques (à x_0 fixé, en fonction du temps).

a) À quel signal la courbe en traits pleins est-elle associée ? .....

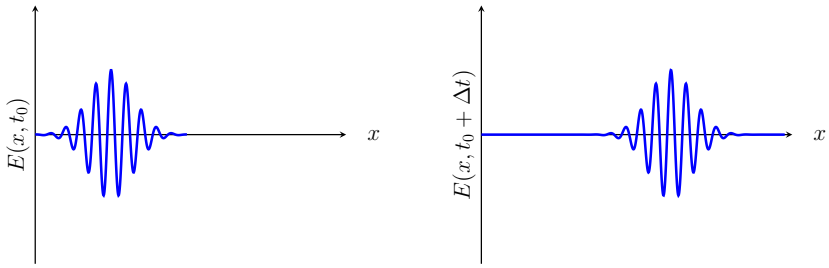
b) À quel signal la courbe en tirets est-elle associée ? .....

c) À quel signal la courbe en pointillés est-elle associée ? .....

Entraînement 7.10 — Caractérisation d'une onde.

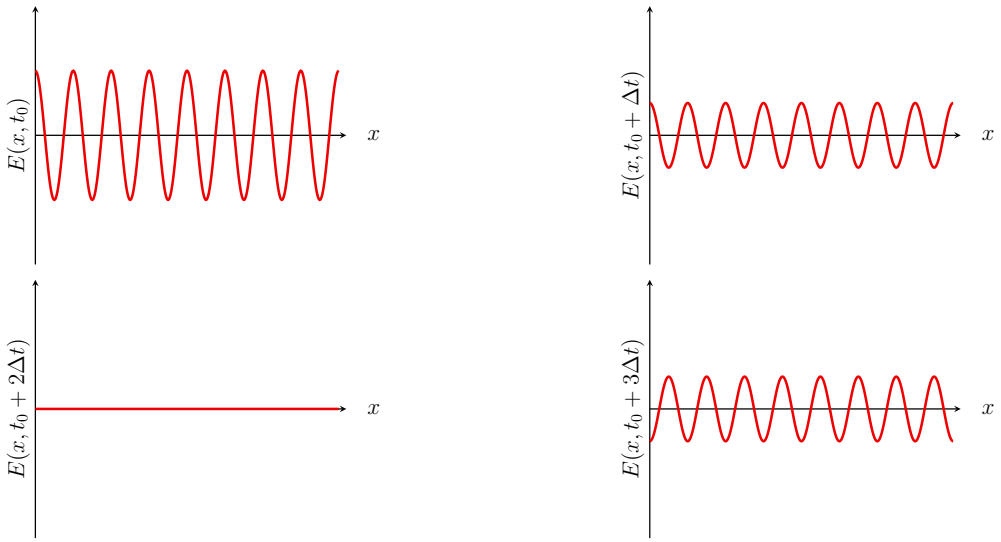
Dans chaque cas, dire si l'onde représentée est progressive (c'est-à-dire de la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$) et/ou harmonique (dont la dépendance temporelle sinusoïdale).

a)



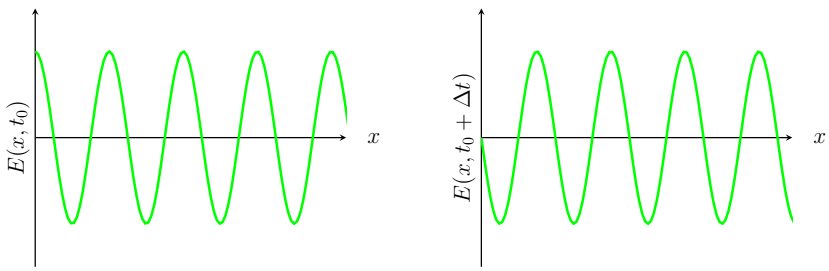
.....

b)



.....

c)



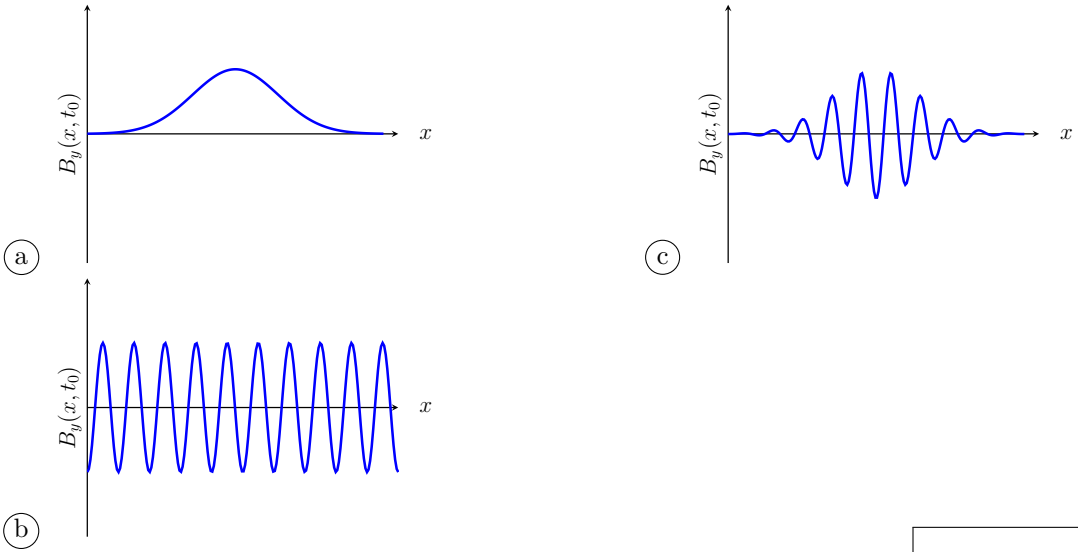
.....

Entraînement 7.11 — Onde représentée par son champ magnétique.

On étudie une onde électromagnétique dont le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M,t) = B_0 \exp\left(-(t/\tau - x/\delta)^2\right)\vec{u_y}$$

Choisir la représentation qui convient :



.....

Entraînement 7.12 — Onde électromagnétique dans un guide d'ondes.

Soit une onde électromagnétique, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}$$

où E_0 et α sont des constantes. On rappelle l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, aussi appelée équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

a) Calculer $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

b) Calculer $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, sans utiliser l'équation de d'Alembert .....

c) En utilisant l'équation de d'Alembert, exprimer k en fonction de ω, α et c .....

On rappelle qu'il y a dispersion si la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de l'onde dépend de ω.

d) Y a-t-il dispersion ici ? .....

Entraînement 7.13 — Onde sphérique progressive.

On considère le champ électrique sphérique suivant : $\vec{E}(r,t) = \dfrac{a}{r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\theta}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le rotationnel du champ $\vec{E}$.

.....

b) En déduire le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

c) Indiquer les caractéristiques de la structure de ce champ électromagnétique :

(a) L'onde est transverse.
(b) L'onde est longitudinale.
(c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.
(d) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre indirect.
(e) Les vecteurs $(\vec{B}, \vec{k}, \vec{E})$ forment un trièdre direct.

.....

On attend plusieurs réponses.

Entraînement 7.14 — Onde dans un guide d'ondes.

On considère le champ électrique suivant :

$$\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

a) Exprimer les valeurs de z pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

b) Exprimer les valeurs de x pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

Entraînement 7.15 — Onde plane en notation complexe.

On considère le champ électrique complexe polarisé rectilignement suivant :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp\Big(\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\Big)\vec{e_x} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y} + k_z\vec{e_z}.$$

Calculer :

a) la dérivée temporelle de $\underline{\vec{E}}$ .....

b) la divergence de $\underline{\vec{E}}$ .....

c) le rotationnel de $\underline{\vec{E}}$ .....

d) le laplacien vectoriel de $\underline{\vec{E}}$ .....

Attribuer alors à chaque opération de dérivation ci-dessous l'expression qui lui est associée.

(a) $-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$ (b) $-k^2\underline{\vec{E}}$ (c) $-\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$ (d) $\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$

e) $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$ ..... g) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}}$ .....

f) $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}$ ..... h) $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}}$ .....

Entraînement 7.16 — Vitesse de phase et vitesse de groupe.

On considère une onde plane progressive harmonique pour laquelle la pulsation ω et le vecteur d'onde k vérifient la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$ où $\omega_0 < \omega$ une constante positive.

a) Exprimer la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de cette onde.

.....

b) En différentiant l'expression de k^2, exprimer la vitesse de groupe $v_\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ de cette onde.

.....

Puissance et énergie des ondes électromagnétiques

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ w_{em} sont respectivement définis par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad \text{et} \qquad w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Entraînement 7.17 — Puissance d'une onde plane progressive.

On considère le champ électromagnétique plan progressif monochromatique suivant :

$$\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(y,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - ky)\vec{e_x}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

Entraînement 7.18 — Puissance d'une onde sphérique progressive.

On considère le champ électromagnétique sphérique suivant :

$$\vec{E}(r,t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr)\vec{e_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{a}{cr} \cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

c) Calculer la puissance rayonnée $P = \iint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.

.....

Entraînement 7.19 — Puissance d'une onde dans un guide d'ondes.

On considère le champ électromagnétique dans le vide suivant : $\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$.

a) Calculer le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

b) Calculer le vecteur de Poynting. .....

c) Donner la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

On rappelle que $\langle \cos^2(\alpha) \rangle = \frac{1}{2}$ *si* α *dépend du temps.* .....

Autour de la polarisation

Entraînement 7.20 — Polarisation rectiligne et circulaire.

On considère les champs électriques, de période T, en représentation réelle ou complexe, suivants :

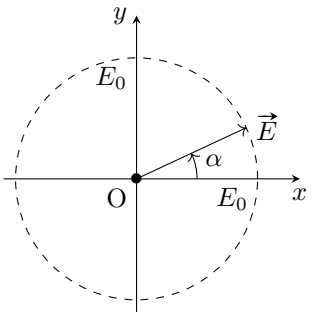
$$\overrightarrow{E_1} = \begin{cases} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\underline{\overrightarrow{E_3}} = E_0 \exp[\mathrm{j}(\omega t - kz + \alpha)]\,(\overrightarrow{e_x} - \mathrm{j}\overrightarrow{e_y})$$

$$\overrightarrow{E_4} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0 \sin(\omega t + kz - \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

où E_0 est un réel positif.



Ces champs sont tous représentés à $t = 0$ et $z = 0$ par la figure ci-dessus.

Indiquer, pour chaque champ, le type de polarisation et la direction de propagation parmi les cas suivants :

(a) Rectiligne se propageant selon $+z$
(b) Rectiligne se propageant selon $-z$
(c) Circulaire gauche se propageant selon $+z$
(d) Circulaire gauche se propageant selon $-z$
(e) Circulaire droite se propageant selon $+z$
(f) Circulaire droite se propageant selon $-z$

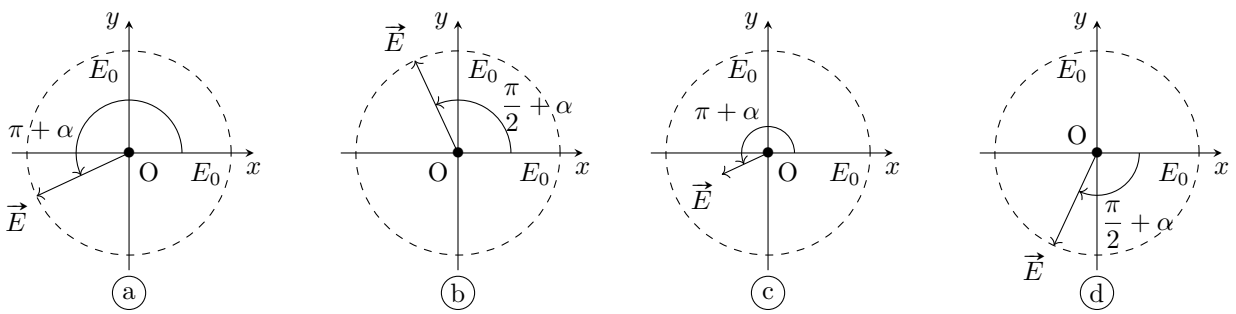
a) Pour $\overrightarrow{E_1}$ ..... ☐

b) Pour $\overrightarrow{E_2}$ ..... ☐

c) Pour $\underline{\overrightarrow{E_3}}$ ..... ☐

d) Pour $\overrightarrow{E_4}$ ..... ☐

Parmi les représentations suivantes, en $z = 0$, laquelle représente :



e) le champ $\overrightarrow{E_1}\left(t = \dfrac{T}{3}, z = 0\right)$ .... ☐

f) le champ $\overrightarrow{E_2}\left(t = \dfrac{T}{2}, z = 0\right)$ .... ☐

g) le champ $\underline{\overrightarrow{E_3}}\left(t = \dfrac{T}{4}, z = 0\right)$ .... ☐

h) le champ $\overrightarrow{E_4}\left(t = \dfrac{T}{4}, z = 0\right)$ .... ☐

Réponses mélangées

$\dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}$ $\quad -\mathrm{j}k_x\underline{E}_x$ $\quad v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ $\quad k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$

$-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\vec{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\vec{e_z}$ $\quad 1\times10^{-20}\,\mathrm{s}$ $\quad -\omega E_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad 5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$

$v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$ $\quad$ signal n° 2 $\quad$ (d) $\quad$ (a) $\quad z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}$ $\quad$ (c)

$-E_0\cos(\omega t - kz)\left(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\times \left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) + \alpha\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\right)\vec{e_x}$ $\quad$ (d) $\quad$ (a) $\quad$ Progressive $\quad 1\times10^{-1}\,\mathrm{m}$

(a), (c) et (e) $\quad -k^2\underline{\vec{E}}$ $\quad -k^2B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad \dfrac{ak}{r}\sin(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}$

0 $\quad$ (c) $\quad x = qa$ $\quad$ Progressive et harmonique $\quad$ (c) $\quad$ (d) $\quad$ (c)

$\dfrac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\dfrac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right]$ $\quad \varepsilon_0E_0^2\cos^2(\omega t - ky)$ $\quad -\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

(b) $\quad c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ $\quad B_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}$ $\quad \dfrac{\pi}{a}B_0\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad \dfrac{E_0^2S}{2\mu_0c}$

(b) $\quad$ Ampoule classique $\quad$ signal n° 1 $\quad$ (b) $\quad kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

(a) $\quad$ Stationnaire, donc non progressive et harmonique $\quad -\omega^2B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

$E_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(-\dfrac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha\sin(\omega t - kz)\right)$ $\quad E_0\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(\dfrac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t - kz) - k\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}$ $\quad \dfrac{\varepsilon_0cE_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$

$\dfrac{\varepsilon_0ca^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}$ $\quad$ (a) $\quad -\omega^2E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad 1\times10^{-5}\,\mathrm{W}$

$\dfrac{E_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}\right]$ $\quad -kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}$ $\quad$ (f) $\quad$ Oui

$kB_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad -\omega^2\vec{E}$ $\quad k^2E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad -\omega B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

$-k^2E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$ $\quad 4\pi\varepsilon_0ca^2\cos^2(\omega t - kr)$ $\quad 3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$\dfrac{\varepsilon_0a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)$ $\quad -\vec{\Delta}\vec{E}$ $\quad -(\alpha^2+k^2)\vec{E}$ $\quad$ signal n° 3 $\quad \vec{0}$ $\quad \varepsilon_0cE_0^2\cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}$

► Réponses et corrigés page 329

Ondes électromagnétiques II

Prérequis

Maxwell-Gauss (M-G) : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Thomson (M-T) : $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

Maxwell-Faraday (M-F) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère (M-A) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Relation entre c, μ_0 et ε_0 : $\varepsilon_0\,\mu_0 c^2 = 1$

Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

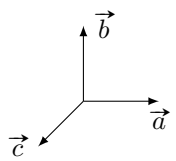
Pour bien commencer

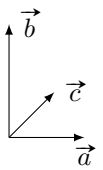
Entraînement 8.1 — Vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

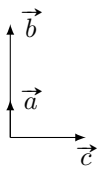
Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont cohérents avec les équations fournies.

Répondre simplement par « oui » ou « non ».

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ et $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ b) $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{c}$ c) $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0}$ et $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$







....

Entraînement 8.2 — Dériver des exponentielles complexes.

Établir une relation de dispersion liant $\underline{k}$ à ω pour chaque équation différentielle.

On s'appuiera sur un champ électrique de la forme :

$$\vec{\underline{E}}(z,t) = E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)]\vec{e_x}.$$

a) $\dfrac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t} + \alpha\dfrac{\partial^2\vec{\underline{E}}}{\partial z^2} = \vec{0}$ .....

b) $\dfrac{\partial^3\vec{\underline{E}}}{\partial t^3} + \alpha\dfrac{\partial^3\vec{\underline{E}}}{\partial z^3} + \beta\dfrac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t} = \vec{0}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2\vec{\underline{E}}}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial z} + \beta\vec{\underline{E}} = \vec{0}$ .....

Entraînement 8.3 — Conservation de la charge.

On considère dans un plasma « dilué » une onde électromagnétique de fréquence suffisamment élevée, ce qui simplifie l'écriture de la densité volumique de courant en notation complexe $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}(\omega)\,\underline{\vec{E}}$.

En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge s'écrit $\mathrm{i}\omega\underline{\rho} + \operatorname{div}\underline{\vec{j}} = 0$.

a) Établir une relation entre $\underline{\rho}$, $\underline{\alpha}$ et ω .....

b) En tenant compte de l'expression de la conductivité complexe $\underline{\alpha} = \dfrac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega}$ et en introduisant la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\dfrac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0}}$, établir une relation liant ω, ω_p et $\underline{\rho}$ .....

Entraînement 8.4 — Expression du vecteur d'onde.

On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement et caractérisée par le champ électrique complexe : $\underline{\vec{E}} = E_0\,\exp[\mathrm{i}\,(\omega\,t - \underline{k}\,z)]\,\vec{e_x}$. On pose $\alpha_0 = \omega_p^2\tau\varepsilon_0 = \dfrac{\omega_p^2\,\tau}{\mu_0\,c^2}$.

Cette onde se propage dans un métal réel de conductivité α. On admet que la relation de dispersion est

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1 - \mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right].$$

Dans les différents cas, déterminer l'expression de $\underline{k}$.

a) $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$ .....

b) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ .....

c) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ .....

d) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ .....

Entraînement 8.5 — Vitesse de phase.

Dans un milieu de propagation, les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g d'une onde sont définies par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'},$$

où k' est la partie réelle du vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$. Dans un plasma, la relation de dispersion s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2},$$

où ω_p est une constante.

a) Exprimer la vitesse de phase v_φ lorsque $\omega > \omega_p$ .....

b) Exprimer la vitesse de groupe v_g lorsque $\omega > \omega_p$ .....

Énergie et puissance

Entraînement 8.6 — Vecteur de Poynting et énergie du champ.

On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice réel n défini par

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{n}{c} E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ w_{em} sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad w_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

a) Exprimer le vecteur de Poynting .....

b) Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

c) Déterminer l'énergie volumique associée à l'onde .....

d) Exprimer la moyenne temporelle de l'énergie .....

Entraînement 8.7 — Puissance dans un conducteur.

On considère une onde dans un conducteur d'épaisseur de peau δ, de conductivité réelle γ, vérifiant

$$\vec{E} = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\vec{e_y}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\left[\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_z}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la puissance volumique perdue par effet Joule p_J sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

a) Exprimer la moyenne du vecteur de Poynting.

.....

b) Exprimer la puissance moyenne perdue par effet Joule.

.....

Entraînement 8.8 — Vecteur de Poynting en notation complexe.

En notation complexe, la moyenne temporelle du vecteur de Poynting pour des ondes planes progressives monochromatiques est donnée par

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}})}{2\mu_0},$$

où le symbole * désigne la conjugaison complexe. On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice complexe $\underline{n}$ défini par

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x} \text{ et } \underline{\vec{B}} = \frac{\underline{n}\,\underline{E}_0}{c} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}.$$

Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting .....

Manipuler les équations de Maxwell

Entraînement 8.9 — Relation de dispersion.

On considère l'équation de propagation complexe dans un plasma

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t}.$$

Le champ électrique qui se propage dans le plasma vaut : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[\mathrm{i}\,(\omega\, t - \underline{k}\, z)]\,\vec{e_x}$ avec $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{e_z}$.

En tenant compte de l'expression du vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{\mathrm{i}\,\omega\,m}\,\underline{\vec{E}}$, établir l'équation de dispersion, liant k, ω, c et $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m\varepsilon_0}$.

.....

Entraînement 8.10 — Établir une équation d'onde.

On considère un milieu ohmique localement neutre tel que : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. On pourra utiliser la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}.$$

a) Exprimer l'équation de Maxwell-Gauss modifiée.

.....

b) Exprimer l'équation de Maxwell-Faraday modifiée.

.....

c) Déterminer l'équation différentielle à laquelle $\vec{E}$ obéit.

.....

Entraînement 8.11 — Vérification des équations de Maxwell (I).

Nous nous plaçons dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) et nous supposons que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$$
$$\text{et} \quad \vec{B}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kz)\vec{e_x} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

Entraînement 8.12 — Vérification des équations de Maxwell (II).

Nous nous plaçons dans un plasma avec

$$\underline{\vec{j}}(z,t) = -\mathrm{i}\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}\underline{\vec{E}}(z,t), \qquad \underline{\rho}(z,t) = \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\vec{e_z}$$

avec $\omega > \omega_p$ et nous supposons que

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x}$$
$$\text{et} \quad \underline{\vec{B}}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

Différentes familles d'ondes

Entraînement 8.13 — Onde progressive ou onde évanescente.

Nous nous intéressons à un champ électrique de la forme

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)]\vec{e_z} \quad \text{avec} \quad \underline{k} = k' + \mathrm{i}k"$$

où $k" \leqslant 0$.

Pour chaque relation de dispersion, déterminer si le champ électrique se présente sous la forme d'une onde

(a) progressive $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

(b) évanescente $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp(\mathrm{i}\omega t)\vec{e_z}$

(c) progressive atténuée $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

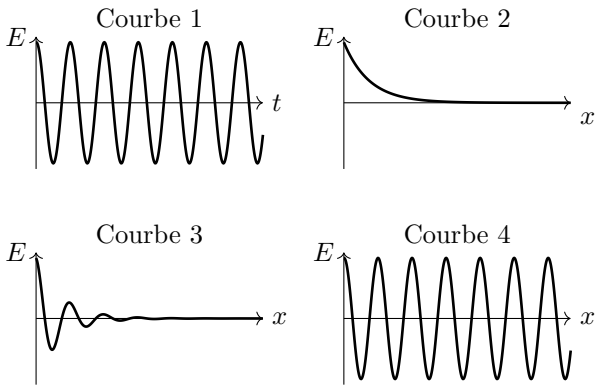
a) $\underline{k}^2 = -i\dfrac{\omega}{c}$ .....

b) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega > \omega_p$ .....

c) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega < \omega_p$ .....

Entraînement 8.14 — Courbes et expressions.

Dans chaque cas, relier à l'expression de $\vec{E}$ fournie, la ou les courbes qui lui correspondent.



a) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t) \exp(-kx)\vec{e_z}$ avec $k > 0$ .....

c) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - k'x) \exp(-k"x)\vec{e_z}$ avec $k" > 0$ .....

Réflexion et transmission

Entraînement 8.15 — Coefficients de réflexion et transmission en amplitude.

On considère les champs $\{\vec{E}_i, \vec{B}_i\}$ dans le milieu d'indice n_1 en incidence normale sur un dioptre $x = 0$ produisant les champs réfléchis $\{\vec{E}_r, \vec{B}_r\}$ dans le milieu d'indice n_1 et transmis $\{\vec{E}_t, \vec{B}_t\}$ dans le milieu d'indice n_2 tels que :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_i = \dfrac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_r = rE_0 \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_r = -\dfrac{n_1 r E_0}{c} \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_t = tE_0 \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_t = \dfrac{n_2 t E_0}{c} \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_z} \end{cases}$$

a) Les relations de continuité des champs entre les milieux 1 et 2 imposent $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ et $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$.

En déduire deux relations entre r, t, n_1 et n_2 .....

b) En déduire l'expression des coefficients r et t .....

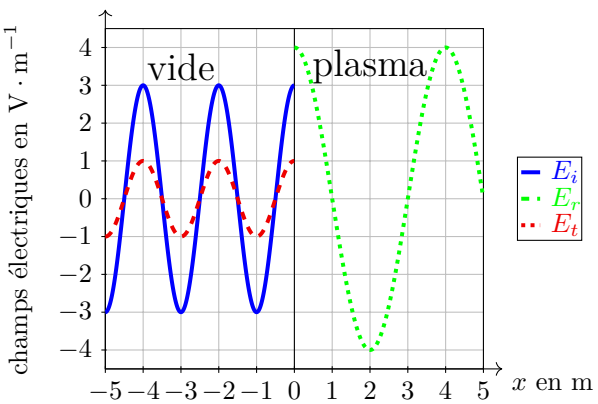
Entraînement 8.16 — Coefficients de réflexion et transmission.

Un dioptre en $x = 0$ sépare du vide d'indice $n_1 = 1$ pour $x < 0$ d'un plasma d'indice réel n_2 pour $x > 0$. On rappelle les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude (r, t)

$$\begin{cases} r = \dfrac{E_r(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \\ t = \dfrac{E_t(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}, \end{cases}$$

et en puissance (R, T)

$$R = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = |t|^2 \frac{n_2}{n_1}.$$



a) Donner la longueur d'onde dans chaque domaine .....

b) À l'aide du graphique, évaluer r et t .....

c) En déduire l'indice n_2 du plasma .....

d) Calculer les coefficients R et T .....

Entraînement 8.17 — Coefficients de réflexion et transmission en puissance.

En notation complexe, pour des ondes planes progressives monochromatiques de vecteur d'onde $\vec{\underline{k}}_1$ perpendiculaire au champ électrique $\vec{\underline{E}}$, le champ magnétique $\vec{\underline{B}}$ associé est

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{\underline{k}}_1 \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega},$$

et la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donnée par $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \dfrac{\mathrm{Re}(\vec{\underline{E}}^* \wedge \vec{\underline{B}})}{2\mu_0}$.

On rappelle la relation d'analyse vectorielle $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

a) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

Ce champ, en incidence normale sur un dioptre, donne lieu à un champ réfléchi de coefficient d'amplitude $\underline{r}$ de vecteur d'onde $-\vec{\underline{k}}_1$ ainsi qu'à un champ transmis de coefficient d'amplitude $\underline{t}$ de vecteur d'onde $\vec{\underline{k}}_2$.

b) Exprimer les puissances réfléchie et transmise.

.....

c) En déduire l'expression de $R = -\dfrac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ et $T = \dfrac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ .....

Réponses mélangées

(c) $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ $\quad \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}(1+n^2)$ $\quad$ (a) $\quad \dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)$ $\quad \underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$ $\quad \dfrac{1}{2}$

oui $\quad \dfrac{1}{9}$ et $\dfrac{8}{9}$ $\quad \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$ $\quad \begin{cases} r+1 = t \\ n_1 - r n_1 = t n_2 \end{cases}$ $\quad |\underline{r}|^2$ et $|\underline{t}|^2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$

$\pm \mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ $\quad$ non $\quad$ non $\quad \underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$ $\quad \dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathrm{Re}(\underline{n})\vec{e}_z$ $\quad v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$ $\quad$ non

oui $\quad \dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_z$ $\quad$ 2 m et 4 m $\quad$ non $\quad \begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$ $\quad$ 1 et 2 $\quad \dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\quad \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}(1+n^2)\cos^2(\omega t - kz)$ $\quad \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e}_z$

$\underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$ $\quad \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{4}{3}$ $\quad$ oui $\quad v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ $\quad$ oui $\quad$ oui $\quad \underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$

$\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e}_x$ $\quad \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$ $\quad \Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\quad$ 1 et 3

oui $\quad -\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)$ $\quad \dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_2\right)$ $\quad$ oui $\quad \pm\dfrac{\omega}{c}$ $\quad$ (b) $\quad \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ $\quad$ oui $\quad$ 1 et 4

► Réponses et corrigés page 336

Modèle scalaire de la lumière

Prérequis
Optique géométrique (rayons, indice optique, lentilles, lois de Snell-Descartes). Trigonométrie. Longueurs d'onde dans le vide et dans un milieu, période, fréquence et pulsation.

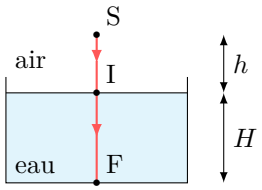
Constantes utiles
→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Exprimer un chemin optique

Dans un milieu homogène, le chemin optique entre deux points A et B est défini comme le produit de l'indice optique n du milieu par la distance géométrique AB parcourue par un rayon lumineux : $(\mathrm{AB}) = n \times \mathrm{AB}$.

Entraînement 9.1 — De l'eau dans un verre.

Un rayon issu d'une source ponctuelle arrive sous incidence normale à la surface de l'eau contenue dans un verre. Les indices optiques de l'air et de l'eau sont respectivement notés n_{air} et n_{eau}.



a) Exprimer le chemin optique (SI) en fonction de n_{air} et h .....

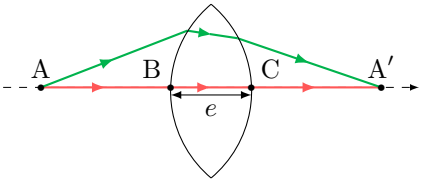
b) Exprimer le chemin optique (IF) en fonction de n_{eau} et H .....

c) En déduire l'expression du chemin optique (SF) .....

d) Comment se réexprime cette expression si l'air est assimilé au vide ? .....

Entraînement 9.2 — Points conjugués par une lentille.

Deux points A et A′ sont conjugués par une lentille convergente : tous les rayons issus de A et arrivant en A′ ont des chemins optiques identiques. Pour simplifier, ces points sont choisis sur l'axe optique de la lentille. L'air est assimilé au vide.



On note e l'épaisseur maximale de la lentille et n l'indice optique du verre.

En travaillant avec le rayon confondu avec l'axe optique, exprimer :

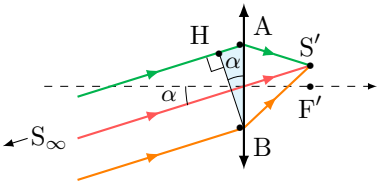
a) le chemin optique dans le verre (BC), en fonction de e et n .....

b) le chemin optique dans l'air $(\mathrm{AB}) + (\mathrm{CA'})$ en fonction de la distance $\mathrm{AA'}$ et e ...

c) en déduire l'expression générale du chemin optique $(\mathrm{AA'})$ .....

Entraînement 9.3 — Lentille éclairée avec un angle d'incidence non nul.

Des rayons, provenant d'une source S à l'infini, éclairent une lentille sous un angle d'incidence α. Ils convergent en un point S′ du plan focal image de la lentille. Les points A et B sont situés à gauche, juste avant la lentille. L'indice optique du verre est n. L'air est assimilé au vide.



a) En sachant que le plan passant par H et B est une surface d'onde pour la source S, exprimer la différence de chemin optique (SA) − (SB) en fonction de la distance AB et de l'angle α.

.....

b) Les points S et S′ sont conjugués donc les chemins optiques (SAS′) et (SBS′) sont égaux.

En déduire la différence de chemin optique (AS′) − (BS′) en fonction de la distance AB et de l'angle α.

.....

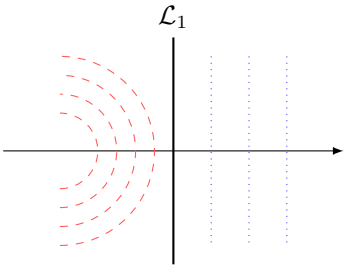
Surfaces d'onde et théorème de Malus

D'après le théorème de Malus, les rayons lumineux issus d'un point source S sont perpendiculaires aux surfaces d'onde relatives à cette source. La surface d'onde étant le lieu des points d'égal chemin optique par rapport à la source.

Entraînement 9.4 — Action d'une lentille inconnue sur des surfaces d'onde.

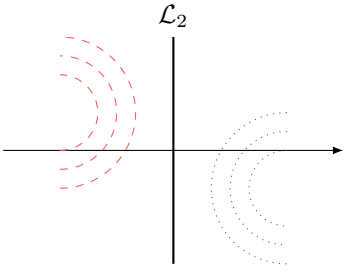
On considère ici des surfaces d'onde issues d'un point objet (en tirets) et celles de son image (en pointillés) par une lentille inconnue. Pour chaque situation, déterminer si la lentille est « convergente » ou « divergente ».

a)



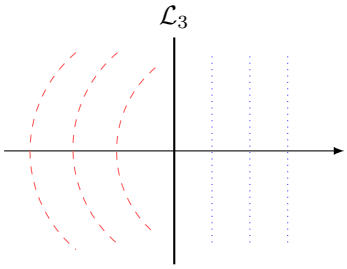
.....

b)



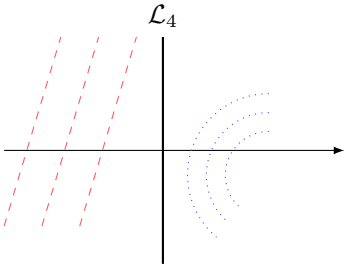
.....

c)



.....

d)

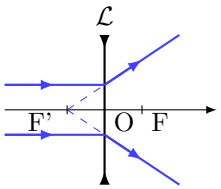


.....

Entraînement 9.5 — Action d'une lentille divergente sur des surfaces d'onde.

On construit l'image par une lentille divergente $\mathcal{L}$ d'une source lumineuse placée à l'infini sur l'axe optique.

Une ou plusieurs réponses sont possibles.



a) En amont de la lentille, les surfaces d'onde sont :

(a) perpendiculaires à l'axe optique
(b) des cercles concentriques centrés sur F
(c) des plans parallèles entre eux

.....

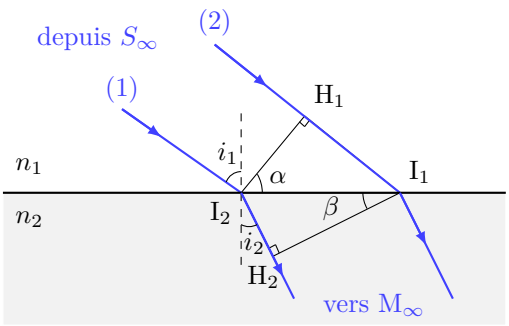
b) En aval de la lentille, les surfaces d'onde sont :

(a) des cercles concentriques centrés sur F
(b) des plans perpendiculaires à l'axe optique
(c) des cercles concentriques centrés sur F'

.....

Entraînement 9.6 — Une loi bien connue...

Une onde plane arrive sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2. On note H_1 le projeté orthogonal de I_2 sur le rayon (2). De même, H_2 est le projeté orthogonal de I_1 sur le rayon (1). On note $I_1I_2 = a$.



a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) I_2 et I_1 (b) I_2 et H_1 (c) I_1 et H_2

.....

b) Que vaut l'angle α ?

(a) $\frac{\pi}{2} - i_1$ (b) i_1 (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

.....

c) Exprimer le chemin optique (H_1I_1) en fonction de n_1, a et α.

.....

d) Que vaut l'angle β ?

(a) i_2 (b) $\frac{\pi}{2} - i_2$ (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

.....

e) Exprimer le chemin optique (I_2H_2) en fonction de n_2, a et β .....

f) À partir des questions c) et e), déduire une relation entre n_1, $\sin(i_1)$, n_2 et $\sin(i_2)$.

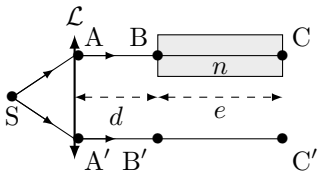
.....

Retard de phase

Le retard de phase, ou *phase*, d'un rayonnement en un point M par rapport à sa source au point S est défini par $\phi(\mathrm{M}) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(\mathrm{SM})$, où (SM) le chemin optique entre les deux points.

Entraînement 9.7 — Surface d'onde et déphasage.

Un point source S émettant un rayonnement monochromatique de longueur d'onde λ_0 est placé au foyer objet d'une lentille mince convergente. Une lame d'indice n et d'épaisseur e est placée à une distance d de la lentille et recouvre une partie du faisceau. On considère que les points A et A′, à équidistance de S se situent juste après la lentille. On prendra l'indice de l'air égal à 1.



a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) A et A′ (b) B et B′ (c) C et C′

b) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C}')$ en fonction de λ_0, (SA'), d et e.

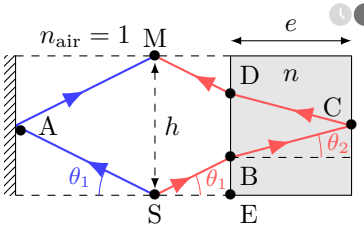
c) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C})$ en fonction de λ_0, (SA), d, n et e.

d) En déduire le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{C}) - \phi(\mathrm{C}')$ en fonction de λ_0, n et e.

Entraînement 9.8 — Phases et déphasage.

Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide λ_0 est émis depuis une source en S. On considère que le point d'incidence A se situe juste avant le miroir, et on rappelle qu'une réflexion sur un miroir métallique produit un retard de phase de π.

Exprimer la phase ϕ_1 du rayon 1 réfléchi par le miroir de gauche en fonction de h et θ_1 aux points de l'espace suivant.



a) $\phi_1(\mathrm{A})$ ..... b) $\phi_1(\mathrm{M})$ .....

c) Exprimer la distance BD en fonction de e et θ_2 .....

d) Exprimer la distance EB en fonction de e, h et θ_2 .....

e) Quelle est l' expression correcte de $\phi_2(\mathrm{B})$, la phase du rayon de droite au point B ?

(a) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2n\sin\theta_1} - \dfrac{e}{\cos\theta_2}\right)$ (b) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} - \dfrac{e}{n\cos\theta_2}\right)$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{e}{\cos\theta_2} - \dfrac{h}{2n\sin\theta_1}\right)$

f) Exprimer la phase de ce rayon en M, $\phi_2(\mathrm{M})$, en fonction de h, e, n, θ_1 et $\cos\theta_2$.

.....

g) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M})$ en fonction de e, n et $\cos\theta_2$.

.....

h) Quelle est l'expression correcte de $\Delta\phi$? *On rappelle que* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

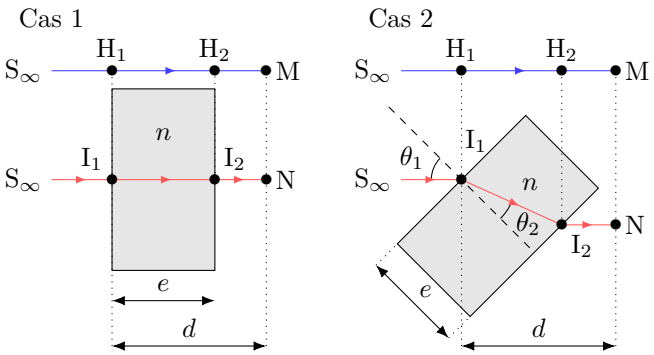
(a) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} - \pi$ (b) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} + \pi$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} + \pi$

.....

Entraînement 9.9 — Déphasage dû à une lame.

On souhaite exprimer les différences de phases $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ entre le rayon passant par N et le rayon passant par M issus de la même source à l'infini S de longueur d'onde dans le vide λ_0.

L'indice de l'air est pris égal à 1.



a) Pour le cas 1, exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ selon e, λ_0 et n.

.....

On considère maintenant le cas 2.

b) Exprimer la distance $\mathrm{I_1I_2}$ en fonction de e et θ_2 .....

c) Exprimer la distance $\mathrm{H_1H_2}$ en fonction de $\mathrm{I_1I_2}$ et $\theta_1 - \theta_2$ .....

d) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ en fonction de e, λ_0, n, θ_2 et $\theta_1 - \theta_2$.

.....

e) Quelle est l'expression correcte de $\cos(\theta_1 - \theta_2)$?

On rappelle que $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ *et que* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

(a) $\cos\theta_1\cos\theta_2 - n + n\sin^2\theta_2$ (c) $\cos\theta_1\cos\theta_2 + n - n\cos^2\theta_2$

(b) $\sin\theta_1\sin\theta_2 + n - n\sin^2\theta_2$

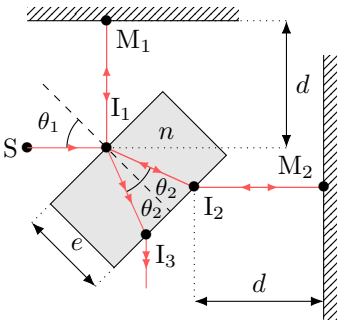
.....

f) En déduire une expression de $\Delta\phi$ fonction de e, λ_0, n, $\cos\theta_2$ et $\cos\theta_1$.

.....

Entraînement 9.10 — Lame séparatrice.

Cas 3



Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide λ_0 est émis depuis une source en S. Il est séparé en deux rayons par une lame semi-réfléchissante inclinée d'un angle $\theta_1 = 45°$. On cherche à déterminer le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux rayons en sortie de la lame après réflexion sur les deux miroirs en M_1 et M_2. On rappelle qu'un rayon subit un déphasage de π après réflexion sur un miroir métallique, ou sur un dioptre si le rayon incident se propage dans le milieu le moins réfringent : d'indice de réfraction le plus faible.

a) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M_1 dû à la réflexion .....

b) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M_2 dû à la réflexion .....

c) Exprimer la distance I_1I_2 en fonction de e et θ_2 .....

d) Exprimer la différence de phase $\Delta\phi$ entre le rayon réfléchi par M_2 et le rayon réfléchi par M_1 au point I_3 en fonction e, λ_0, n et θ_2 .....

Largeur spectrale et cohérence temporelle

Entraînement 9.11 — Différentes sources.

Une onde lumineuse est émise par des trains d'onde successifs de durée individuelle moyenne τ_c (temps de cohérence) et de longueur individuelle moyenne $\ell_c = c \times \tau_c$ (longueur de cohérence) dans le vide. D'après l'analyse de Fourier, à cette onde de durée finie correspond un spectre de largeur $\Delta f \simeq \dfrac{1}{\tau_c}$ (en fréquence).

On considère trois sources :

- une lampe spectrale basse pression à vapeur de mercure telle que $\tau_c \simeq 10\,\text{ps}$ (source (1)),
- un laser de TP tel que $\tau_c \simeq 0{,}1\,\mu\text{s}$ (source (2))
- et une source de lumière blanche munie d'un filtre ayant une bande passante $\Delta\lambda = 50\,\text{nm}$ autour de la longueur d'onde $\lambda = 820\,\text{nm}$ (source (3)).

On rappelle que la cohérence temporelle d'une source est d'autant meilleure que son temps de cohérence est important.

a) Estimer Δf en hertz pour la source (1) .....

b) Estimer Δf en hertz pour la source (2) .....

c) En utilisant la relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$, estimer τ_c en picoseconde pour la source (3) .....

d) Classer les sources, de celle possédant la meilleure cohérence temporelle à la moins bonne.

.....

Photométrie

Entraînement 9.12 — Intensité lumineuse.

Un signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$ de période T est détecté par deux capteurs de temps de réponse $\tau = 1\,\text{ns}$.

Les capteurs A et B délivrent des signaux de tension u_1 et u_2 respectivement proportionnels à la moyenne de s et au carré de la moyenne de s^2 : on a

$$u_1 = K_1\langle s(t)\rangle \qquad \text{et} \qquad u_2 = K_2\langle s^2(t)\rangle,$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

On considère que les signaux u_1 et u_2 émergent du bruit de mesure lorsque leur valeur absolue est respectivement supérieure à $\dfrac{K_1 S_0}{2\pi \times 100}$ et $\dfrac{K_2 S_0^2}{2}$.

On indique que la moyenne temporelle d'un signal $f(t)$ mesuré pendant une durée τ est

$$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Exprimer u_1 en fonction de K_1, S_0, τ et T.

.....

b) Quelle est la valeur maximale de u_1 fonction de $\dfrac{\tau}{T}$?

(a) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{T}{\tau}$

(b) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{\tau}{T}$

(c) $K_1 S_0 \dfrac{\tau}{2\pi T}$

(d) $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$

.....

c) En déduire la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A.

.....

d) Exprimer u_2 en fonction de K_2, S_0, τ et T.

On rappelle que $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$.

.....

e) Quelle est la valeur maximale de u_2 fonction de $\dfrac{\tau}{T}$?

(a) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(T + \dfrac{\tau}{4\pi}\right)$

(b) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

(c) $\dfrac{K_2 S_0^2}{\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

.....

f) Existe-t-il une fréquence maximale du signal exploitable par le capteur B ?

.....

Entraînement 9.13 — Choix d'une photodiode.

La sensibilité d'une photodiode s est, au cours d'une mesure de durée τ, le rapport de proportionnalité entre l'intensité du courant électrique produit I_{mes} et la puissance lumineuse mesurée $\mathcal{P}_{\text{mes}}$: on a

$$s = I_{\text{mes}}/\mathcal{P}_{\text{mes}}.$$

De plus, l'intensité du courant d'obscurité I_{obs} d'une photodiode correspond à l'intensité électrique minimale que doit dépasser le courant produit au cours d'une mesure.

On dispose de trois photodiodes détectant respectivement trois radiations de longueurs d'onde dans le vide différentes. Les caractéristiques des photodiodes et des radiations sont données ci-dessous.

photodiode 1	$\lambda_1 = 470\,\text{nm}$	$s_1 = 0{,}300\,\text{A}\cdot\text{W}^{-1}$	$I_{\text{obs }1} = 3{,}00\times10^{-5}\,\mu\text{A}$	$\tau_1 = 2{,}00\times10^{-4}\,\text{ms}$
photodiode 2	$\lambda_2 = 550\times10^{3}\,\text{pm}$	$s_2 = 200\,\text{mA}\cdot\text{W}^{-1}$	$I_{\text{obs }2} = 150\,\text{pA}$	$\tau_2 = 0{,}450\,\mu\text{s}$
photodiode 3	$\lambda_3 = 0{,}660\,\mu\text{m}$	$s_3 = 300\,\text{A}\cdot\text{kW}^{-1}$	$I_{\text{obs }3} = 2{,}00\,\text{nA}$	$\tau_3 = 50{,}0\,\text{ns}$

Calculer en watt les puissances lumineuses minimales détectables par les photodiodes.

a) $\mathcal{P}_{\text{min }1}$ .... ☐ b) $\mathcal{P}_{\text{min }2}$ .... ☐ c) $\mathcal{P}_{\text{min }3}$ .... ☐

Calculer en joule les énergies minimales détectables au cours d'une durée τ par les photodiodes.

d) $E_{\text{min }1}$ .... ☐ e) $E_{\text{min }2}$ .... ☐ f) $E_{\text{min }3}$ .... ☐

g) Sachant que l'énergie d'un photon est donnée par $E = h\nu$, où $h = 6{,}63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck, quelle photodiode permet de mesurer le plus petit nombre de photons ?

ⓐ Photodiode 1 ⓑ Photodiode 2 ⓒ Photodiode 3

..... ☐

Réponses mélangées

ⓑ $7{,}50\times10^{-10}\,\text{W}$ $\Delta f = 1{,}0\times10^{7}\,\text{Hz}$ $\dfrac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau+\dfrac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)\right)$ ⓑ

$\text{AB}\sin(\alpha)$ $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1}+\left(n-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{e}{\cos\theta_2}\right)$ $\dfrac{e}{\cos\theta_2}$ ⓒ $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{ne}{\cos\theta_2}-\pi$

$\dfrac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA})+d+ne)$ $\Delta f = 1{,}0\times10^{11}\,\text{Hz}$ Convergente $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)$ $\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$

$n_{\text{air}}\times h + n_{\text{eau}}\times H$ $\dfrac{h}{2}-e\tan\theta_2$ ⓐ $1\times(\text{AA}'-e)$ $6{,}67\times10^{-9}\,\text{W}$

$n_2 a\sin\beta$ $n_{\text{air}}\times h$ ⓐ $n_{\text{eau}}\times H$ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$ $\tau_{\text{c}} = 45\times10^{3}\,\text{ps}$

Convergente $2\times10^{-17}\,\text{J}$ $\dfrac{e}{\cos\theta_2}$ Divergente $3{,}38\times10^{-16}\,\text{J}$ ⓐ et ⓑ

$\dfrac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}')+d+e)$ $1{,}00\times10^{-10}\,\text{W}$ $n_1 a\sin\alpha$ $3{,}33\times10^{-16}\,\text{J}$ $\text{AA}'+(n-1)e$

$\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e}{\cos\theta_2}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)-\pi$ ⓓ ⓒ ②, ① puis ③ $1\times h + n_{\text{eau}}\times H$ ⓑ

$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$ ⓐ et ⓒ $\dfrac{\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin\theta_1}$ ⓑ et ⓒ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin\theta_1}+\pi$ π

$n\times e$ Convergente $2e\tan\theta_2$ 2π 100 GHz $K_1S_0\dfrac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$

non $-\text{AB}\sin(\alpha)$ ⓐ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos\theta_2-\cos\theta_1)$ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{e}{\cos\theta_2}(n-\cos(\theta_1-\theta_2))$

► Réponses et corrigés page 342

Interférences à deux ondes

Prérequis
Fonctions trigonométriques. Signaux (fréquence, période, pulsations temporelle et spatiale, nombre d'onde, longueur d'onde, phase).

Constantes utiles
→ Célérité de la lumière $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Pour commencer

Entraînement 10.1 — Des relations trigonométriques.

On donne les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (1) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (2)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \quad (3) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (4)$$

a) Sommer les relations (1) et (2) et isoler $\cos(a)\cos(b)$ ....

b) Réécrire la relation précédente pour $a = b$ .....

c) Soustraire les relations (1) et (2), isoler $\sin(a)\sin(b)$ puis réécrire la relation obtenue pour $a = b$.

.....

d) Sommer les relations (3) et (4), isoler $\sin(a)\cos(b)$ puis réécrire la relation obtenue pour $a = b$.

.....

Entraînement 10.2 — Somme de signaux périodiques.

On définit deux signaux lumineux : $s_1(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx)$ et $s_2(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx + \varphi)$ avec ω leur pulsation temporelle, k leur pulsation spatiale et φ une phase à l'origine. La superposition $s(x,t)$ de ces deux vibrations peut se mettre sous la forme :

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = S_0\Big(f(x,t)\ (1+\cos(\varphi)) + g(x,t)\ \sin(\varphi)\Big).$$

On utilisera la relation trigonométrique : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Exprimer les fonctions suivantes :

a) $f(x,t)$ ..... b) $g(x,t)$ .....

c) Pour quelle valeur de phase φ le signal $s(x,t)$ s'annule-t-il ?

(a) $\varphi = 0$ (b) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (c) $\varphi = \pi$

.....

Entraînement 10.3 — Valeurs moyennes (I).

Un détecteur mesure la moyenne temporelle d'un signal périodique $s(t)$ de période T.

Cette moyenne, notée $\langle s(t)\rangle$, est définie par

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t.$$

On donne les relations trigonométriques suivantes :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a-b)-\sin(a+b)}{2}$.

On étudie les signaux suivants :

$$s_1(t) = S_1\cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{et} \quad s_2(t) = S_2\sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2).$$

a) Exprimer la période T_1 de $s_1(t)$ en fonction de ω_1.

.....

b) À partir de la définition fournie, calculer $\langle s_1(t)\rangle$ sur T_1.

.....

c) Exprimer la période T_2 de $s_2(t)$ en fonction de ω_2.

.....

d) À partir de la définition fournie, calculer $\langle s_2(t)\rangle$ sur T_2.

.....

e) Exprimer la période T_3 de $f_1(t) = s_1^2(t)$ en fonction de ω_1.

.....

f) À partir de la définition fournie, calculer $\langle f_1(t)\rangle$ sur T_3.

.....

g) Exprimer la période T_4 de $f_2(t) = s_2^2(t)$ en fonction de ω_2.

.....

h) À partir de la définition fournie, calculer $\langle f_2(t)\rangle$ sur T_4.

.....

Entraînement 10.4 — Valeurs moyennes (II).

Les moyennes temporelles des fonctions cosinus et sinus pour un nombre entier de périodes vérifient

$$\langle A\cos(a\omega t+b)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle A\sin(a\omega t+b)\rangle = 0$$

avec A, a, ω et b des constantes.

On donne les relations trigonométriques suivantes :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a-b)-\sin(a+b)}{2}$.

Calculer la moyenne temporelle sur un nombre entier de périodes des fonctions ci-dessous.

a) $\left\langle [\cos(\omega_0 t+\varphi_1)+\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

b) $\left\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

c) $\left\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)+B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

d) $\left\langle \left[\dfrac{A}{4}\sin\Big(\dfrac{\omega_0}{2}t+\varphi_0\Big)+\dfrac{A}{2}\sin\Big(\dfrac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0\Big)\right]^2 \right\rangle$

.....

Entraînement 10.5 — Bataille de contrastes.

On mesure les maxima et les minima d'éclairements de différentes figures d'interférences.

Quelle est celle qui présente le plus fort contraste $C = \dfrac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$?

On rappelle que $1\,\text{pW} = 1\times10^{-12}\,\text{W}$.

(a) $I_{\max} = 10{,}0\times10^{6}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et $I_{\min} = 1{,}00\,\text{MW}\cdot\text{m}^{-2}$

(b) $I_{\max} = 660\,\text{mW}\cdot\text{mm}^{-2}$ et $I_{\min} = 0{,}220\,\text{kW}\cdot\text{dm}^{-2}$

(c) $I_{\max} = 5{,}00\,\text{mW}\cdot\text{mm}^{-2}$ et $I_{\min} = 2{,}00\,\text{mW}\cdot\text{cm}^{-2}$

(d) $I_{\max} = 72{,}0\,\text{pW}\cdot\mu\text{m}^{-2}$ et $I_{\min} = 3{,}00\,\text{MW}\cdot\text{km}^{-2}$

.....

Entraînement 10.6 — Signaux isophases.

Une source émet deux vibrations lumineuses $s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$ et $s'(x,t) = S_0 \cos(\omega t' - kx')$ de période temporelle T (associée à la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et la fréquence $f = \dfrac{1}{T}$) et de longueur d'onde λ (associée à la pulsation spatiale $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$). On note $n \in \mathbb{Z}$.

a) Exprimer $\Delta\varphi$ le retard de phase entre s et s' pour $t = t' = t_0$ .....

b) Pour $t = t' = t_0$, comment s'expriment les écarts de positions Δx_n lorsque s et s' ont la même excitation lumineuse ?

(a) $\Delta x_n = n\lambda$ (b) $\Delta x_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ (c) $\Delta x_n = n\dfrac{\lambda}{2}$

.....

c) Exprimer $\Delta\varphi$ le retard de phase entre s et s' pour $x = x' = x_0$ .....

d) Pour $x = x' = x_0$, comment s'expriment les écarts d'instants Δt_n lorsque s et s' ont la même excitation lumineuse ?

(a) $\Delta t_n = nT$ (b) $\Delta t_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)T$ (c) $\Delta t_n = n\dfrac{T}{2}$

.....

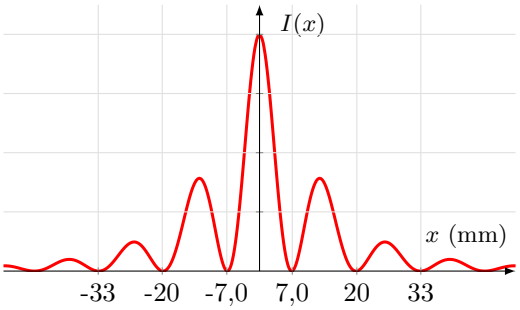
Études d'éclairements

Entraînement 10.7 — Fentes de Young.

L'éclairement $I(x)$ obtenu en un point M d'un écran à une distance D des fentes de Young est représenté sur la figure ci-contre. Il vérifie

$$I(x) = f(x)\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi nax}{\lambda D}\right)\right]$$

où $f(x)$ est une fonction dont nous ne tiendrons pas compte, où a est la distance entre les deux fentes et où n est l'indice du milieu et λ la longueur d'onde du signal.



a) Identifier, grâce à la formule fournie, l'interfrange i (c'est-à-dire la distance entre deux maxima d'éclairement consécutifs).

(a) $i = \dfrac{na}{\lambda D}$ (b) $i = \dfrac{2\pi na}{\lambda D}$ (c) $i = \dfrac{\lambda D}{na}$ (d) $i = \dfrac{\lambda D}{2\pi na}$

.....

b) Mesurer, à partir de la figure, l'interfrange i .....

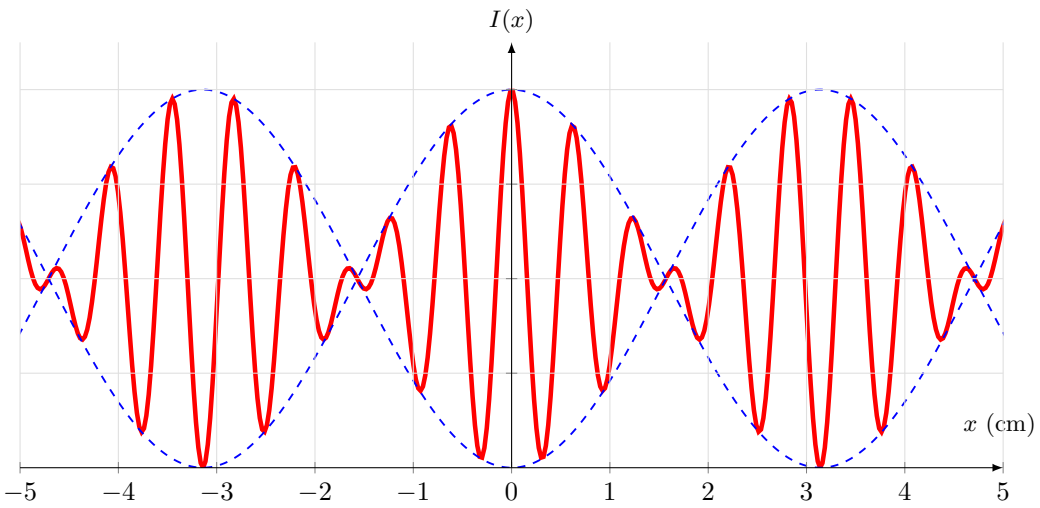
c) En déduire a, sachant que $n = 1{,}0$ que $D = 1{,}0\,\text{m}$ et que $\lambda = 630\,\text{nm}$ .....

Entraînement 10.8 — Doublet spectral.

On éclaire des fentes de Young verticales espacées d'une distance a, avec un doublet spectral de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 (on pose $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ et $\lambda_{\text{moy}} = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}$). L'éclairement $I(x)$, obtenu en un point M d'un écran à une distance D des fentes, est représenté sur la figure ci-dessous. Il vérifie :

$$I(x) = I_{\text{moy}}\left[1 + C(x)\cos\left(\frac{2\pi n a x}{\lambda_{\text{moy}} D}\right)\right]$$

avec $C(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n a x \Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2 D}\right)$, qu'on appelle le terme de contraste.



a) Identifier, grâce à la formule fournie, la période X du terme de contraste.

(a) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{na\Delta\lambda}$

(b) $X = \dfrac{2\lambda_{\text{moy}}^2 D}{na\Delta\lambda}$

(c) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{2na\Delta\lambda}$

(d) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{2\pi na\Delta\lambda}$

.....

b) On rappelle que $i = \dfrac{\lambda_{\text{moy}} D}{na}$. Déterminer graphiquement l'interfrange i.

.....

c) En déduire λ_{moy}, sachant que $n = 1{,}0$, que $D = 1{,}5\,\text{m}$ et $a = 0{,}20\,\text{mm}$.

.....

d) Déterminer graphiquement la période X du terme de contraste.

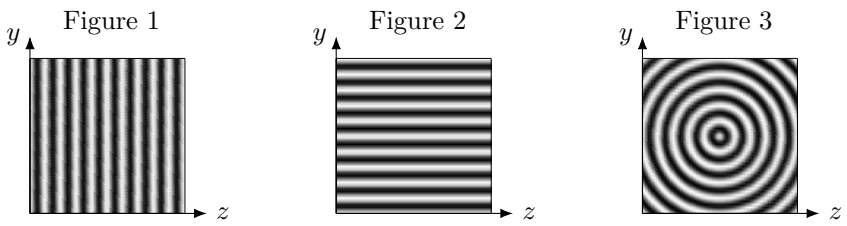
.....

e) En déduire l'écart spectral $\Delta\lambda$ du doublet.

.....

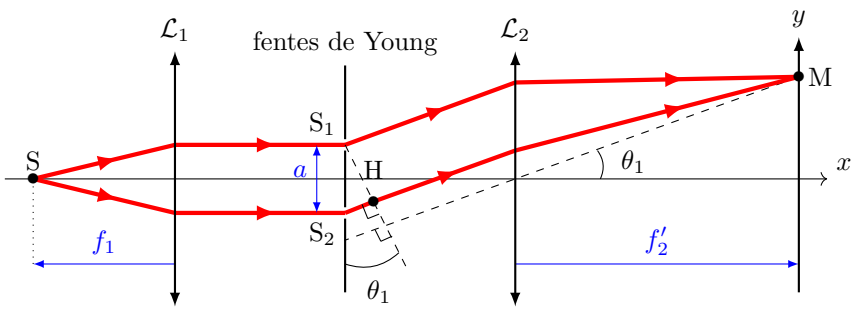
Interférométrie

Dans cette section nous exploiterons les trois figures d'interférences suivantes.



Entraînement 10.9 — Fentes « deux » Young.

On éclaire des fentes de Young en faisceau parallèle conformément au schéma ci-dessou. La différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est : $\delta_{SM} = \mathcal{L}_{SM,2} - \mathcal{L}_{SM,1} = \mathcal{L}_{S_2H}$.



On donne le développement limité suivant : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ quand $x \to 0$.

a) En étudiant le triangle S_1S_2H, exprimer la longueur S_2H en fonction de θ_1 et a.

.....

b) En étudiant un autre triangle, exprimer l'angle θ_1 en fonction de y et f_2'.

.....

c) Exprimer δ_{SM} en fonction de a, y et f_2' lorsque $\theta_1 \ll 1\,\text{rad}$ .....

d) Exprimer l'interfrange i de la figure d'interférence au niveau de l'écran, sachant que l'éclairement y est tel que $I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta_{SM}\right)\right] = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\dfrac{y}{i}\right)\right]$.

.....

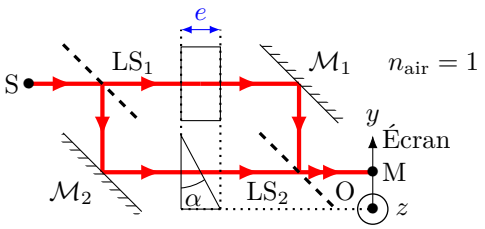
e) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3

.....

Entraînement 10.10 — Interféromètre de Mach-Zehnder.

On a positionné une lame d'épaisseur e et une lame prismatique d'épaisseur $e' = e - \alpha y$, toutes deux d'indice n, au niveau des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder (on ne tiendra pas compte de la réfraction en sortie de la lame prismatique).



Les lames séparatrices LS atténuent l'éclairement I_0 des rayons d'un facteur 2. On rappelle que l'amplitude S_0 d'un rayon est liée à son éclairement de telle manière que $I_0 \propto S_0^2$. La différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est :

$$\delta_{SM} = \mathcal{L}_{SM,1} - \mathcal{L}_{SM,2} = \mathcal{L}_{LS_1\mathcal{M}_1} - \mathcal{L}_{\mathcal{M}_2LS_2}.$$

a) De combien est atténuée l'amplitude d'un seul rayon après la deuxième séparatrice ?

(a) 1/2 (b) 1/4 (c) 1/8

b) Exprimer la différence de marche δ_{SM} entre les deux bras en fonction de n, α et y ..

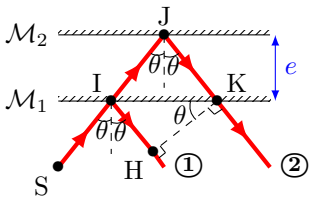
c) Exprimer l'interfrance i de la figure d'interférence au niveau de l'écran, sachant que l'éclairement y est tel que $I = I'[1 + \cos(\Delta\varphi)] = I'\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{y}{i}\right)\right]$ .....

d) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3

Entraînement 10.11 — Interféromètre de Michelson en lame d'air.

Un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air repose sur l'association de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dont le schéma optique équivalent est présenté ci-contre. Les rayons se propagent dans l'air, assimilé à un milieu d'indice optique n.



Dans ce cas, la différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est : $\delta_{SM} = \mathcal{L}_{SM,2} - \mathcal{L}_{SM,1} = \mathcal{L}_{IJ} + \mathcal{L}_{JK} - \mathcal{L}_{IH}$.

a) Exprimer les longueurs IJ et JK en fonction de θ et e .....

b) Exprimer la longueur IK en fonction de θ et e .....

c) Exprimer la longueur IH en fonction de θ et IK .....

On rappelle l'identité trigonométrique : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

d) Exprimer alors la longueur IH en fonction de $\cos(\theta)$ et e .....

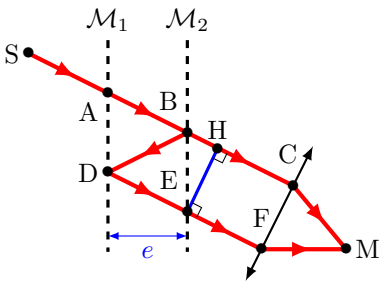
e) En déduire l'expression de la différence de marche δ_{SM} en fonction de $\cos(\theta)$, n et e .

f) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3

Entraînement 10.12 — Interféromètre de Fabry-Perot.

Un interféromètre de Fabry-Perot est constitué de deux miroirs séparés d'une distance e par un milieu d'indice n. On s'intéresse aux deux rayons ci-dessous. En sortie de l'interféromètre, une lentille permet de les focaliser afin qu'ils interfèrent en un point M d'un écran. Au niveau de chaque miroir, l'amplitude d'un rayon est multipliée par un coefficient r qu'on approxime à $1/\sqrt{2}$ ou un coefficient $t = 1 + r$ selon qu'il soit réfléchi ou transmis. On considérera que l'air et le milieu entre les miroirs sont d'indice $n = 1$, et on notera i l'angle de réflexion tels que $\widehat{\text{ABD}} = 2i$ et $\widehat{\text{BEH}} = i$.



On rappelle que l'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude.

a) Quel est le rapport des éclairements entre le rayons du bas et celui du haut ?

(a) 1/2 (b) 1/4 (c) 1/8

b) Exprimer la longueur BH en fonction de e et i .....

c) Exprimer la longueur BD en fonction de e et i .....

d) Exprimer la différence de marche $\delta_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{SABDFM}} - \mathcal{L}_{\text{SABHCM}}$ .....

e) Quelles formes auront les franges d'interférences sachant que $I(\text{M}) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{\delta_{\text{SM}}}{2\pi}\right)\right]$?

(a) bandes rectilignes (b) carrés évidés (c) anneaux

Autres entraînements

Entraînement 10.13 — Grandeurs caractéristiques d'un signal.

La valeur d'un signal lumineux sinusoïdal en un point x (en m) à un instant t (en s) est donnée par :

$$s(x,t) = S_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right) = S_0 \cos(2\pi(\nu t \pm \sigma x) + \varphi) = S_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

avec S_0 son amplitude, T sa période, λ sa longueur d'onde, ν sa fréquence, σ son nombre d'onde, ω sa pulsation temporelle, k sa pulsation spatiale et c sa célérité.

Calculer la valeur des différentes grandeurs caractéristiques des signaux suivants

$$s_1 = S_0 \cos(60t - 28x) \quad ; \quad s_2 = S_0 \cos\left(\frac{t}{21} - \frac{t}{32} - \frac{x}{7} + \frac{x}{12}\right) \quad ; \quad s_3 = S_0 \cos\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{t}{23} - \frac{2\pi\nu_3}{5c}x + \frac{\pi}{2}\right).$$

a) T_1 (s) ..... c) ν_2 (s^{-1}) ..... e) ω_3 ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) .

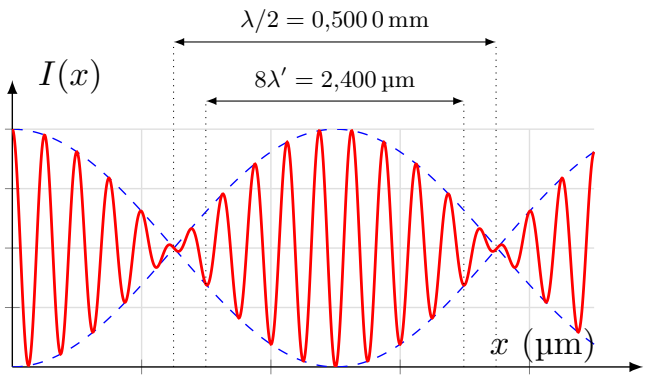
b) λ_1 (m) ..... d) σ_2 (m^{-1}) ..... f) k_3 ($\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$)

Entraînement 10.14 — Brouillage.

On éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air avec une source ponctuelle émettant deux signaux lumineux de fréquences ν_1 et ν_2, et de longueurs d'onde λ_1 et λ_2. En sortie de l'interféromètre l'éclairement au niveau de l'axe optique est tel que

$$I(x) = I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)\right]$$

avec x l'écart d'un des deux miroirs de l'interféromètre par rapport à l'autre, comme illustré par l'interférogramme ci-dessous (pour lequel l'échelle est non respectée).



a) Exprimer la période spatiale λ de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)$.

.....

b) À l'aide de l'interférogramme donner la valeur de $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$.

.....

c) Exprimer la période spatiale λ' de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)$.

.....

d) À l'aide de l'interférogramme donner la valeur de $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$.

.....

e) Déterminer la valeur de λ_1 en sommant de $2\nu_0$ et $\Delta\nu$.

.....

f) Déterminer la valeur de λ_2 soustrayant $\Delta\nu$ à $2\nu_0$.

.....

Entraînement 10.15 — La bonne formule.

On considère les figures d'interférence suivantes, pour lesquelles le repère cartésien associé est donné.

Figure n°1

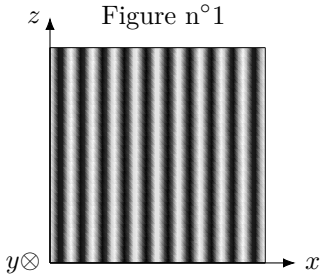


Figure n°2

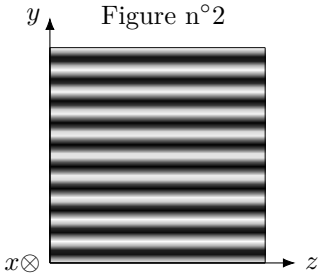
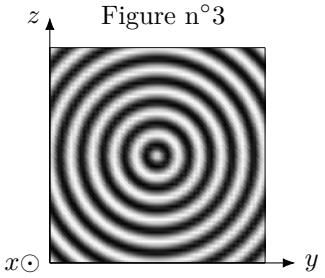


Figure n°3



a) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n°1 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ay}{\lambda D}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi az}{\lambda D}\right)$

.....

b) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n°2 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ay}{\lambda D}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi az}{\lambda D}\right)$

.....

c) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n°3 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{y_\mathrm{O}}{\sqrt{x^2+y^2+z_\mathrm{O}^2}}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{z_\mathrm{O}}{\sqrt{x^2+y^2+z_\mathrm{O}^2}}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{x_\mathrm{O}}{\sqrt{x_\mathrm{O}^2+y^2+z^2}}\right)$

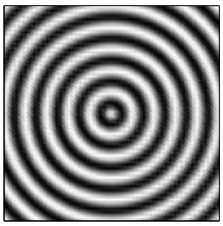
(d) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{y+z}{\sqrt{x_\mathrm{O}^2+y_\mathrm{O}^2+z_\mathrm{O}^2}}\right)$

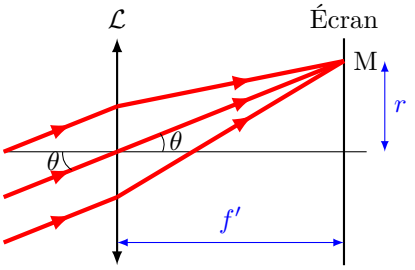
.....

Entraînement 10.16 — Anneaux du Michelson en lame d'air.

Les franges d'interférences d'un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air sont des anneaux sombres et brillants (voir figure ci-dessous).

On peut schématiser les rayons lumineux en sortie de l'interféromètre avec le schéma optique ci-dessous où r est le rayon d'un anneau brilant, où θ est l'angle d'incidence des rayons lumineux et où f' est la distance focale de la lentille.





a) Exprimer le rayon d'un anneau r en fonction de θ et de f' .....

b) On rappelle que l'ordre d'interférences pour le Michelson en configuration lame d'air est : $p = \dfrac{2ne\cos(\theta)}{\lambda}$ avec $n = 1{,}00$ l'indice optique de l'air ; $e = 500\,\mu\text{m}$ et $\lambda = 643\,\text{nm}$.

Calculer l'ordre d'interférence p_0 dans le cas où l'angle d'incidence est nulle .....

c) Si on fait varier θ entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(\theta)$:

(a) augmente (b) diminue (c) reste constant

.....

d) On rappelle que l'ordre d'interférences d'une frange brillante est un nombre entier.

Quel est l'ordre d'interférences p_1 du premier anneau brillant visible sur l'écran (sachant que $\theta = 0$ correspond au centre de l'écran) ?

(a) 1 555 (b) 1 555,5 (c) 1 556

.....

e) En déduire le rayon r_1 du premier anneau brillant en mm sachant que $f' = 50{,}0\,\text{cm}$.

.....

f) Quel est l'ordre d'interférences p_2 du deuxième anneau brillant visible sur l'écran ?

(a) 1 554 (b) 1 555 (c) 1 556 (d) 1 557

.....

g) En déduire le rayon r_2 du deuxième anneau brillant en mm .....

h) Calculer le rayon r_{10} du dixième anneau brillant en cm .....

Réponses mélangées

(a) (b) $\frac{2\pi}{\omega_2}$ 1 555,2 $a\sin(\theta_1)$ 0,14 µm 1,9 rad · s^{-1} $\frac{c}{\nu_1-\nu_2}$

$\frac{S_2^2}{2}$ $(n-1)\alpha y$ A^2 (b) $\frac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}$ $2{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ $\frac{A^2}{8}\left(\frac{5}{4}+\cos(\varphi_0)\right)$

(b) (b) (c) $k(x'-x)$ $\frac{\pi}{\omega_2}$ $\sin(a)\cos(a)=\frac{\sin(2a)}{2}$ $\cos(\omega t-kx)$

0,57 cm $2{,}2\times10^{-1}$ m $2e\tan(\theta)$ $\frac{2\pi}{\omega_1}$ 600,2 nm $\frac{c}{\nu_1+\nu_2}$ (c) 6,4 cm

$\frac{f_2'\lambda}{na}$ 1,3 cm (a) $6{,}00\times10^{12}$ Hz $\frac{e}{\cos(\theta)}$ (c) (b) 19,7 mm

$\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$ (b) $9{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$ IK $\sin(\theta)$ 5,47 cm $\frac{S_1^2}{2}$

$\frac{A^2+B^2}{2}$ $\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$ $1{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ $\frac{\pi}{\omega_1}$

599,8 nm $f'\tan(\theta)$ (a) $2ne\cos(\theta)$ 48 µm (c) $6{,}00\times10^{11}$ Hz

$1+\cos(\pm\varphi_1\mp\varphi_2)$ $-\sin(\omega t-kx)$ $\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ 0 (a)

$\frac{nay}{f_2'}$ 0 $2e\frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ $\arctan\left(\frac{y}{f_2'}\right)$ $1{,}0\times10^{-1}$ s $\frac{e}{\cos(i)}$ (a)

$\omega(t-t')$ (a) $2ne\cos(i)$ $\frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}$ 8,22 mm (c) (c) 0,76 µm

▶ Réponses et corrigés page 349

Interférences à N ondes

Prérequis
Nombres complexes et formules trigonométriques.

Avant toute chose

Entraînement 11.1 — Complexes et conjugués.

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

a) Quelle est l'expression de $\underline{Z}_1^*$, le conjugué de $\underline{Z}_1$?

(a) $\underline{Z}_1^* = -1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (b) $\underline{Z}_1^* = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (c) $\underline{Z}_1^* = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (d) $\underline{Z}_1^* = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$

.....

b) En déduire $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos(\theta)$ .....

Reprenons l'étude avec le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

c) Quelle est l'expression de $\underline{Z}_2^*$, le conjugué de $\underline{Z}_2$?

(a) $\underline{Z}_2^* = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (b) $\underline{Z}_2^* = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (c) $\underline{Z}_2^* = -1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (d) $\underline{Z}_2^* = 1 + \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta}$

.....

d) En déduire $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos(\theta)$ .....

Entraînement 11.2 — Des expressions complexes aux fonctions sinusoïdales (I).

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

a) Écrire $\underline{Z}_1$ sous la forme suivante :

$$\underline{Z}_1 = \underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Donner l'expression de $\underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

b) En déduire $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ....

Entraînement 11.3 — Des expressions complexes aux fonctions sinusoïdales (II).

Reprenons l'étude avec le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

a) Écrire $\underline{Z}_2$ sous la forme suivante :

$$\underline{Z}_2 = \underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Donner l'expression de $\underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

b) En déduire $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ....

Entraînement 11.4

Soit $R \in \mathbb{R}$. On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{s} = \frac{1}{1 - R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}.$$

On admet que $\underline{ss}^*$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{ss}^* = \frac{a}{1 + m\sin^2(\varphi/2)}.$$

a) Donner l'expression de a en fonction de R .....

b) Donner l'expression de m en fonction de R .....

Entraînement 11.5 — Résolution d'une équation trigonométrique (I).

Soit $\theta \in [-90°, 0°[$.
Nous cherchons l'ensemble des angles θ' avec $\theta' \in [-90°, 90°]$ vérifiant l'équation suivante :

$$\cos(\theta') = \cos(\theta).$$

L'ensemble des solutions s'écrit : $\theta' = \{a, b, c, d, ...\}$.

a) De combien d'éléments est composé l'ensemble des solutions ? .....

b) Donner le plus petit élément de l'ensemble des solutions .....

c) Donner le plus grand élément de l'ensemble des solutions .....

Entraînement 11.6 — Résolution d'une équation trigonométrique (II).

Soit $\theta \in [-90°, 0°]$.
Nous cherchons l'ensemble des angles θ' avec $\theta' \in [-90°, 90°]$ vérifiant l'équation suivante :

$$\sin(\theta') = \sin(\theta)$$

L'ensemble des solutions s'écrit : $\theta' = \{a, b, c, d, ...\}$.

De combien d'éléments est composé l'ensemble des solutions ? .....

Pour continuer...

Entraînement 11.7 — Suite géométrique.

On rappelle que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique u_k de raison $q \neq 1$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$; on suppose que φ n'est pas un multiple de 2π.
Nous souhaitons écrire les sommes $\underline{s}(\varphi)$ sous la forme suivante :

$$\underline{s}(\varphi) = \underline{f}(\varphi) \frac{\sin\left(a\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Déterminer a et $\underline{f}(\varphi)$ pour $\underline{s}(\varphi) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi}$.

a) a .....

b) $\underline{f}(\varphi)$ .....

Déterminer a et $\underline{f}(\varphi)$ pour $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{4\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi}$.

c) a .....

d) $\underline{f}(\varphi)$ .....

Autour du réseau à N fentes

Entraînement 11.8 — Pas du réseau.

Nous disposons d'un réseau présentant 600 traits par millimètre (600 traits/mm).
Le pas du réseau a est la distance entre deux fentes successives (distance centre à centre).

Déterminer a en µm .....

Entraînement 11.9 — Calcul de linéature en lpi.

La linéature d'un réseau est affichée en unités anglosaxonnes en lpi (line per inch). On rappelle qu'un pied (foot) correspond à un tiers de verge anglaise (yard), et qu'il est divisé en douze pouces (inches). Un yard vaut 91,44 cm.

a) Donner la valeur du pouce (1 inch) en mm.

(a) 7,62 mm (b) 25,4 mm (c) 39,3 mm (d) 43,7 mm

.....

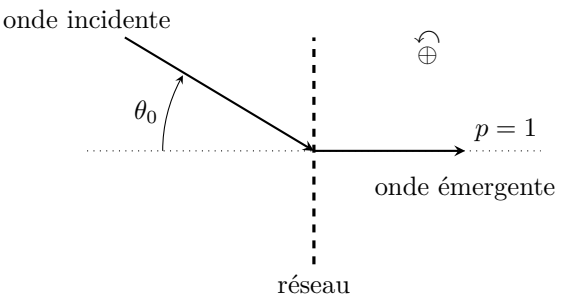
b) Calculer en traits par millimètre (résultat arrondi à la centaine la plus proche), la linéature d'un réseau comportant $n = 30\,000$ lpi .....

Entraînement 11.10 — À propos de la relation fondamentale des réseaux.

Un réseau de fentes de linéature $n = 600$ traits/mm est éclairé par une onde plane issue d'une source monochromatique de longueur d'onde dans l'air $\lambda = 546{,}1$ nm et on observe l'ordre 1 de diffraction par ce réseau en émergence normale.

On rappelle la relation fondamentale des réseaux par transmission entre l'angle d'incidence θ_0 et l'angle de diffraction θ par le réseau dans l'ordre p :

$$\sin(\theta) - \sin(\theta_0) = pn\lambda.$$



Que vaut l'angle d'incidence θ_0 (en degrés) de l'onde éclairant ce réseau ?

.....

Entraînement 11.11 — Brouillage des ordres.

Un réseau de fentes de linéature $n = 600$ traits par mm est éclairé sous incidence normale par une lampe à vapeur de mercure émettant les raies de longueur d'onde dans l'air :

λ (en nm)	404,7	407,8	435,8	491,6	546,1	577,0	579,1	623,4	690,7

On rappelle la condition d'interférences constructives entre les ondes planes diffractées dans l'ordre p par un réseau suivant la direction θ (angle mesuré par rapport à la normale au plan du réseau), éclairé par une onde plane incidente de longueur d'onde λ sous incidence normale : $\sin(\theta) = pn\lambda$

a) En exploitant le tableau, donner en degré l'intervalle $[\theta^{\min}, \theta^{\max}]$ des angles du spectre d'ordre 1 de la lampe à vapeur de mercure diffracté par ce réseau .....

b) Même question pour le spectre d'ordre 2 .....

c) Même question pour le spectre d'ordre 3 .....

d) On parle de chevauchement d'ordre quand au moins une raie d'un ordre donné s'intercale dans le spectre d'un ordre inférieur. Choisir la bonne réponse parmi les quatre propositions ci-dessous :

(a) Tout le spectre d'ordre $p = 3$ est mélangé à celui d'ordre $p = 2$.

(b) Seules les trois dernières raies du mercure dans l'ordre $p = 3$ ne chevauchent pas les raies du spectre d'ordre $p = 2$.

(c) Seules les trois premières raies du mercure dans l'ordre $p = 3$ chevauchent les raies du spectre d'ordre $p = 2$.

.....

Entraînement 11.12 — Cas où $N = 2$.

On rappelle que l'expression de l'intensité diffractée par un réseau composé de N fentes vaut :

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

où φ est le déphasage entre deux rayons traversant deux fentes consécutives.
Dans cette application, nous allons prendre $N = 2$.

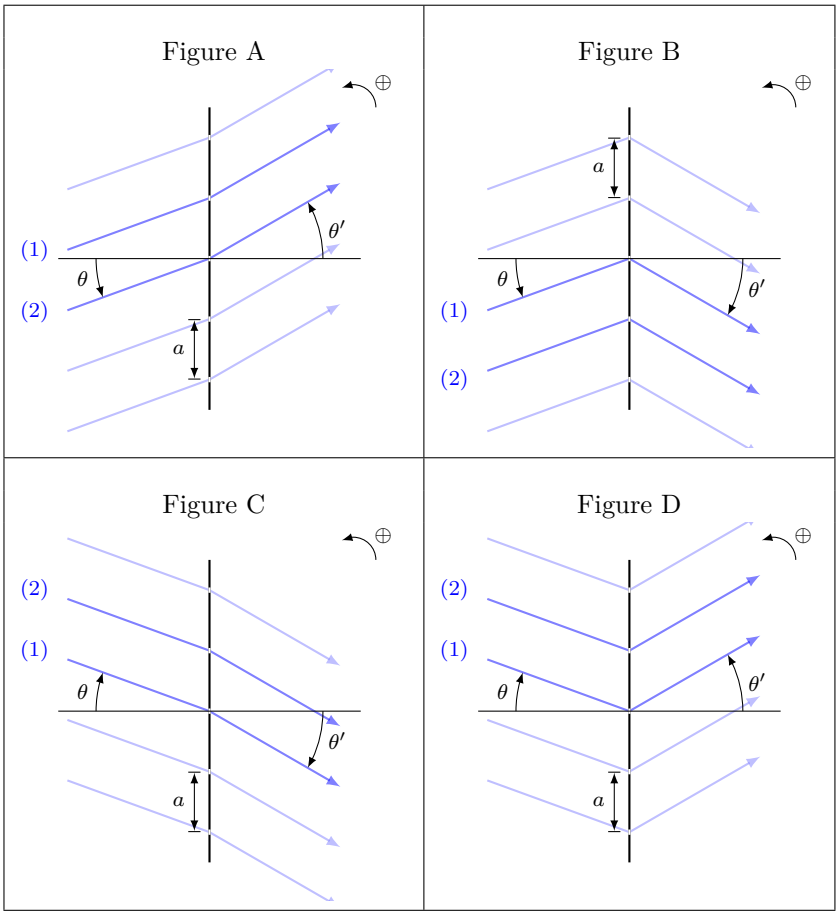
a) Écrire le numérateur en fonction de $\cos(\varphi)$ .....

b) Écrire le dénominateur en fonction de $\cos(\varphi)$ .....

c) Exprimer I en fonction de I_0 et $\cos(\varphi)$ .....

Entraînement 11.13 — Différences de marche.

On dispose d'une réseau plan constitué de n traits transparents par millimètre. Il est positionné sur un goniomètre préalablement réglé à l'infini. Ainsi, il est éclairé par une onde plane et on observe les interférences ayant lieu à l'infini. Le dispositif est plongé dans le vide (indice 1).
Nous souhaitons déterminer la différence de marche δ du rayon (2) par rapport au rayon (1) dans les différents cas représentés :



Quatre différences de marche sont proposées :

(a) $\delta = a\Big(\sin(\theta) + \sin(\theta')\Big)$

(b) $\delta = a\Big(\sin(\theta) - \sin(\theta')\Big)$

(c) $\delta = a\Big(\sin(\theta') + \sin(\theta)\Big)$

(d) $\delta = a\Big(\sin(\theta') - \sin(\theta)\Big)$

a) Dans le cas A, quelle est l'expression correcte de δ_A ? .....

b) Dans le cas B, quelle est l'expression correcte de δ_B ? .....

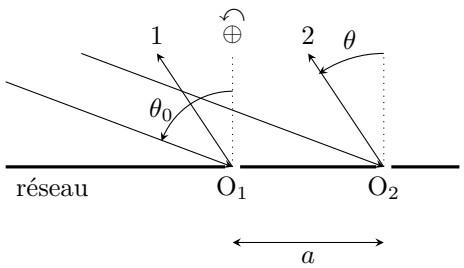
c) Dans le cas C, quelle est l'expression correcte de δ_C ? .....

d) Dans le cas D, quelle est l'expression correcte de δ_D ? .....

Entraînement 11.14 — Différence de marche pour un réseau par réflexion.

On considère un réseau par réflexion sur les points O_1, et O_2, de pas $a = O_1O_2$, éclairé par une onde plane sous l'angle d'incidence θ_0 et on s'intéresse à l'onde plane diffractée sous l'angle d'émergence θ.

On prendra l'indice de réfraction de l'air égal à l'unité.



La différence de marche $\delta_{2/1}$ du rayon 2 par rapport au rayon 1 vaut :

(a) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)\Big)$

(b) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)\Big)$

(c) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta_0) + \sin(\theta)\Big)$

(d) $\delta_{2/1} = a\Big(\tan(\theta_0) + \tan(\theta)\Big)$

.....

Entraînement 11.15 — Périodicité de la fonction réseau.

On appelle fonction réseau notée $\mathcal{R}_N$ la fonction de la variable ϕ :

$$\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\frac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\right)^2 .$$

a) Donner la période pour la variable x de la fonction $\sin^2(x)$ .....

b) En déduire la période, pour la variable ϕ, de la fonction $\sin^2\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$ .....

c) Quelle est la période, pour la variable ϕ, de la fonction $\sin^2\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)$? .....

d) En déduire la période de la fonction réseau pour la variable ϕ.

(a) 2π

(b) 4π

(c) $\dfrac{2\pi}{N}$

(d) $2\pi N$

.....

Entraînement 11.16 — Propriétés de la fonction réseau.

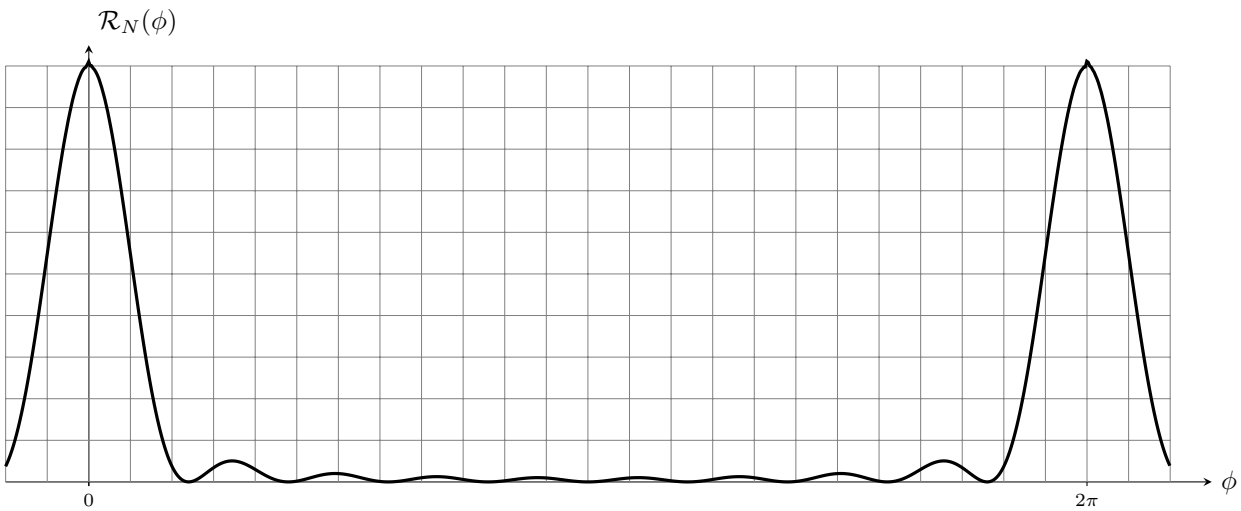
Soit la fonction réseau notée $\mathcal{R}_N$ de la variable ϕ définie par $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)} \right)^2$.

a) Évaluer $\mathcal{R}_N(0)$. On rappelle que $\sin(x) \sim x$ quand $x \to 0$ .....

b) Exprimer en fonction de N le nombre de zéros de la fonction réseau pour $\phi \in [0, 2\pi]$.

.....

c) On considère le graphe de la fonction réseau sur la figure ci-dessous :

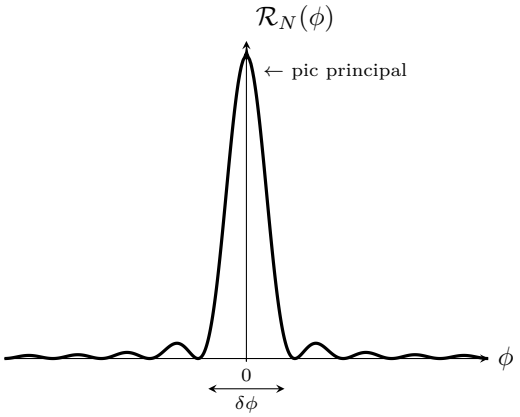


Déduire du graphe la valeur de N utilisée pour le tracé .....

Entraînement 11.17 — Largeur d'un pic principal.

On rappelle l'expression de la fonction réseau : $\mathcal{R}_N$ de la variable ϕ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)} \right)^2$.

Cette fonction admet des pics appelés pics principaux pour toute valeur de ϕ multiple entier de 2π. La figure suivante montre l'évolution de $\mathcal{R}_N$ autour de $\phi = 0$.



a) Le premier zéro de la fonction réseau, juste après le pic principal situé en $\phi = 0$ est obtenu pour l'angle :

(a) $\phi = \dfrac{\pi}{2N}$ (b) $\phi = \dfrac{\pi}{N}$ (c) $\phi = \dfrac{2\pi}{N}$ (d) $\phi = \dfrac{4\pi}{N}$

.....

b) En déduire en fonction de N la largeur $\delta\phi$ d'un pic principal défini comme la variation de ϕ entre les deux annulations de $\mathcal{R}_N(\phi)$ de part et d'autre du pic principal .....

Entraînement 11.18 — Mesure de longueur d'onde au goniomètre.

Un réseau de pas $a_0 = 1{,}67\,\mu m$ placé sur un goniomètre, est éclairé par une onde plane en incidence normale issue d'une lampe à vapeur de thallium. Le spectre ne comporte qu'une seule raie de couleur verte dont on souhaite mesurer la longueur d'onde λ.
On relève θ' dans les différents ordres d'interférences observés vérifiant la formule du réseau :

$$p\lambda = a_0 \sin(\theta').$$

Ordre p	-3	-2	-1	0	1	2	3
θ' en (rad)	$-1{,}30$	$-0{,}70$	$-0{,}33$	0	0,32	0,70	1,27

Afin de déterminer la longueur d'onde λ, nous allons tracer $a_0 \sin(\theta')$ en fonction de p et réaliser une régression linéaire.
L'équation proposée pour la régression linéaire que vous ferez à l'aide de votre calculatrice se met sous la forme :

$$y = ax + b.$$

a) Identifier les grandeurs x et y .....

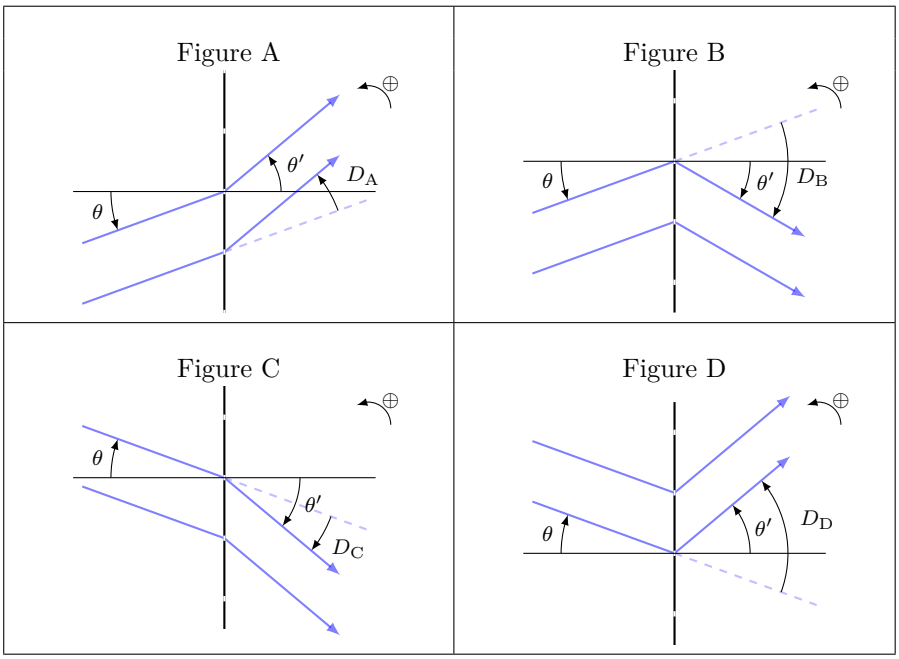
b) Après avoir effectué une régression linéaire à l'aide d'un tableur (à la calculatrice ou à l'ordinateur), déterminer la valeur de a en µm .....

c) En déduire la longueur d'onde λ en nm .....

Déviation angulaire induite par un réseau

Entraînement 11.19 — Définition de la déviation.

Un réseau plan est éclairé par une onde plane et des interférences sont observées à l'infini. L'angle de déviation D que le réseau fait subir au faisceau incident est défini sur chacun des schémas ci-dessous.



Trois expressions de D sont proposées :

(a) $D = \theta + \theta'$ (b) $D = \theta - \theta'$ (c) $D = \theta' - \theta$

a) À quelle expression de D correspond la déviation D_A pour la figure A ? .....

b) À quelle expression de D correspond la déviation D_B pour la figure B ? .....

c) À quelle expression de D correspond la déviation D_C pour la figure C ? .....

d) À quelle expression de D correspond la déviation D_D pour la figure D ? .....

Autres entraînements

Entraînement 11.20 — Suite géométrique.

On rappelle que La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique u_k de raison $q \neq 1$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Considérons la somme $\underline{s}(\theta)$ suivante :

$$\underline{s}(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{6\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{8\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{10\pi}{\lambda} a \sin(\theta)}.$$

Nous souhaitons écrire $\underline{s}(\theta)$ sous la forme suivante :

$$\underline{s}(\theta) = \underline{g}(\theta) \frac{\sin(\alpha \sin\theta)}{\sin(\beta \sin\theta)}.$$

a) Déterminer α en fonction de a et λ .....

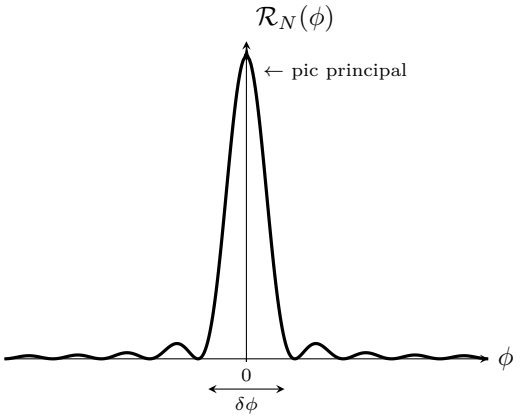
b) Déterminer β en fonction de a et λ .....

c) Déterminer $\underline{g}(\theta)$ .....

Entraînement 11.21 — Largeur à mi-hauteur d'un pic principal.

On rappelle l'expression de la fonction réseau $\mathcal{R}_N$ de la variable ϕ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)} \right)^2$.

Cette fonction admet des pics appelés pics principaux pour toute valeur de ϕ multiple entier de 2π. Sur le graphique suivant, nous avons fait le choix de montrer l'évolution de $\mathcal{R}_N$ autour de $\phi = 0$.



On écrit la largeur à mi-hauteur $\Delta\phi_{1/2}$ d'un pic principal sous la forme $\Delta\phi_{1/2} = \alpha \dfrac{\pi}{N}$. En considérant que $N \gg 1$, calculer la valeur de α avec deux chiffres significatifs.

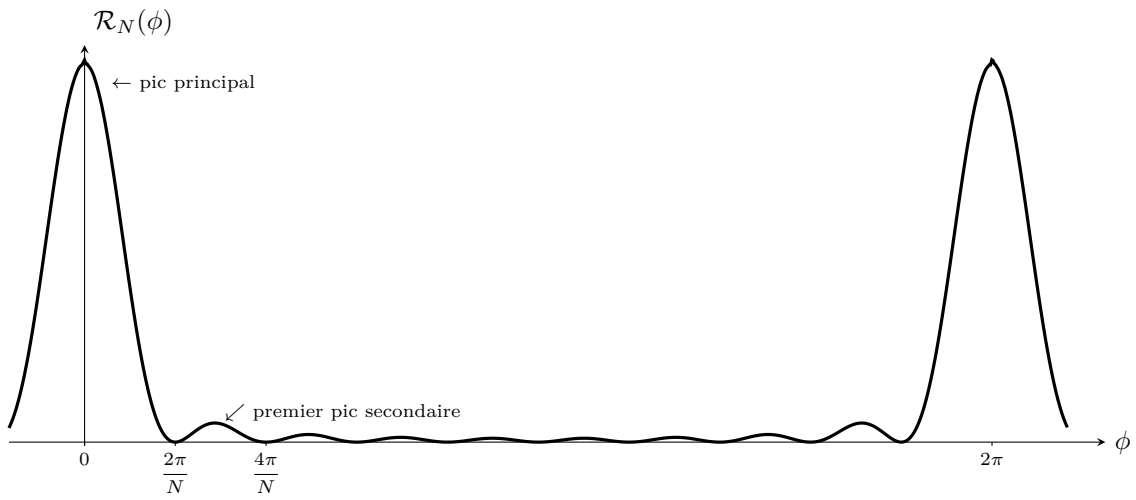
On rappelle le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)$ au voisinage de 0 : $\sin(x) \sim x - \dfrac{x^3}{6}$

.....

Entraînement 11.22 — Hauteur du premier pic secondaire.

On considère la fonction réseau $\mathcal{R}_N$ de la variable ϕ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)} \right)^2$.

On donne le tracé de cette fonction sur la figure ci-dessous :



a) Estimer à partir du graphe la valeur de ϕ correspondant au premier maximum secondaire de la fonction réseau .....

b) Estimer la valeur de la fonction réseau au premier maximum secondaire ...

Réponses mélangées

$2\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$ (d) $2(1+\cos\theta)$ (c) 0,05 (c) 1,67 µm π (b)

(b) (c) $N-1$ $\dfrac{4\pi}{N}$ $a=3$ 1 (c) $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin\theta}$ $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

θ (c) $4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ 1,69 $\dfrac{1}{2}(1-\cos(\varphi))$ (d) (b) $x=p$ et $y=a_0\sin(\theta')$

(b) 10 $\dfrac{6\pi}{\lambda}a$ 534 nm $-\theta$ 1 2 $a=5$ 0,534 µm $-19{,}1°$

$1-\cos^2(\varphi)$ $\dfrac{1}{(1-R)^2}$ (a) $\dfrac{\pi}{\lambda}a$ $2(1-\cos\theta)$ $\dfrac{3\pi}{N}$ $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\varphi}$

2π $4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ 1 200 traits/mm $[29{,}1°, 56{,}0°]$ (c) $2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$ (c)

$\dfrac{4R}{(1-R)^2}$ (c) $[46{,}8°; 79{,}4°]$ $[14{,}1°; 24{,}5°]$ $2I_0(1+\cos(\varphi))$ $\dfrac{2\pi}{N}$

► Réponses et corrigés page 358

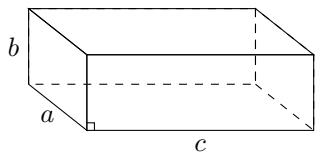
Outils mathématiques pour la diffusion

Prérequis
Expression des surfaces usuelles (disque, sphère,...)
Expression des volumes usuels (parallélépipède, cylindre, sphère,...)

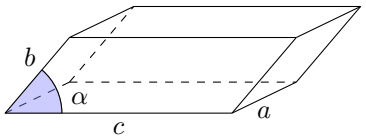
Pour bien commencer

Entraînement 12.1 — Calculs de volumes.

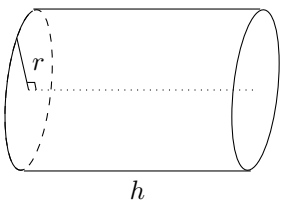
Dans chacun des cas suivants, exprimer le volume du solide en fonction des données.



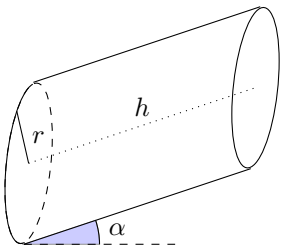
Volume a)



Volume b)



Volume c)

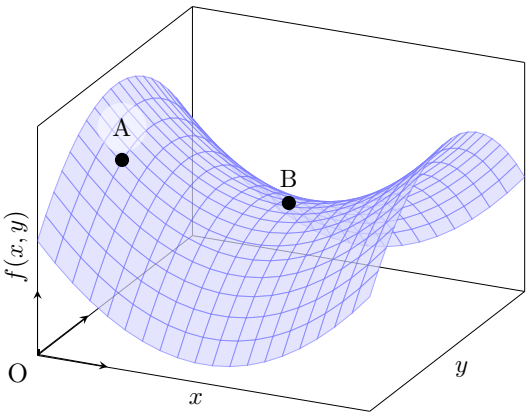


Volume d)

a) b) c) d)

Entraînement 12.2 — Signe des dérivées partielles.

On considère la fonction de deux variables $f(x, y)$ représentée ci-contre. On étudie le signe des dérivées partielles au niveau des points A et B.



a) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à x au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})$? .....

b) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à y au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})$? .....

On s'intéresse maintenant au comportement de f au voisinage du point B. Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

c)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) < 0$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) = 0$ .....

e)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) < 0$ (b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) = 0$ .....

d)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) < 0$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) = 0$ .....

f)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) < 0$ (b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) = 0$ .....

Entraînement 12.3 — Volume d'un cône.

Le volume d'un cône de hauteur h et dont le rayon de la base est r vaut $V(r, h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

a) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial r}(r, h)$? .....

b) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r, h)$? .....

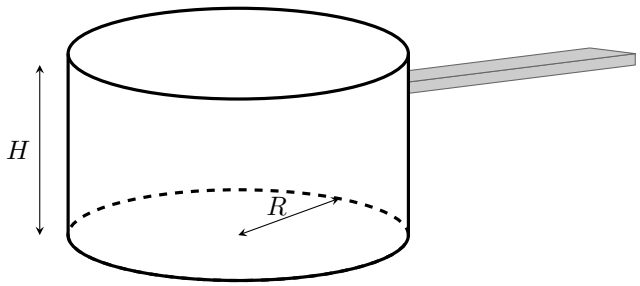
On souhaite comparer l'influence d'une même variation $\mathrm{d}\ell$ de h ou de r sur la valeur du volume V.

c) À quelle condition sur h et r a-t-on $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r, h) > \dfrac{\partial V}{\partial r}(r, h)$?

(a) $h/3 < r$ (b) $h < r$ (c) $2h < r$ (d) $3h < r$ .....

Entraînement 12.4 — Fabrication d'une casserole.

Les questions de cet entraînement ne concernent pas le manche de la casserole et ne concernent donc que la partie principale de la casserole. L'épaisseur de la tôle utilisée pourra être négligée.



Un industriel souhaite fabriquer une casserole à partir de plaques de métal d'épaisseur constante.

a) Pour cela, quelle surface de tôle $S(R,H)$ doit-il utiliser ?

(a) $S(R,H) = 2\pi R^2 + \pi RH$
(b) $S(R,H) = \pi H^2 + 2\pi RH$
(c) $S(R,H) = \pi R^2 + 2\pi RH$
(d) $S(R,H) = 2\pi H^2 + \pi RH$

.....

b) Que vaut le volume utile $V(R,H)$?

(a) $V(R,H) = 2\pi R^2 H$
(b) $V(R,H) = \pi R^2 H$

.....

c) Exprimer $S(R,V)$ la surface de tôle que l'on doit utiliser pour fabriquer la casserole en fonction du rayon R et du volume V.

.....

Le fabricant souhaite fabriquer une casserole de volume $V = V_0$ donné, tout en minimisant la quantité de tôle utilisée.

d) Il cherche donc une géométrie qui vérifie :

(a) $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R,V_0) = 0$
(b) $\dfrac{\partial S}{\partial R}(R,V_0) = 0$

.....

e) Déterminer l'expression de V_0 en fonction de R, puis celle de H en fonction de R permettant de minimiser la surface de tôle utilisée.

(a) $V_0 = \pi R^3$ (b) $V_0 = 2\pi R^3$ (c) $H = R$ (d) $H = 2R$

.....

Entraînement 12.5 — Quelques équations différentielles (I).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions aux limites.

Les quantités n_0, n_1, j_0 et p sont des constantes.

a) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ \dfrac{\partial n}{\partial x}(0,t) & = j_0 \end{cases}$ .....

b) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ n(L,t) & = n_1 \end{cases}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = p$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ n(L,t) & = n_0 \end{cases}$ .....

Entraînement 12.6 — Quelques équations différentielles (II).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions initiales (τ, n_0, n_c, p et L sont des constantes) :

a) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \dfrac{n}{\tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

b) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n^2}{n_c \tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

c) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n}{\tau} + p$ avec $n(x,0) = n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)$ .....

Réponses mélangées

$\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}$ (b) positif $\dfrac{\pi r^2}{3}$ negatif $n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$

$n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L}x + n_0$ $\pi r^2 h\cos(\alpha)$ $abc\sin(\alpha)$ (c) $\pi r^2 h$

(a) et (c) (c) abc (b) $n(x,t) = j_0 x + n_0$ (b) $\dfrac{2\pi r h}{3}$ (a)

(c) $n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}$ (b) $\dfrac{p}{2}x(x-L) + n_0$ $n(x,t) = n_0\exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$

► Réponses et corrigés page 366

Diffusion particulaire

Prérequis
Équation d'état des gaz parfaits ($PV = nRT$).
Expression des surfaces usuelles (disque, sphère,...)
Expression des volumes usuels (parallélépipède, cylindre, sphère,...)

Constantes utiles
→ Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$

Dans toute cette fiche, les caractéristiques du matériau homogène et isotrope étudié seront notées :

- D : le coefficient de diffusivité $\left(\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}\right)$,
- n : le nombre de particules par unité de volume $\left(\text{nombre de particules} \cdot \mathrm{m}^{-3}\right)$.

Pour évaluer les ordres de grandeur caractéristiques du phénomène, on notera :

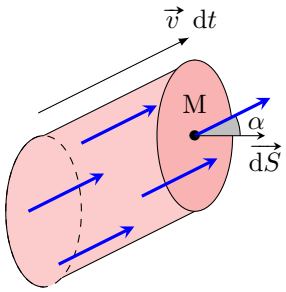
- τ : la durée caractéristique (s),
- L : la longueur caractéristique (m).

Flux de particules

Entraînement 13.1 — Flux de particules à travers une surface élémentaire.

On considère des particules de vitesse $\vec{v}$ traversant un élément de surface $\mathrm{d}\vec{S}$ faisant un angle θ avec $\vec{v}$.

Le nombre de particules par unité de volume est noté $n(\mathrm{M}, t)$. On souhaite évaluer le nombre (algébrique) de particules traversant la surface $\mathrm{d}\vec{S}$ orientée.



a) Exprimer le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$, où se situaient initialement les particules traversant la surface considérée, entre t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}\vec{S}$, $\vec{v}$ et $\mathrm{d}t$.

.....

b) En déduire le nombre d^2N de particules traversant la surface considérée entre t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de n, $\mathrm{d}\vec{S}$, $\vec{v}$ et $\mathrm{d}t$.

.....

Le flux de particules à travers une surface orientée donnée est le nombre algébrique de particules traversant cette surface par unité de temps.

c) En déduire le flux élémentaire $\mathrm{d}\Phi$ de particules à travers $\mathrm{d}\vec{S}$ .....

Le vecteur densité volumique de courant de particules $\vec{j}$ est défini par $\mathrm{d}\Phi = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

d) Déduire des questions précédentes l'expression de $\vec{j}$ .....

e) Quelle est l'unité de la norme de $\vec{j}$? .....

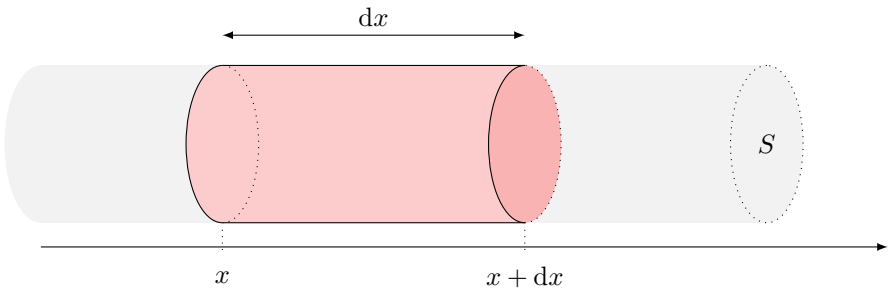
Entraînement 13.2 — Flux de particules à travers des surfaces mésoscopiques.

On note $n(\mathrm{M},t)$ le nombre de particules par unité de volume en M à l'instant t et $\vec{j}\,(\mathrm{M},t)$ le vecteur densité volumique de flux de particules en M à l'instant t.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle le long de l'axe cartésien $(\mathrm{O}x)$, pour laquelle on a $n = n(x,t)$. La loi de Fick s'écrit donc

$$\vec{j}\,(x,t) = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n) = -D\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\vec{e_x} = j(x,t)\vec{e_x}.$$

On souhaite évaluer les transferts de particules entre la tranche de section S comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$ et l'extérieur :



a) Exprimer le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche en x entre t et $t+\mathrm{d}t$.

(a) $j(x,t)S\,\mathrm{d}t$
(b) $-j(x,t)S\,\mathrm{d}t$
(c) 0

.....

b) Exprimer le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche en $x+\mathrm{d}x$ entre t et $t+\mathrm{d}t$.

(a) $j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$
(b) $-j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$
(c) 0

.....

c) Exprimer le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche au niveau de la paroi latérale entre t et $t+\mathrm{d}t$. On notera ℓ le périmètre de la section.

(a) $j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(b) $-j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(c) 0
(d) $j(x+\mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(e) $-j(x+\mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

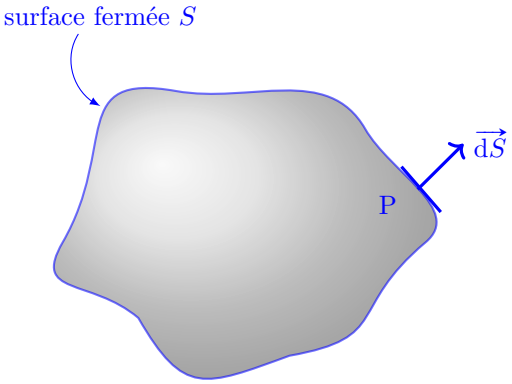
.....

d) En déduire le transfert de particules total algébriquement reçu par la tranche.

.....

Entraînement 13.3 — Flux de particules à travers une surface macroscopique.

On considère un volume V délimité par une surface fermée S orientée localement au voisinage d'un point P suivant la normale sortante. On étudie le transfert de particules entre ce volume et l'extérieur.



a) Le nombre de particules quittant le volume V entre t et $t+\mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(\mathrm{P},t)S \times \mathrm{d}t$

(b) $\oiint_S \vec{j}(\mathrm{P},t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

(c) $\oiint_S \vec{j}(\mathrm{P},t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \times \mathrm{d}t$

(d) $\vec{j}(\mathrm{P},t) \cdot \oiint_S \mathrm{d}\vec{S} \times \mathrm{d}t$

.....

b) Combien vaut la variation du nombre de particules situées dans V pendant $\mathrm{d}t$ due aux échanges avec l'extérieur ?

.....

Équation de diffusion : cas unidimensionnel

Entraînement 13.4 — Dopage d'un semi-conducteur.

Pour doper un semi-conducteur on dépose, à $t=0$ en $x=0$, N atomes de dopage. En se plaçant dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$, on peut montrer que la densité particulaire $n(x,t)$ d'atomes de dopage s'écrit à l'instant t et à l'abscisse x : $n(x,t) = \dfrac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\dfrac{ax^2}{t}\right)$.

À tout instant, le nombre total N d'atomes de dopage vérifie l'égalité :

$$N = \int_0^{+\infty} n(x,t)\,\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{erf}(+\infty) \quad \text{où, par définition, } \mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

a) Pour le changement de variable $u = x\sqrt{\dfrac{a}{t}}$, exprimer $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}u$ ....

b) En déduire l'expression de N en fonction de K, a et $\mathrm{erf}(+\infty)$ .....

c) En déduire l'expression de α en fonction de K et a .....

Entraînement 13.5 — Évolution temporelle d'une population.

Dans un milieu homogène, la densité volumique de bactéries $n(t)$ peut être modélisée par l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \dfrac{n}{T} - \dfrac{n^2}{n_c T}$ où $(n_c, T) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Initialement, on a $n(t=0) = n_0$ avec $0 < n_0 < n_c$.

Dans ces conditions, à tout instant et en tout point, on a $n(x,t) < n_c$. Par ailleurs, la séparation des variables permet d'écrire :

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{t}{T} = \int_{n_0}^{n(t)} \frac{n_c\,\mathrm{d}n}{n(n_c - n)}.$$

a) Déterminer le couple (A, B) assurant l'égalité $\dfrac{n_c}{n(n_c-n)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n_c - n}$ .....

b) En déduire l'expression de $n(t)$ .....

Entraînement 13.6 — Solutions de l'équation de diffusion ?

Dans chacun des cas suivante, on cherche à savoir à quelle condition l'expression donnée est solution de l'équation de diffusion à une dimension

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = 0.$$

Pour chaque cas ci-dessous, on injectera les propositions dans l'équation de diffusion.

a) $n(x,t) = n_0 \exp(\alpha x + \beta t)$ .....

b) $n(x,t) = n_0 \exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{x}{\delta}\right)$ .....

c) $n(x,t) = \dfrac{K}{\sqrt{t}}\exp\left(-\dfrac{ax^2}{t}\right)$ .....

La diffusion particulaire : un phénomène lent

Entraînement 13.7 — Grandeurs caractéristiques.

On montre que dans le cas d'une diffusion à une dimension suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$, l'équation de la diffusion s'écrit sous la forme $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

a) Quelle est l'expression de la longueur caractéristique L en fonction de son temps caractéristique τ ?

(a) $L = \sqrt{\dfrac{D}{\tau}}$ (b) $L = \dfrac{\sqrt{D}}{\tau}$ (c) $L = D\tau^2$ (d) $L = \sqrt{D\tau}$

.....

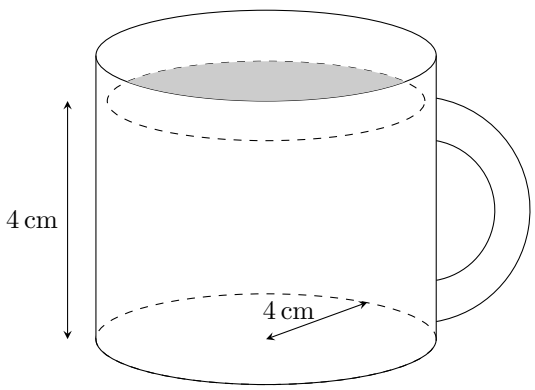
b) Réciproquement, quelle est l'expression du temps caractéristique τ du phénomène en fonction de sa longueur caractéristique L ?

(a) $\tau = \dfrac{L^2}{D}$ (b) $\tau = L^2 D$ (c) $\tau = \dfrac{L}{\sqrt{D}}$ (d) $\tau = L\sqrt{D}$

.....

Entraînement 13.8 — Un café sucré.

L'équation de diffusion caractérise l'évolution temporelle de la densité particulaire due au phénomène de diffusion. En raisonnant en ordres de grandeur, cette équation fait le lien entre un temps caractéristique τ et une longueur caractéristique de diffusion L : on a $L = \sqrt{D\tau}$.



a) Le coefficient de diffusion du sucre dans le café vaut $D = 4 \times 10^{-10}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

Déterminer le temps caractéristique de diffusion du sucre dans la tasse de café ci-contre.

.....

b) Un farceur a remplacé la sucrière par une salière. Sachant que le coefficient de diffusion du sel dans le café vaut $D_{\mathrm{sel}} = 20 \times 10^{-10}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, comparer le temps caractéristique de diffusion du sel à celui du sucre dans une tasse de café identique.

.....

Entraînement 13.9 — Quelle est la diffusion la plus rapide ?

La composition de nombreux parfums respecte une structure de « pyramide olfactive » : notes de « tête », puis notes de « cœur » et enfin notes de « fond ». Ainsi, les produits le plus volatils s'évaporent le plus vite et diffusent le plus ; ce sont les notes de « tête ». Les produits un peu moins volatils viennent après ; ce sont les notes de « cœur ». Ceux qui ont peu de volatilité viennent en dernier ; ce sont les notes de fond, qui persisteront le plus longtemps sur la peau.

Le tableau ci-dessous regroupe les caractéristiques des molécules olfactives constituant un parfum.

Composé	Coefficient de diffusion	Ressenti
Géraniol	$7{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$	Odeur florale (rose), fruitée
Limonène	$2{,}1 \times 10^{2}\,\mathrm{cm^2 \cdot h^{-1}}$	Odeur douce, citronnée
Vanilline	$4{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2 \cdot h^{-1}}$	Odeur de gousses de vanille

Parmi les composés du tableau, lequel correspond

a) à la tête ..

b) au cœur ...

c) au fond ...

Entraînement 13.10 — Quelle diffusion va le plus loin ?

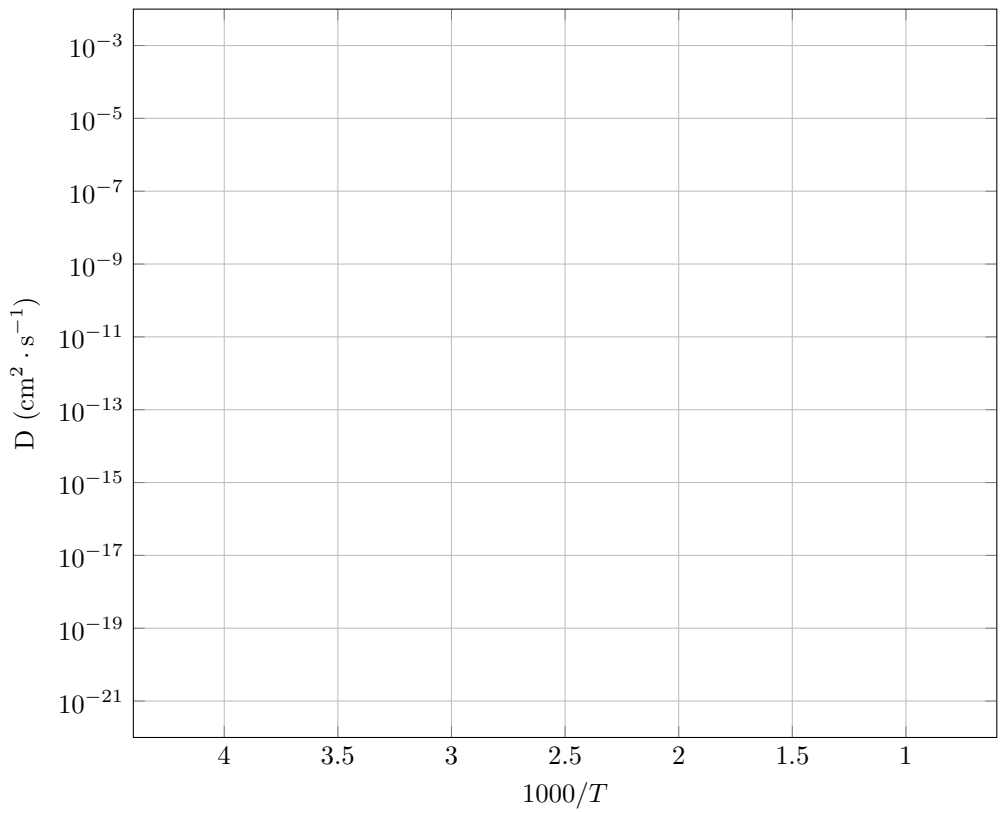
En raisonnant en ordres de grandeur, l'équation de diffusion fait le lien entre un temps caractéristique τ et une longueur caractéristique de diffusion L : on a $L = \sqrt{D\tau}$.

L'acier est un alliage d'insertion constitué principalement de fer et de carbone à hauteur de 0,02 % à 2 % en masse. Il est important de contrôler précisément le taux de carbone car c'est essentiellement la teneur en carbone qui confère à l'acier ses propriétés remarquables.

On donne les coefficients de diffusion du carbone dans le fer à différentes températures.

Θ (°C)	25	500	800
D ($\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}}$)	4×10^{-17}	3×10^{-8}	$1{,}6 \times 10^{-6}$

a) Reporter les valeurs expérimentales sur le graphique suivant, représentant le coefficient de diffusion en fonction de $\dfrac{1000}{T}$, où T est la température exprimée en kelvin.



b) Quel modèle vous semble le plus approprié (A et B sont des constantes positives) ?

(a) $A\,\mathrm{e}^{D} = -\dfrac{B}{T}$ (b) $\ln(D) = A - \dfrac{B}{T}$ (c) $A\,\mathrm{e}^{D} = +\dfrac{B}{T}$ (d) $\ln(D) = A + \dfrac{B}{T}$

.....

c) Évaluer numériquement l'ordre de grandeur B si D est exprimé en $\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}}$ et T en kelvin.

.....

Lorsque l'on fabrique une pièce d'acier on observe localement des modifications de la structure cristallographique du fer. On obtient une structure granulaire, les grains se distinguant par des teneurs différentes en carbone.

Les paramètres de mailles ont pour dimension caractéristique $a \approx 1 \times 10^{-10}\,\text{m}$ et les grains $d \approx 10\,\mu\text{m}$.

Lors de ces transitions de phase les atomes de carbone migrent par diffusion de façon à occuper les nouveaux interstices disponibles.

Évaluer la distance caractéristique (en mètres) sur laquelle est sensible le processus de diffusion au bout d'une heure :

d) à 25 °C .....

e) à 500 °C .....

f) à 800 °C .....

En régime permanent

Entraînement 13.11 — Vie et mort de bactéries.

La population de bactéries dans une culture atteint un équilibre résultant de la compétition de deux phénomènes opposés :

- la division cellulaire (elles se divisent en deux) de temps caractéristique T_1 qui accroît la population ;
- la mort des bactéries qui diminue cette population de temps caractéristique T_2.

Dans un milieu homogène où la densité de bactéries est indépendante de la position, la densité de celles-ci peut se modéliser pour une équation de la forme

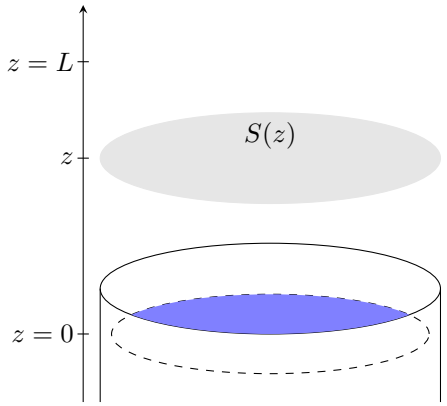
$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{n}{T_1} - \frac{n^2}{n_c T_2},$$

où n_c est une constante.

Quelle est la densité de bactéries en régime permanent ? .....

Entraînement 13.12 — Évaporation.

On étudie la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air dans une colonne d'air située au dessus d'un verre. La surface libre est à l'altitude $z = 0$, l'axe vertical étant orienté vers le zénith.
On considère qu'à une altitude $z = L$, l'influence du verre n'est plus sensible et que la densité de molécules d'eau est nulle. On note n_0 sa valeur en $z = 0$.
Les gaz sont modélisés par des gaz parfaits.



a) Au niveau de la surface libre, la densité en molécule d'eau se note de la façon suivante (avec P_{sat}, la pression de vapeur saturante) :

(a) $n_0 = \dfrac{P_{\text{sat}}\mathcal{N}_A}{RT}$

(b) $n_0 = \dfrac{RT}{P_{\text{sat}}\mathcal{N}_A}$

(c) $n_0 = \dfrac{P_{\text{sat}}R}{\mathcal{N}_A T}$

(d) $n_0 = \dfrac{P_{\text{sat}}RT}{\mathcal{N}_A}$

.....

b) En régime permanent, on peut montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}z^2} = 0$. Exprimer $n(z)$:

(a) $n(z) = n_0\left(1 + \dfrac{z}{L}\right)$

(b) $n(z) = n_0\left(1 - \dfrac{z}{L}\right)$

(c) $n(z) = n_0\left(1 - \dfrac{L}{z}\right)$

(d) $n(z) = n_0\left(1 + \dfrac{L}{z}\right)$

.....

c) L'expression du flux Φ à travers une surface orientée $S(z)\vec{e_z}$ située à l'altitude z :

(a) $\Phi = DS\dfrac{n_0}{z}$

(b) $\Phi = -DS\dfrac{n_0}{z}$

(c) $\Phi = -DS\dfrac{n_0}{L}$

(d) $\Phi = DS\dfrac{n_0}{L}$

.....

Autres entraînements

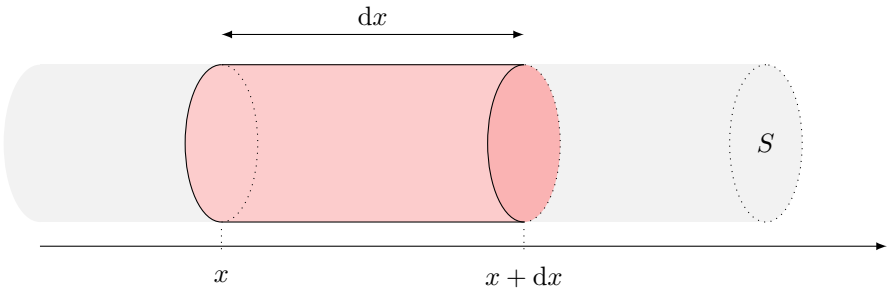
Entraînement 13.13 — Diffusion en l'absence de source.

On note n le nombre de particules par unité de volume et $\vec{j}$ le vecteur densité de flux de particules.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que

$$n = n(x,t) \quad \text{et} \quad \vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e_x}.$$

On étudie un élément de volume de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$:



a) Exprimer le nombre $N(t)$ de particules diffusantes présentes dans la tranche, à l'instant t, en fonction de $n(x,t)$, S et $\mathrm{d}x$.

.....

b) En déduire la variation du nombre de particules diffusantes dans la tranche à l'instant entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts de particules entre la tranche et l'extérieur.

c) En x le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

d) En $x + \mathrm{d}x$ le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

e) Au niveau de la paroi latérale le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit en notant ℓ le périmètre de la section :

(a) $j(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) 0 (e) $-j(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(b) $-j(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

.....

f) En déduire le transfert de particules total algébriquement reçu par la tranche.

.....

g) Faire un bilan de particules diffusantes dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$.

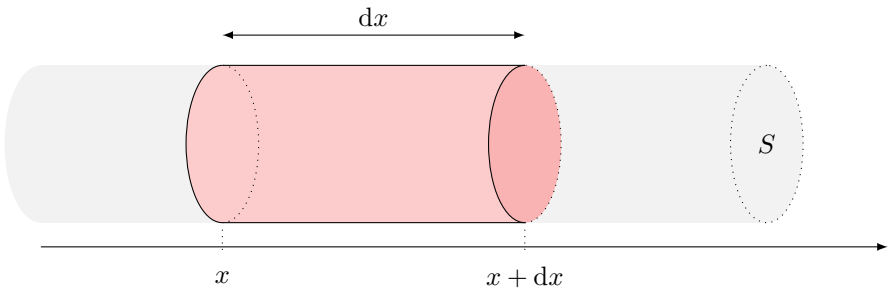
.....

h) En utilisant la loi de Fick, qui affirme que $\vec{j} = -D\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$, en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$.

.....

Entraînement 13.14 — Diffusion en présence de source.

On note n le nombre de particules par unité de volume et $\vec{j}$ le vecteur densité de flux de particules.
On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que $n = n(x,t)$ et $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e_x}$.
On étudie un élément de volume de section S compris entre x et $x + \mathrm{d}x$:



Dans le cas étudié, outre le phénomène de diffusion, un phénomène physique supplémentaire créé (algébriquement) $\sigma(x,t)$ particules par unité de volume et par unité de temps.

a) Exprimer la variation du nombre de particules diffusantes dans la tranche à l'instant entre t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de n.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts de particules entre la tranche et l'extérieur.

b) En x le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

c) En $x + \mathrm{d}x$ le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

d) Au niveau de la paroi latérale le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit en notant ℓ le périmètre de la section :

(a) $j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) 0 (e) $-j(x + \mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(b) $-j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j(x + \mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

.....

e) En prenant en compte le phénomène de diffusion et la création de particules au sein de la tranche, en déduire l'évolution totale de particules algébriquement reçues par la tranche.

.....

f) Faire un bilan de particules diffusantes dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

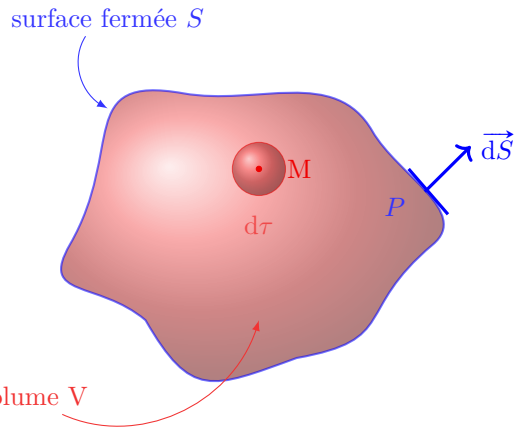
g) En utilisant la loi de Fick, en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$.

.....

Équation de diffusion : cas général

Entraînement 13.15 — Cas général.

On considère un volume V et la surface fermée S qui l'entoure, orientée localement selon la normale sortante.



a) Exprimer le nombre de particules dans le volume V à l'instant t sous la forme d'une intégrale volumique.

.....

b) En déduire la variation $\mathrm{d}N$ du nombre de particules présentent dans le volume V entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

c) Exprimer le nombre de particules quittant le volume V entre t et $t + \mathrm{d}t$:

(a) $j(P,t)S \times \mathrm{d}t$

(b) $\oiint_S \vec{j}(P,t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

(c) $\oiint_S \vec{j}(P,t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$

(d) $\vec{j}(P,t) \cdot \oiint_S \overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$

.....

On note $n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)$ le nombre de particules produites par unité de temps et par unité de volume.

d) Exprimer le nombre de particules créées dans le volume V entre t et $t + \mathrm{d}t$:

(a) $\iiint_V n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t) \cdot \mathrm{d}\tau$

(b) $n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)V$

(c) $n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)V \, \mathrm{d}t$

(d) $\left(\iiint_V n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t) \cdot \mathrm{d}\tau \right) \times \mathrm{d}t$

.....

e) Exprimer le bilan du nombre de particules présentes dans V entre t et $t+\mathrm{d}t$:

(a) $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} d\tau = -\oiint_S \vec{j}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iiint_V n_{\mathrm{prod}}(\mathrm{M},t)\cdot \mathrm{d}\tau$

(b) $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} d\tau = +\oiint_S \vec{j}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iiint_V n_{\mathrm{prod}}(\mathrm{M},t)\cdot \mathrm{d}\tau$

.....

On rappelle que $\displaystyle\oiint_S \vec{j}(P,t)\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \mathrm{div}\Big(\vec{j}(\mathrm{M},t)\Big)\,\mathrm{d}\tau$ et que $\vec{j}(\mathrm{M},t) = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)(\mathrm{M},t)$.

f) L'équation de diffusion s'écrit donc :

(a) $\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = -D\Delta(n) + n_{\mathrm{prod}}(\mathrm{M},t)$ (b) $\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta(n) + n_{\mathrm{prod}}(\mathrm{M},t)$

.....

Réponses mélangées

$L \approx 1\times10^{-4}\,\mathrm{m}$ $\quad n_c\dfrac{T_2}{T_1}$ $\quad$ (b) $\quad \mathrm{d}N = \left(\iiint_V \dfrac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau\right)\times \mathrm{d}t$

$n = \dfrac{n_c}{1+\left(\dfrac{n_c}{n_0}-1\right)\exp\left(-\dfrac{t}{T}\right)}$ $\quad$ (c) $\quad$ (a) $\quad N(t) = \iiint_V n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$

$N(t) = n(x,t)S\,\mathrm{d}x$ $\quad$ (b) $\quad \mathrm{d}\Phi = n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ $\quad \mathrm{d}N = -\dfrac{\partial j}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad$ (c) $\quad (A,B) = (1,1)$

$L \approx 4\times10^{-9}\,\mathrm{m}$ $\quad \mathrm{d}N = \dfrac{\partial n}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad 46\,\mathrm{jours}$ $\quad$ (b) $\quad$ (b) $\quad$ (b) $\quad$ (d) $\quad$ (a)

$\delta N = -\dfrac{\partial j}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x} + \sigma$ $\quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}u\sqrt{\dfrac{t}{a}}$ $\quad$ (c) $\quad$ (d) $\quad D = \dfrac{1}{4a}$

$\delta N = -\dfrac{\partial j}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sigma(x,t)S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad \alpha^2 D - \beta = 0$ $\quad \alpha = \dfrac{K}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ $\quad$ Géraniol $\quad$ (a)

Vanilline $\quad \dfrac{\tau_{\mathrm{sel}}}{\tau} \approx 5$ $\quad$ (a) $\quad \vec{j}(M,t) = n(M,t)\vec{v}(M,t)$ $\quad -\dfrac{2D}{\delta^2} + \omega = 0$ $\quad \mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$\mathrm{d}^2N = \left(n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t$ $\quad$ Limonène $\quad$ (c) $\quad$ (b) $\quad -\oiint_S \vec{j}(P,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\times\mathrm{d}t$ $\quad$ (c)

$\mathrm{d}N = \dfrac{\partial n}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad \dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma$ $\quad \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$ $\quad$ (a) $\quad$ (a) $\quad B \approx 1\times10^4$

(d) $\quad N = \dfrac{K}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{erf}(+\infty)$ $\quad \dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ $\quad L \approx 8\times10^{-4}\,\mathrm{m}$ $\quad \mathrm{d}\tau = \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t$

► Réponses et corrigés page 368

Diffusion thermique

Prérequis
Premier principe et deuxième principe de la thermodynamique
Loi de Fourier : $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

Dans toute la fiche, les caractéristiques du matériau homogène et isotrope étudié seront notées :

- D, le coefficient de diffusivité thermique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$),
- μ, la masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$),
- c, la capacité thermique massique du matériau ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$),
- λ, la conductivité thermique du matériau ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

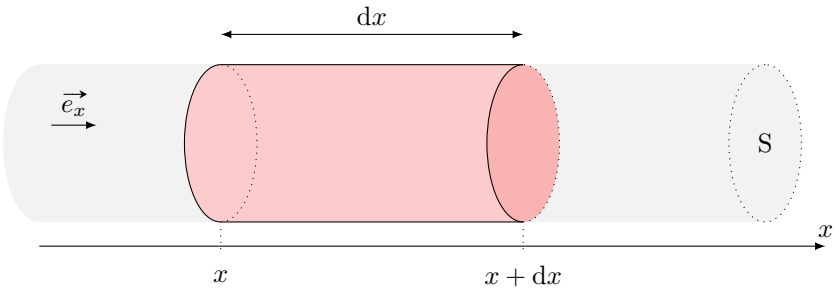
Pour évaluer les ordres de grandeur caractéristiques du phénomène, on notera :

- τ, la durée caractéristique (s),
- L, la longueur caractéristique (m).

Étude de flux thermique

Entraînement 14.1 — Bilan thermique en géométrie cartésienne.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$.



On note S la section du conducteur et ℓ le périmètre de la section.

a) Le vecteur densité volumique de flux thermique $\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ a pour unité possible :

(a) $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (b) $\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ (c) $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ (d) $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

.....

b) Dans le cadre de cet entraînement, le vecteur densité de flux thermique $\vec{j_Q} = j_Q \vec{e_x}$ peut s'écrire :

(a) $\vec{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial t} \vec{e_x}$ (b) $\vec{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \vec{e_x}$

.....

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.

c) L'énergie interne $U(t)$ de la tranche considérée à l'instant t est :

(a) $cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$ (c) $\mu cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$

(b) $cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$ (d) $\mu cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$

où C est une constante .....

d) En déduire la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts thermiques entre la tranche et l'extérieur.

e) En x, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

f) En $x + \mathrm{d}x$, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

g) Au niveau de la paroi latérale, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit en notant ℓ le périmètre de la section :

(a) $j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) 0 (e) $-j_Q(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(b) $-j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j_Q(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

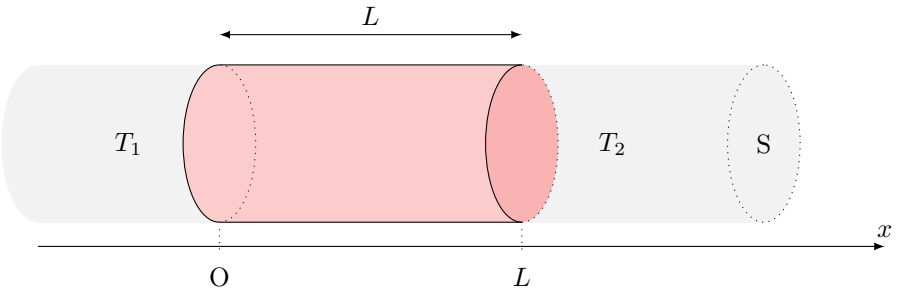
.....

h) En déduire le transfert thermique total δQ algébriquement reçu par la tranche.

.....

Entraînement 14.2 — Équation de la chaleur.

On étudie une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2. On se place en coordonnées cartésiennes.



Initialement, l'ensemble de la barre est à la température T_0.

a) Le champ de température est de la forme :

(a) $T = T(x,t)$ (c) $T = T(x)$ (e) $T = T(y,t)$

(b) $T = T(x,y,t)$ (d) $T = T(x,y)$ (f) $T = T(x,y,z,t)$

.....

b) Le vecteur de densité volumique de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}$ est de la forme :

(a) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,t)\overrightarrow{e_x}$ (d) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x)\overrightarrow{e_x}$

(b) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,t)\overrightarrow{e_x}$ (e) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(y,t)\overrightarrow{e_y}$

(c) $\overrightarrow{j_Q} = j_{Qx}(x,y)\overrightarrow{e_x} + j_{Qy}(x,y)\overrightarrow{e_y}$ (f) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,z,t)\overrightarrow{e_x}$

.....

c) L'équation de la chaleur $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$ s'écrit ici :

(a) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (c) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]$

(b) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (d) $0 = D\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$

.....

La diffusion : un processus lent

Entraînement 14.3 — Étude qualitative.

L'équation de diffusion caractérise l'évolution temporelle du profil de température dans un matériau.

En raisonnant en ordre de grandeur, cette équation fait le lien entre un temps caractéristique τ et une longueur caractéristique de diffusion L : $L = \sqrt{D\tau}$ où $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ est le coefficient de diffusion thermique.

Par combien est multipliée la longueur caractéristique de diffusion lorsque l'on double :

a) la conductivité du matériau ? .....

b) la capacité thermique du matériau ? .....

Par combien est multiplié le temps caractéristique de diffusion si on double :

c) la longueur du matériau L ? .....

d) la masse volumique μ ? .....

Entraînement 14.4 — Nombre de Fourier : transformation adiabatique ?

Le nombre de Fourier $\text{Fo} = \dfrac{D\Delta t}{L^2}$ est un nombre sans dimension utilisé couramment en transfert thermique, avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) le coefficient de diffusion thermique, Δt (s) la durée étudiée et L (m) la longueur caractéristique d'étude.

Il se définit également comme le rapport entre la durée Δt d'un processus sur un temps caractéristique de diffusion, c'est-à-dire au temps nécessaire au transfert thermique pour diffuser sur une distance L.

a) Un processus peut être considéré comme adiabatique dans quel cas ?

(a) $\text{Fo} \ll 1$ (b) $\text{Fo} \gg 1$

.....

On considère la compression du mélange {air + carburant} dans un cylindre d'un moteur 4 temps en acier. Avec un régime moteur d'environ $2\,000\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$, la durée de la compression est de $1{,}5 \times 10^{-2}\,\text{s}$. On considère que l'épaisseur du cylindre est de 5 mm.

On donne $\lambda_{\text{acier}} = 13\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\mu_{\text{acier}} = 7\,800\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $c_{\text{acier}} = 480\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

b) Exploitant les données ci-dessous, calculer la valeur du nombre de Fourier .....

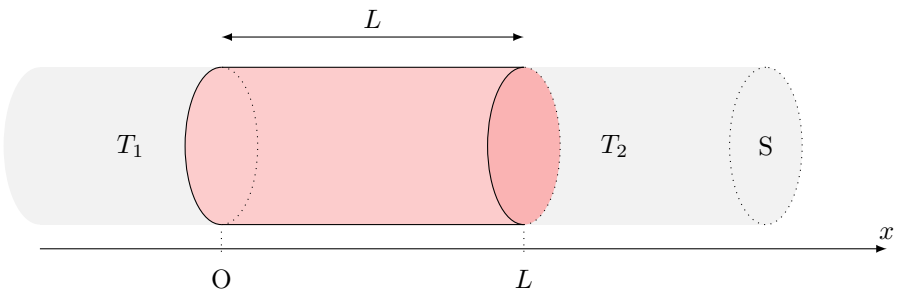
c) L'hypothèse d'une compression adiabatique habituellement utilisée est-elle valide ? ..

En régime permanent : utilisation des résistances thermiques

Entraînement 14.5 — Champ de température en géométrie cartésienne.

On étudie une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2.

On se place en coordonnées cartésiennes et on étudie le régime permanent.



a) Le champ de température vérifie $\dfrac{\text{d}^2T}{\text{d}x^2} = 0$. Exprimer $T(x)$.

.....

b) Quelle(s) hypothèse(s) de l'énoncé assure(nt) que le flux thermique $\Phi(x) = \iint_S \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ soit uniforme, c'est-à-dire ne dépendant pas de x ?

(a) barre homogène
(b) régime permanent
(c) parois latérales calorifugées

.....

c) En déduire le flux thermique $\Phi(x)$ traversant une section S de barre située à l'abscisse x.

(a) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$
(b) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_2 - T_1)$
(c) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_1 - T_2)$
(d) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_2 - T_1)$

.....

Entraînement 14.6 — Analogie thermique – électrique.

Une inhomogénéité spatiale de température $T_1 - T_2$ se traduit par un transport d'énergie caractérisé par le flux Φ. Ceci est analogue au transport de charges caractérisé par une intensité I causé par une inhomogénéité de potentiel électrique $V_1 - V_2$. Ainsi un conducteur électrique élémentaire de section S, de longueur ℓ et de conductivité électrique γ est caractérisé par une résistance $R = \dfrac{\ell}{\gamma S}$ permettant grâce à la loi d'Ohm $V_1 - V_2 = RI$ de déterminer I à partir de $V_1 - V_2$.

Le flux thermique Φ est proportionnel à $T_1 - T_2$ en régime permanent. En utilisant l'analogie électrique, on peut définir une « résistance thermique ».

a) La contrainte imposée au conducteur thermique $T_1 - T_2$ est l'analogue de celle imposée à un conducteur électrique :

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

b) Quelle grandeur, parmi la liste suivante, est l'analogue électrique du flux thermique Φ ?

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

c) Pour caractériser le conducteur thermique on introduit une « résistance thermique » analogue de :

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

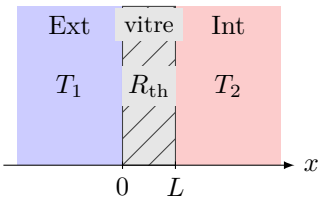
d) Quelle grandeur, parmi la liste suivante, est l'analogue électrique de λ ?

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

Entraînement 14.7 — Conducto-convectif en une dimension (I).

Soit une vitre (surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$, épaisseur $L = 5\,\mathrm{mm}$) fabriquée en verre, de conductivité thermique $\lambda = 1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Celle-ci sépare l'extérieur (à la température $T_1 = 9\,°\mathrm{C}$) de l'intérieur (à la température $T_2 = 19\,°\mathrm{C}$) d'une maison.



La situation est étudiée en régime permanent. La conduction thermique envisagée est telle que la résistance thermique de la vitre est $R_{\mathrm{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S}$.

a) La résistance thermique de la vitre vaut :

(a) $5\times10^{-3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ (b) $5\times10^{-3}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ (c) $2\times10^{3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ (d) $2\times10^{3}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}$

.....

On rappelle que le flux thermique est relié à l'inhomogénéité de température par la relation $\Delta T = R_{\mathrm{th}}\Phi$.

b) Le flux thermique Φ à travers la vitre vaut :

(a) $5\times10^{-3}\,\mathrm{W}$ (b) $5\times10^{-2}\,\mathrm{W}$ (c) $2\times10^{3}\,\mathrm{W}$ (d) $2\times10^{2}\,\mathrm{W}$

.....

c) En réalité la température n'est pas totalement uniforme dans l'air à proximité des surfaces de contact avec la vitre. Les transferts thermiques à l'interface avec les thermostats sont régis alors par la relation de Newton : $\Phi = h_1 S(T_1 - T(0))$ et $\Phi = h_2 S(T(L) - T_2)$ où h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert conducto-convectifs danes les deux couches limites.

Les résistances thermiques $R_{\mathrm{th},i}$ correspondantes sont de la forme :

(a) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{h_i}{S}$ (b) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{S}{h_i}$ (c) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{1}{h_i S}$ (d) $R_{\mathrm{th},i} = h_i S$

.....

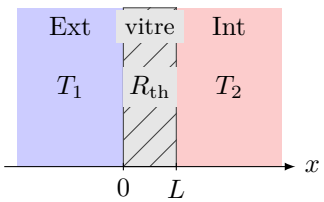
d) Les résistances $R_{\mathrm{th,v}}$, $R_{\mathrm{th},1}$ et $R_{\mathrm{th},2}$ sont-elles en série ou en parallèle ? .

e) Évaluer le flux thermique Φ' à travers la vitre en tenant compte des pertes conducto-convectives si $h_1 = h_2 = 5\times10^{2}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ .....

Entraînement 14.8 — Conducto-convectif en une dimension (II).

On considère une vitre de section S et de résistance thermique R_{th} séparant l'extérieur de température T_1 et l'intérieur d'une maison (température T_2).

Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Avec une convection plus importante à l'extérieur due au vent, on peut considérer que $T(0) = T_1$.

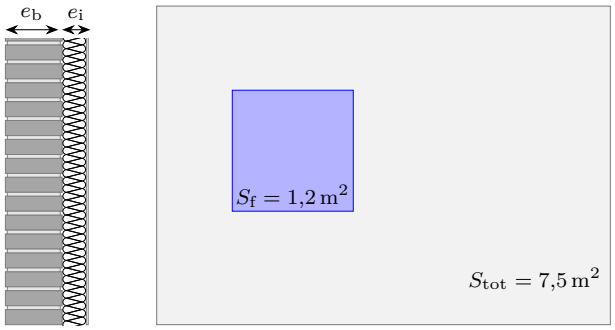


Les températures et le flux thermique vérifient alors le système :

$$\begin{cases} \phi = h_2 S(T(L) - T_2) \\ T_1 - T(L) = R_{\mathrm{th}}\phi \end{cases}$$

Quelle est l'expression de $T(L)$? .....

Entraînement 14.9 — Isolation thermique d'un mur.



Vue en coupe Vue de face

Un pan de mur de surface totale $S_{tot} = 7{,}5\,m^2$ est composé d'un mur de brique d'épaisseur $e_b = 20\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_b = 0{,}70\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ et d'un isolant en fibre de bois d'épaisseur $e_i = 12\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_i = 0{,}036\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Une fenêtre de surface $S_f = 1{,}2\,m^2$ de résistance thermique $R_f = 0{,}70\,K \cdot W^{-1}$ est percée dans le mur.

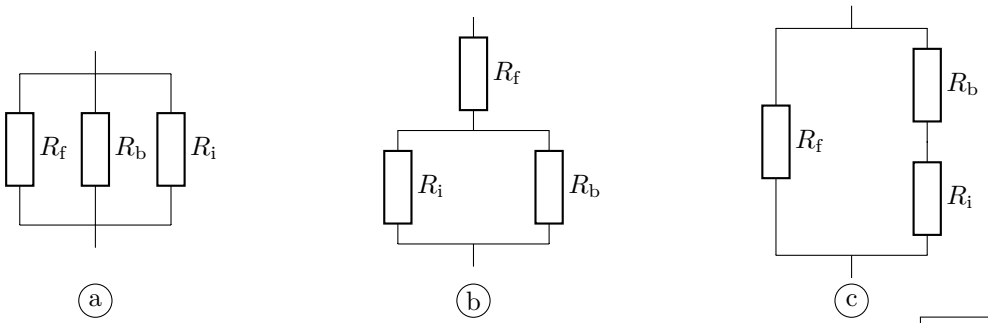
La température intérieure est $T_{int} = 20\,°C$, la température extérieure vaut $T_{ext} = 5\,°C$.

La résistance thermique d'une surface S plane d'épaisseur e est $R_{th,\,plan} = \dfrac{e}{\lambda S}$.

Quelle est la valeur de la résistance thermique :

a) R_b de la brique ? ..... b) R_i de l'isolant ? .....

c) Parmi les montages suivants, lequel correspond à la situation étudiée ?



.....

d) Quelle est la résistance thermique globale $R_{th,tot}$ du mur ? .....

e) En considérant que les échanges thermiques ne peuvent se faire qu'à travers cette paroi, quelle puissance thermique ϕ doit développer le système de chauffage pour maintenir cet écart de température ?

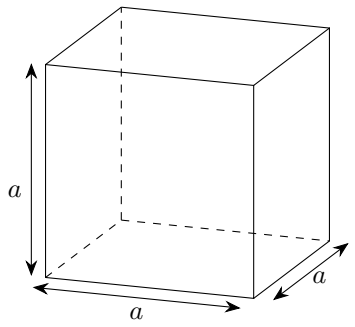
(a) 47,5 W (b) 475 W (c) 4,75 kW

.....

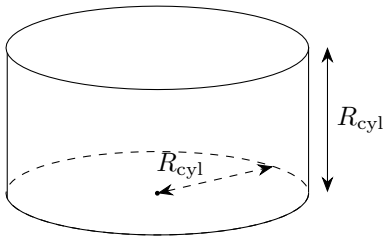
Entraînement 14.10 — Igloo de survie.

Un alpiniste, surpris par le mauvais temps, décide de construire un igloo de survie d'un volume intérieur de $1\,\mathrm{m}^3$ avec des blocs de neige d'épaisseur $e = 10\,\mathrm{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_{\text{neige}} = 0{,}2\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

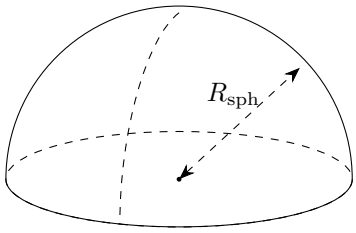
Il hésite entre 3 formes d'igloos : un igloo cubique, cylindrique dont la hauteur est égale à son rayon et un igloo hémisphérique.



Igloo cubique



Igloo cylindrique



Igloo hémisphérique

Pour les calculs numériques, on prendra : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0{,}7$ et $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}} \approx 0{,}8$.

Pour que le volume intérieur des igloos soit de $1\,\mathrm{m}^3$,

a) quel doit être le rayon de l'igloo cylindrique ?

.....

b) quel doit être le rayon de l'igloo hémisphérique ?

.....

c) On souhaite déterminer la résistance thermique de chaque igloo. Associer à chaque igloo l'expression de sa résistance thermique.

$$I_{\text{(a)}} = \int_{0{,}7}^{0{,}8} \frac{\mathrm{d}r}{3\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{(b)}} = \int_{0{,}8}^{0{,}9} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{(c)}} = \int_{1}^{1{,}1} \frac{\mathrm{d}r}{5\lambda r^2}$$

.....

d) Après avoir calculé chacune des intégrales précédentes, quel igloo présente une résistance thermique approximative de $\dfrac{1}{8{,}9}\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$?

.....

e) L'alpiniste dégage une puissance thermique de $\phi = 100\,\mathrm{W}$.

En déduire la différence de température entre l'intérieur de l'igloo hémisphérique et l'extérieur en régime permanent.

.....

Entraînement 14.11 — Analogie électrique d'une habitation (I).

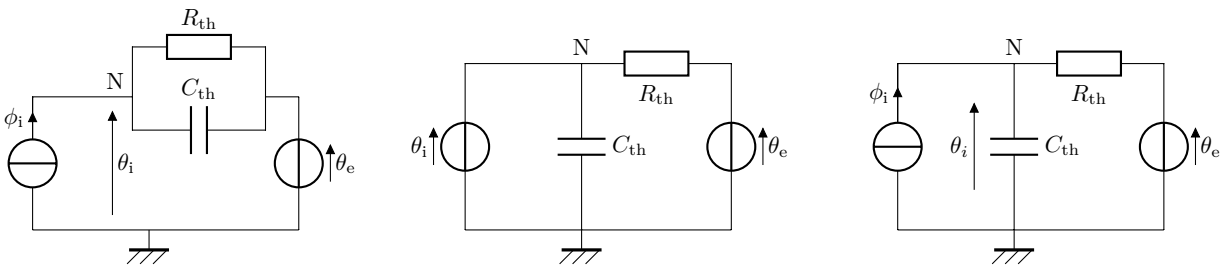
L'objectif de cet entraînement est d'approfondir l'analogie entre les phénomènes de conduction thermique et d'électricité en étudiant une habitation dans sa globalité.

On constate que :

- le flux thermique ϕ est l'analogue de l'intensité du courant électrique (flux de charge électrique) ;
- la température θ est l'équivalent du potentiel électrique ;
- un matériau ayant une capacité thermique C_{th} peut être modélisé par un condensateur électrique ;
- tout comme la résistance électrique traduit une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel et le courant électrique, la résistance thermique traduit la relation de proportionnalité entre la différence de température et le flux thermique : $\Delta\theta = R_{\text{th}}\phi$.

Une habitation est isolée de l'extérieur où règne une température $\theta_{\text{e}}(t)$ par une enveloppe isolante de résistance thermique R_{th}. À l'intérieur de l'habitation, un système de chauffage apporte un flux thermique ϕ_{i} permettant d'atteindre une température intérieure $\theta_{\text{i}}(t)$. L'intérieur de la maison possède une capacité thermique C_{th}.

Parmi les circuits ci-dessous, lequel correspond à la situation étudiée ? .....



Circuit (a) Circuit (b) Circuit (c)

Entraînement 14.12 — Analogie électrique d'une habitation (II).

a) Établir l'équation différentielle sur θ_i dans le cas du circuit (c) de l'entraînement précédent.

.....

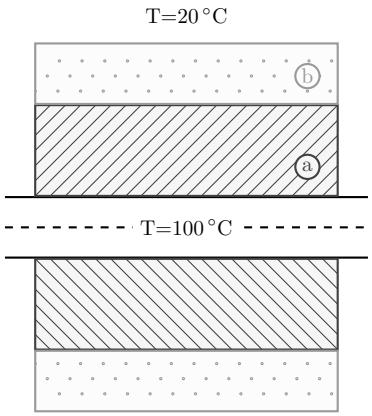
Du fait de l'alternance jour–nuit, la température extérieure θ_{e} peut s'écrire

$$\theta_{\text{e}}(t) = \theta_{\text{e0}} + \theta_{\text{e1}}\cos(\omega t).$$

b) Quelle doit être l'expression du flux ϕ_{i} fourni par le système de chauffage pour maintenir une température intérieure constante égale à θ_{i0} ?

.....

Entraînement 14.13 — Une résistance thermique en géométrie cylindrique.



Vue en coupe

Un mince tuyau métallique d'une longueur L et de rayon 1 cm transporte de la vapeur à 100 °C. Celui-ci est couvert par deux couches d'isolants :

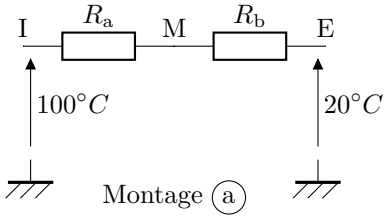
- une couche (a) intérieure d'une épaisseur de 4 cm et de conductivité thermique $0{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$,
- une couche (b) extérieure d'une épaisseur de 2 cm et de conductivité thermique $0{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

La température extérieure est de 20 °C.

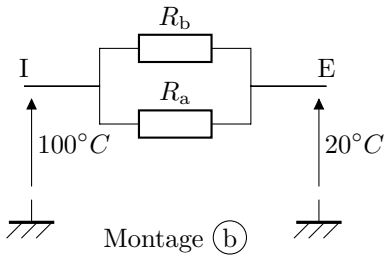
La résistance thermique dans le cas d'un flux radial est de la forme $R_{\text{th}} = \dfrac{1}{2\pi\lambda L}\ln(r_2/r_1)$.

a) Parmi les deux montages électriques ci-dessous, lequel correspond au système étudié ?

.....



Montage (a)



Montage (b)

b) Quelle est la température à l'interface entre les deux isolants ?

(a) 25,2 °C (b) 30,2 °C (c) 30,2 °C (d) 35,2 °C (e) 40,2 °C

On prendra $\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} \approx 1{,}21$ .....

Plus de diffusion thermique

Entraînement 14.14 — Choix d'un isolant.

La résistance thermique surfacique r d'un matériau traduit sa capacité à résister à un flux thermique. Elle dépend de l'épaisseur du matériau e et de sa conductivité thermique λ, selon la relation

$$r = e/\lambda.$$

Le déphasage thermique $\Delta\tau$ définit le temps que met un front de chaleur pour traverser une épaisseur donnée de matériau. Cette grandeur dépend de la masse volumique et de la capacité thermique massique du matériau, selon la relation

$$\Delta\tau = e\sqrt{\frac{\mu c}{2\omega\lambda}},$$

où ω est la pulsation excitatrice associée au front de chaleur.

La prise en compte du déphasage thermique est notamment utile pour le confort l'été, en décalant au cœur de la nuit plus fraîche l'arrivée de la chaleur reçue par les parois extérieures durant la journée. Dans le cas de l'alternance jour–nuit $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

La consommation totale d'énergie primaire non renouvelable, communément appelée « énergie grise », permet de quantifier assez bien l'impact environnemental global d'un produit. L'énergie grise surfacique $\mathcal{E}_\mathrm{S}$ d'un isolant peut se calculer par la relation $\mathcal{E}_\mathrm{S} = \mu e \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est l'énergie grise massique.

Isolants	Conductivité thermique λ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	Masse volumique μ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	Capacité thermique c ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	Énergie grise massique $\mathcal{E}$ ($\mathrm{kWh \cdot kg^{-1}}$)
Fibres de bois	0,037	150	2 000	2
Bottes de paille	0,052	100	1 550	0,1
Laines minérales	0,030	30	900	8
Vermiculite	0,050	300	950	0,8
Polystyrène expansé	0,032	20	1 300	32
Polyuréthane	0,022	35	1 000	30

Un maître d'œuvre doit choisir un isolant pour fabriquer un mur avec comme contrainte d'avoir

$$r \geqslant 7{,}0\,\mathrm{m^2 \cdot W^{-1}}$$

et un déphasage

$$\Delta\tau \geqslant 8\,\mathrm{h}.$$

Après avoir calculé l'épaisseur nécessaire pour vérifier la contrainte sur r et le déphasage correspondant, le maître d'œuvre choisira l'isolant ayant l'énergie grise surfacique la plus faible parmi ceux qui vérifient les contraintes ci-dessus.

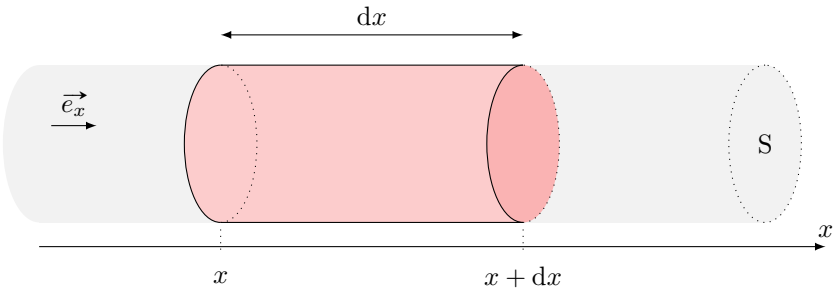
Quel isolant choisira-t-il ? .....

Entraînement 14.15 — En présence de source.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}.$$

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$:



Le conducteur thermique est le siège d'une production algébrique volumique d'énergie de puissance p_{prod} (effet Joule, réaction chimique, etc.).

a) Donner l'expression de la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ de la tranche $\mathrm{d}x$ du conducteur entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche $\mathrm{d}\hat{u}$ aux transferts conductifs.

.....

c) Donner l'expression de l'énergie produite dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par T.

.....

Entraînement 14.16 — Transfert conducto-convectif latéral.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}$. On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.

La paroi latérale du volume de section S est en contact avec un thermostat à la température T_{ext}. Le flux thermique surfacique au niveau de la surface latérale vérifie la loi de Newton, *i.e.* est proportionnel à $T(x,t) - T_{\text{ext}}$ (facteur de proportionnalité noté h). On note p le périmètre de la tranche de section S.

a) Donner l'expression de $\mathrm{d}U$ en fonction de la variation de température .....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche dus aux transferts conductifs.

.....

c) Quelle est l'expression de l'énergie algébriquement reçue au niveau de la paroi latérale dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$?

(a) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (e) 0

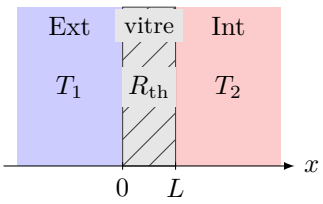
(b) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (f) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p$

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par T .....

Entraînement 14.17 — Conducto-convectif à 1D (3).

On considère une vitre de section S et de résistance thermique R_{th} séparant l'extérieur de température T_1 et l'intérieur d'une maison (température T_2).

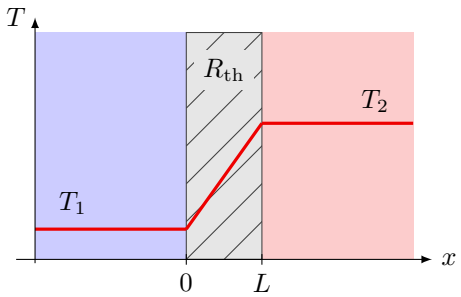


Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Si l'on prend en compte les effets conducto-convectifs aux deux interfaces, on obtient le système :

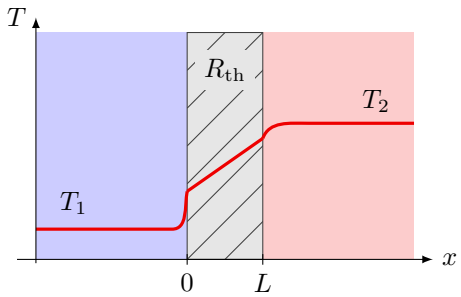
$$\begin{cases} \phi = h_1 S(T_1 - T(0)) \\ T(0) - T(L) = R_{\text{th}}\phi \\ \phi = h_2 S(T(L) - T_2). \end{cases}$$

a) Le profil de température est de la forme :

(a)



(b)



.....

Quelle est l'expression de :

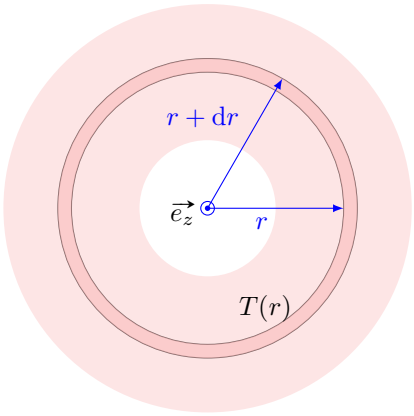
b) $T(0)$? .....

c) $T(L)$? .....

En coordonnées cylindriques et sphériques

Entraînement 14.18 — Régime permanent en géométrie cylindrique (I).

On considère le cas d'isothermes cylindriques d'axe $(O, \vec{e_z})$. Pour obtenir le champ de température et le flux thermique il faut adapter le volume élémentaire étudié aux symétries du problème. Pour cela on raisonnera sur un cylindre évidé de rayon r, d'épaisseur $\mathrm{d}r$ et de longueur h.



a) Que vaut la variation d'énergie interne du système en régime permanent ?

.....

b) Qu'en déduire concernant le transfert thermique δQ entre t et $t + \mathrm{d}t$?

.....

c) Que peut-on déduire concernant le flux $\Phi(r) = 2\pi r h j_Q(r)$ de $\overrightarrow{j_Q}$ à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h ?

(a) Le flux $\Phi(r)$ décroît avec le rayon.
(b) Le flux $\Phi(r)$ est indépendant de r.
(c) Le flux $\Phi(r)$ augmente avec le rayon.

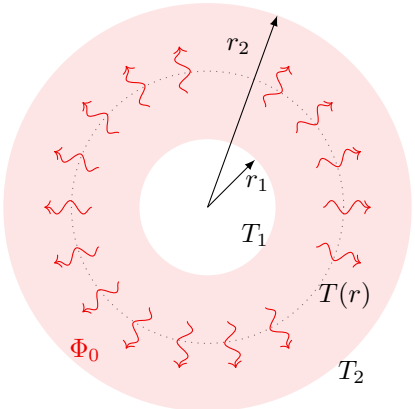
.....

On dit alors que $\overrightarrow{j_Q}$ est à « flux conservatif ». Cela permet notamment de le calculer pour tout cylindre de rayon r connaissant les conditions limites.

d) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par T .....

Entraînement 14.19 — Régime permanent en géométrie cylindrique (II).

On considère un cylindre évidé de longueur h, de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2. En régime permanent, dans le cas d'isothermes cylindriques, la température est régie par l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\dfrac{1}{r}$ où Φ_0 est le flux thermique radial.



a) Les conditions aux limites imposent Φ_0 et $T(r_1) = T_1$.
Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de T_1 et Φ_0.

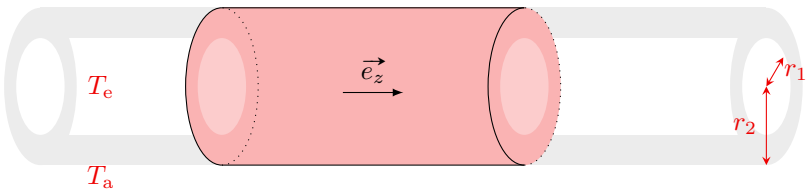
.....

b) Les conditions aux limites imposent $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$.
Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de T_1 et T_2.

.....

Entraînement 14.20 — Résistance thermique d'une canalisation.

Soit une canalisation, de longueur L, comprise entre les cylindres de rayons r_1 et $r_2 > r_1$, de même axe (Oz). Elle contient de l'eau à la température T_e et est entourée d'air à la température T_a.



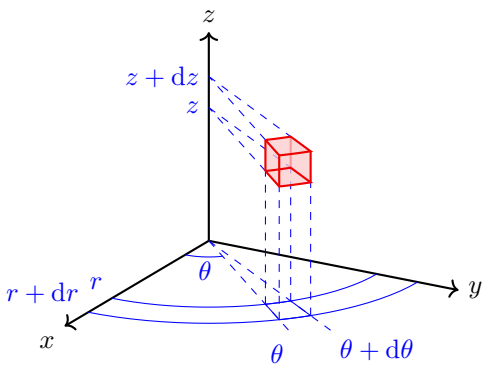
On se place en coordonnées cylindriques et on considère la canalisation assez longue pour négliger les effets de bord.

a) Quelles sont les dépendances spatiales du champ de température ?

(a) $T(r,\theta)$ (b) $T(z)$ (c) $T(r)$ (d) $T(z,\theta)$

b) En déduire la forme du vecteur densité volumique de courant $\vec{j_Q}$.

(a) $j_Q(z)\vec{e_r}$ (b) $j_Q(r)\vec{e_r}$ (c) $j_Q(r)\vec{e_z}$ (d) $j_Q(z)\vec{e_z}$



On considère un élément de volume de côtés $\mathrm{d}r$, $r\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$.

Cet élément de volume est une portion de tube de champ de $\vec{j_Q}$ entre deux portions d'équithermes de surface

$$\delta^2 S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,$$

distantes de $\delta L = \mathrm{d}r$.

c) En déduire sa conductance thermique, c'est-dire la capacité du matériau à transmettre un flux thermique. Elle est définie comme l'inverse de la résistance thermique.

On associe les éléments de volume précédents (représentés ci-dessus) de façon à obtenir une couronne en faisant varier θ de 0 à 2π.

d) Il s'agit d'une :

(a) association série (b) association parallèle

e) En calculant la bonne intégrale parmi celles proposées ci-dessous, déduire l'expression de la conductance de cette couronne. La conductance est définie comme l'inverse de la résistance thermique.

(a) $\delta^2 G_{th} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$ (b) $\delta^2 G_{th} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}r}{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}$

On associe les couronnes précédentes de façon à obtenir un cylindre évidé en faisant varier z de 0 à L.

f) Cette association de résistance thermique est :

(a) une association série (b) une association parallèle

.....

g) En déduire la conductance de ce cylindre évidé .....

On associe les cylindres précédents de façon à obtenir la canalisation étudiée en faisant varier r de r_1 à r_2.

h) Il s'agit d'une :

(a) association série (b) association parallèle

.....

i) En déduire la conductance de ce cylindre évidé .....

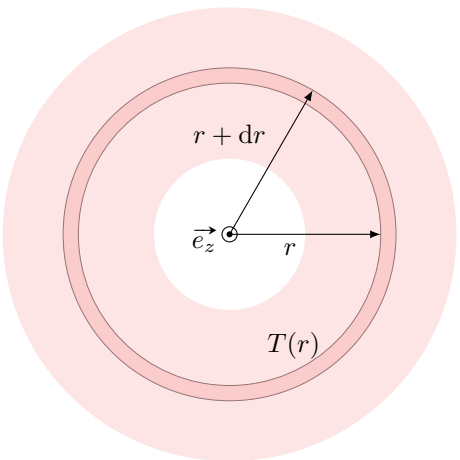
j) En déduire l'expression du flux thermique sortant Φ_0 en fonction de T_a et T_e.

.....

Entraînement 14.21 — Régime permanent en géométrie sphérique (I).

On considère le cas d'isothermes $T(r)$ correspondant à des sphères concentriques de centre O. Pour obtenir le champ de température et le flux thermique, il faut adapter le volume élémentaire étudié aux symétries du problème.

Pour cela on raisonnera sur une « coquille sphérique » : boule évidée de rayon r et d'épaisseur dr, comme représenté ci-contre.



a) Que vaut la variation d'énergie interne du système en régime permanent ?

.....

b) Que peut-on en déduire concernant le transfert thermique δQ entre t et $t + \mathrm{d}t$?

.....

c) Que peut-on déduire concernant le flux $\Phi(r) = 4\pi r^2 j_Q(r)$ de $\overrightarrow{j_Q}$ à travers une sphère de rayon r ?

(a) Le flux $\Phi(r)$ décroît avec le rayon. (c) Le flux $\Phi(r)$ augmente avec le rayon.

(b) Le flux $\Phi(r)$ est indépendant de r.

.....

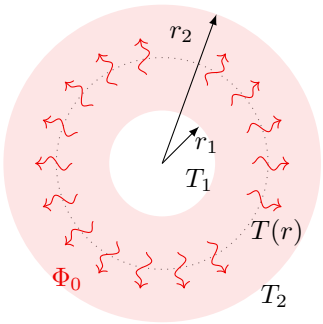
On dit que $\overrightarrow{j_Q}$ est à flux conservatif. Cela permet notamment de le calculer pour toute sphère de rayon r connaissant les conditions limites.

d) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par T.

.....

Entraînement 14.22 — Régime permanent en géométrie sphérique (II).

On considère une sphère évidée de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2. En régime permanent, dans le cas d'isothermes sphériques, le température est régie par l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\dfrac{1}{r^2}$ où Φ_0 est le flux thermique radial sortant.



a) Les conditions aux limites imposent Φ_0 et $T(r_1) = T_1$. Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de T_1 et Φ_0.

.....

b) Les conditions aux limites imposent $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$. Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de T_1 et T_2.

.....

Réponses mélangées

$0{,}8\,\mathrm{m}$ $\quad -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad$ (a) $\quad \dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}}(\theta_{\mathrm{i}0} - \theta_{\mathrm{e}0} - \theta_{\mathrm{e}1}\cos(\omega t))$ $\quad 2$ $\quad$ (c)

(a) $\quad$ (b) $\quad 0{,}7\,\mathrm{m}$ $\quad$ (a) $\quad \mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad$ (b) $\quad$ (a) $\quad 47{,}5\,\mathrm{W}$

(c) $\quad \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\dfrac{1}{r}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\dfrac{1}{r^2}$ $\quad 3{,}2\times10^{-1}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ $\quad \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

$\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{\mathrm{prod}}$ $\quad$ Sphérique $\quad \dfrac{T_1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S}$ $\quad \dfrac{2\pi\lambda L r}{\mathrm{d}r}$ $\quad$ (b) $\quad$ (b)

(b) et (c) $\quad \sqrt{2}$ $\quad T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$ $\quad \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad 4$ $\quad$ (c) $\quad$ (c)

0 $\quad$ en série $\quad T_1 + \dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right)$ $\quad \delta Q = 0$ $\quad$ Les bottes de paille $\quad$ (d)

(cub., (c)) $\quad$ (cyl., (a)) $\quad$ (sph., (b)) $\quad \dfrac{2\pi\lambda r\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$ $\quad$ (a) $\quad$ (b) $\quad 1/\sqrt{2}$ $\quad$ (a)

$\dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}$ $\quad T(r) = T_1 + \dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\ln\left(\dfrac{r_1}{r}\right)$ $\quad \dfrac{R_{\mathrm{th}} h_1 S + \frac{h_1}{h_2}}{1 + \frac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}} h_1 S} T_1 + \dfrac{1}{1 + \frac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}} h_1 S} T_2$

(b) $\quad 1{,}1\times10^{3}\,\mathrm{W}$ $\quad$ (c) $\quad 0{,}53\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ $\quad \mathrm{d}U = \mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad$ (a)

(c) $\quad T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)\dfrac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$ $\quad \dfrac{2\pi\lambda L}{\ln(r_2/r_1)}(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{e}})$ $\quad$ (c) $\quad$ Oui

$\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta_i}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}}(R_{\mathrm{th}}\phi_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{e}})$ $\quad 11\,^{\circ}\mathrm{C}$ $\quad \dfrac{1}{1 + \frac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S} T_1 + \dfrac{\frac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S}{1 + \frac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S} T_2$ $\quad$ (c)

0 $\quad$ (a) $\quad$ (b) $\quad$ (d) $\quad 2\times10^{-3}$ $\quad \dfrac{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$ $\quad \mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h\dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\mathrm{ext}})$

(b) $\quad p_{\mathrm{prod}} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad$ (c) $\quad$ (a) $\quad T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)\dfrac{\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$

$\mathrm{d}U = \mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\quad$ (a) $\quad$ (b) $\quad 4{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ $\quad$ (b) $\quad \mathrm{d}U = 0$

▶ Réponses et corrigés page 374

Transferts thermiques

Prérequis
Loi de Fourier : $\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.
Constantes utiles
→ Constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$

Vecteur densité de courant thermique

Entraînement 15.1 — Dans un calorimètre.

Un système S_1 est constitué d'un vase parfaitement calorifugé contenant initialement une masse m_1 d'eau à la température $T_1 = 20\,°\text{C}$. On y ajoute ensuite une masse m_2 d'eau à la température $T_2 = 80\,°\text{C}$ (système S_2). On attend que l'équilibre thermique soit réalisé.

a) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système S_1 ? .....

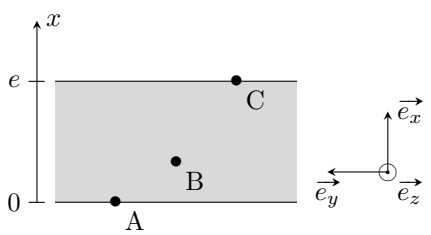
b) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système S_2 ? .....

c) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système $S_1 \cup S_2$? .....

Entraînement 15.2 — Une dalle en béton.

On considère une dalle en béton d'épaisseur $e = 20\,\text{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ séparant deux pièces d'une habitation.

La température de la face inférieure contenant A est $T_\text{A} = 8\,°\text{C}$ et celle de la face supérieure contenant C est $T_\text{C} = 18\,°\text{C}$. La température en un point $\text{M}(x, y, z)$ du béton ne dépend que de x en régime stationnaire.



Le vecteur densité de courant en M est $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{M}) = -\lambda \dfrac{\text{d}T}{\text{d}x}\vec{e_x}$.

a) Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

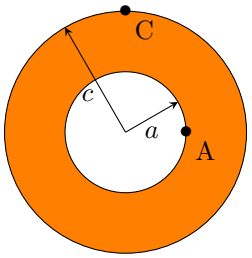
(a) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\cdot\vec{e_x} > 0$ (c) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C})\cdot\vec{e_x} = 0$ (e) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\cdot\vec{e_y} = 0$
(b) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\cdot\vec{e_x} < 0$ (d) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\cdot\vec{e_y} > 0$ (f) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C})\cdot\vec{e_y} < 0$

.....

b) Calculer $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\|$ .....

Entraînement 15.3 — Tuyau en cuivre.

On considère un tuyau cylindrique en cuivre d'axe (Oz) et de conductivité thermique $\lambda = 400\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ séparant deux fluides de températures différentes.



En régime stationnaire, la température de la face interne contenant A est $T_\mathrm{A} = 20\,°\mathrm{C}$ et celle de la face externe contenant C est $T_\mathrm{C} = 10\,°\mathrm{C}$. Le profil de température est alors, en coordonnées cylindriques,

$$T(r) = T_\mathrm{A} + \frac{T_\mathrm{C} - T_\mathrm{A}}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

Les distances à l'axe sont $a = 2$ cm et $c = 4$ cm.
Le vecteur densité de courant thermique en un point M est noté $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{M})$.

On donne $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r,\theta,z) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$ en coordonnées cylindriques.

a) La direction de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})$ est

(a) $\vec{e_z}$ (b) $\vec{e_r}$ (c) $\vec{e_\theta}$

.....

b) La direction de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})$ est

(a) $\vec{e_z}$ (b) $\vec{e_r}$ (c) $\vec{e_\theta}$

.....

c) Donner le sens de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})$.

.....

d) Donner le sens de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})$.

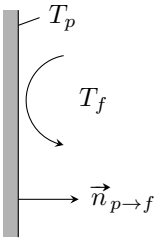
.....

e) Calculer $\|\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})\|$ .....

f) Calculer $\|\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})\|$ .....

Transferts thermiques conducto-convectifs

On considère une paroi solide fixe de température T_p en contact avec un fluide en mouvement de température différente T_f.



Les transferts thermiques de la paroi vers le fluide peuvent être modélisés par la loi de Newton donnant le vecteur densité de courant thermique conducto-convectif

$$\vec{\jmath}_\mathrm{cc} = h(T_p - T_f)\vec{n}_{p\to f}$$

où h est nommé coefficient de transfert conducto-convectif.

La puissance transférée par la paroi Σ au fluide est $P_{p\to f} = \iint_\Sigma \vec{\jmath}_\mathrm{cc} \cdot \mathrm{d}S\vec{n}_{p\to f}$.

On rappelle que la résistance thermique R_th est le rapport entre la différence de température $T_1 - T_2$ entre deux isothermes et la puissance thermique $P_{1\to 2}$ transférée. Elle vérifie :

$$R_\mathrm{th} = \frac{T_1 - T_2}{P_{1\to 2}}.$$

Entraînement 15.4 — Unité ?

En quelle unité s'exprime h ? .....

Entraînement 15.5 — Puissance échangée par conducto-convection.

a) La résistance thermique conducto-convective associée à une interface de surface S est

(a) hS
(b) $\dfrac{1}{hS}$
(c) $\sqrt{hS}$
(d) $\sqrt{\dfrac{1}{hS}}$

.....

b) Un toit plat d'immeuble a une surface de $50\,\mathrm{m}^2$. La température de l'air extérieur est de $25\,°\mathrm{C}$ et le coefficient de transfert conducto-convectif est $h = 20$ USI.

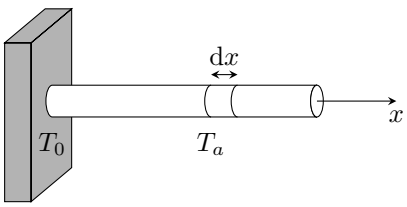
La puissance cédée par conducto-convection par le toit à l'air extérieur vaut $40\,\mathrm{kW}$.

Calculer la température de la face du toit en contact avec l'air extérieur.

.....

Entraînement 15.6 — Ailette de refroidissement.

Une tige conductrice cylindrique de rayon a, de section $S = \pi a^2$, de longueur $L \gg a$, de conductivité thermique λ est en contact en $x = 0$ avec un corps solide de température T_0 stationnaire. Cette tige est en contact avec l'air de température T_a stationnaire.



a) L'élément de volume $S\,\mathrm{d}x$ de la tige situé entre x et $x + \mathrm{d}x$ reçoit une puissance de la part de l'air égale à

(a) $h(T_a - T(x))S$
(b) $h(T(x) - T_a)S$
(c) $h(T_a - T(x))2\pi a\,\mathrm{d}x$
(d) $h(T(x) - T_a)2\pi a\,\mathrm{d}x$

.....

b) En posant $b = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$, on montre que $T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\mathrm{e}^{-x/b}$.

Exprimer la puissance thermique P_0 reçue par la tige en $x = 0^+$ en fonction de λ, a, b, T_0 et T_a.

.....

Rayonnement thermique

Un corps noir de température T émet un rayonnement de puissance surfacique φ donné par la loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$ où σ est la constante de Stefan donnée dans les prérequis de la fiche.

Entraînement 15.7 — Le Soleil rayonne.

Le Soleil de rayon $R_\odot = 696 \times 10^3$ km, rayonne comme un corps noir de température $T_S = 5\,772$ K.

a) Calculer la puissance surfacique $\varphi_\odot$ à la surface du Soleil .....

b) Calculer la puissance $P_\odot$ émise par le Soleil .....

c) La puissance radiative traversant une sphère de centre S (centre du Soleil) et de rayon $r > R_\odot$ ne dépendant pas de r, la puissance surfacique radiative $\varphi(r)$ est

(a) $\varphi_\odot$ (b) $\varphi_\odot \dfrac{R_\odot}{r}$ (c) $\varphi_\odot \left(\dfrac{R_\odot}{r}\right)^2$ (d) $\varphi_\odot \left(\dfrac{r}{R_\odot}\right)^2$

.....

d) La distance Soleil-Terre est $D_{\text{ST}} = 150 \times 10^6$ km. La puissance surfacique du rayonnement solaire reçu par la Terre est (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)

(a) $1{,}4 \times 10^1$ (b) $1{,}4 \times 10^2$ (c) $1{,}4 \times 10^3$ (d) $1{,}4 \times 10^4$

.....

Entraînement 15.8 — Radiateur convecto-radiatif.

On étudie un radiateur de chauffage central dont la température de surface est $T_s = 60\,°\text{C}$ en contact avec l'air ambiant de température $T_a = 20\,°\text{C}$. On note S l'aire de l'interface radiateur-air.

Le radiateur et l'air rayonnent comme des corps noirs de températures respectives T_s et T_a. Seuls les échanges thermiques entre le radiateur et l'air sont pris en compte.

a) La puissance cédée par le radiateur à l'air par rayonnement est

(a) $\sigma\left(T_a^4 - T_s^4\right)S$ (c) $\sigma\left(T_a^4 + T_s^4\right)S$

(b) $\sigma\left(T_s^4 - T_a^4\right)S$ (d) nulle

.....

b) En notant $h = 10\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre le radiateur et l'air, la puissance cédée par le radiateur à l'air par conducto-convection est

(a) $h(T_a - T_s)S$ (c) $h(T_a + T_s)S$

(b) $h(T_s - T_a)S$ (d) nulle

.....

c) Calculer la surface S d'un radiateur fournissant une puissance totale de 1,0 kW à l'air.

.....

Équation de la diffusion thermique

Entraînement 15.9 — Dimension du coefficient de diffusivité thermique.

Dans un matériau solide de diffusivité D, le champ de température $T(\mathrm{M},t)$ en un point M à un instant t vérifie l'équation de la diffusion thermique $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T$.

Quelle est la dimension physique de D ? .....

Entraînement 15.10 — Échelles de longueur et de temps associées.

Les variations du champ de température $T(\mathrm{M},t)$ au sein d'un matériau homogène de diffusivité D sont caractérisées par une longueur caractéristique L et une durée caractéristique τ.

a) Quelle proposition est correcte ?

(a) $\tau = \dfrac{L}{D}$ (b) $\tau = \dfrac{L}{D^2}$ (c) $\tau = \dfrac{L^2}{D}$ (d) $\tau = \dfrac{D}{L^2}$

.....

Un œuf de poule a une longueur comprise entre 5 et 6 cm et une masse entre 60 et 70 g alors qu'un œuf d'autruche a une longueur entre 15 et 20 cm et pèse environ 1,6 kg.

b) Sachant que la cuisson à la coque d'un œuf de poule dure 4 minutes, cuire un œuf d'autruche à la coque nécessite environ

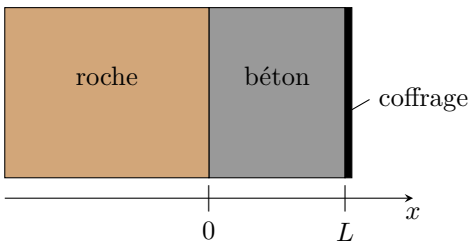
(a) 12 min (b) 36 min (c) 72 min (d) 400 min

.....

Entraînement 15.11 — Prise en masse d'un mur de béton.

Un mur de béton est coulé entre une paroi rocheuse de température stationnaire $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ et un coffrage métallique maintenu à la température $T_1 = 10\,^\circ\mathrm{C}$.

Le mur de béton est d'épaisseur $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$. La prise en masse du béton est le siège d'une réaction chimique exothermique dégageant une puissance volumique p_v.



En régime stationnaire, la température $T(x)$ à l'abscisse x vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{p_v}{\lambda}$.

a) Exprimer le profil de température $T(x)$ dans le béton.

b) La température est maximale à l'abscisse $x_1 = 3L/10$. L'expression de p_v est

(a) $3\lambda L(T_0 - T_1)$ (c) $5\lambda L(T_0 - T_1)$
(b) $\dfrac{3\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$ (d) $\dfrac{5\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$

.....

c) Calculer p_v .....

Entraînement 15.12 — Fusible en régime stationnaire.

Un câble métallique cylindrique d'axe (Ox), de rayon a, de section $S = \pi a^2$, de longueur L, de conductivité thermique λ et de conductivité électrique γ, est parcouru par un courant électrique d'intensité I stationnaire. Les deux extrémités en $x = \pm\dfrac{L}{2}$ sont maintenues à la même température T_0.

Lorsque ce câble est latéralement calorifugé, la température $T(x)$ à l'abscisse x vérifie, en régime stationnaire, l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I^2}{\lambda\gamma S^2}.$$

a) Exprimer le profil de température $T(x)$ dans le câble.

.....

b) Quelle est l'abscisse du lieu où la température est extrémale ?

.....

c) Donner l'expression de cette température extrémale.

.....

On note $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}(x)$ le vecteur densité de courant thermique de conduction à l'abscisse x.

d) Quelles propositions sont vraies ?

(a) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} > 0$ (c) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} > 0$

(b) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} < 0$ (d) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} < 0$

.....

Associations de résistances thermiques

Deux conducteurs thermiques (1) et (2) sont en *association série* lorsque la puissance thermique traverse le conducteur (1) puis le conducteur (2) avec une surface de jonction isotherme. La résistance thermique équivalente R_{th} est alors la somme des résistances thermiques de chaque conducteur.

$$R_{\mathrm{th}} = R_{\mathrm{th},1} + R_{\mathrm{th},2}$$

Deux conducteurs thermiques (1) et (2) en *association parallèle* ont des faces communes à la même température : ils sont donc soumis à la même différence de température. La conductance thermique G_{th} équivalente est alors la somme des conductances thermiques de chaque conducteur.

$$G_{\mathrm{th}} = \frac{1}{R_{\mathrm{th}}} = G_{\mathrm{th},1} + G_{\mathrm{th},2}$$

Entraînement 15.13 — Mur de béton.

On considère un mur en béton d'épaisseur $e = 30$ cm, de hauteur $h = 2{,}5\,\text{m}$ et de longueur $L = 10$ m.

Les deux faces verticales isothermes de ce mur sont en contact avec l'air et sont à des températures différentes T_1 et T_2.

Lorsque $|T_1 - T_2| = 10$ K, la puissance thermique traversant le béton est $P = 1{,}0\,\text{kW}$.

On rappelle que la résistance thermique d'un matériau de même géométrie que ce mur est

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

où e est l'épaisseur, S l'aire des sections isothermes et λ la conductivité thermique du matériau.

La résistance thermique R_{th} est le rapport entre la différence de température $T_1 - T_2$ entre deux isothermes et la puissance thermique $P_{1\to2}$ transférée

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{P_{1\to2}}.$$

a) Calculer la résistance thermique de conduction du mur .....

b) Calculer la conductivité thermique λ_1 du béton .....

On isole ce mur avec une plaque de polystyrène de conductivité $\lambda_2 = 4{,}0 \times 10^{-2}\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ afin que la puissance thermique traversant le mur isolé soit divisée par 5 pour le même écart de température $|T_1 - T_2|$.

c) Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire. .....

Entraînement 15.14 — Ouverture dans un mur.

On considère un mur de surface S_m et de conductance thermique G_m. On souhaite percer ce mur afin d'installer une fenêtre de surface S_f et de conductance thermique G_f. On rappelle que la conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique : $G = \lambda S/e$ pour un matériau de conductivité thermique λ, d'épaisseur e et de section S.

a) La conductance thermique G'_m du mur percé (mur seul après installation de la fenêtre) est

(a) $\dfrac{S_m - S_f}{S_m} G_m$ (b) $\dfrac{S_f}{S_m} G_m$ (c) $G_m - G_f$ (d) G_m

.....

b) La conductance thermique G du dispositif (mur et fenêtre) après installation de la fenêtre est

(a) $G_m + G_f$

(b) $\dfrac{G_m G_f}{G_m + G_f}$

(c) $G_m\left(1 - \dfrac{S_f}{S_m}\right) + G_f$

(d) $\dfrac{G_m S_m + G_f S_f}{S_m + S_f}$

.....

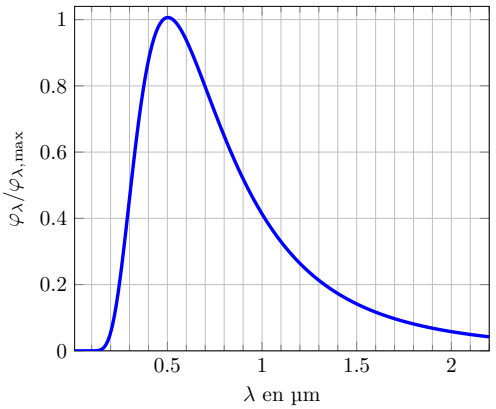
Encore un peu de rayonnement thermique

Un corps noir de température T émet un rayonnement de puissance surfacique φ donné par la loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$ où σ est la constante de Stefan donnée dans les prérequis de la fiche.

Entraînement 15.15 — Loi de Wien.

Le Soleil émet un rayonnement à large spectre. La figure ci-contre donne le graphe du flux surfacique spectral normalisé en fonction de la longueur d'onde.

On considère le Soleil comme un corps noir.



a) Mesurer la longueur d'onde λ_m correspondant au flux surfacique spectral maximal .....

b) D'après la loi de Wien, on a $\lambda_m T = 2\,898\,\mu\text{m}\cdot\text{K}$.

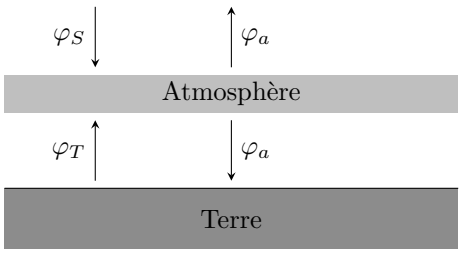
Calculer la température de surface du Soleil. .....

c) Le corps humain a une température de 310 K. En le considérant comme un corps noir, quelle est la longueur d'onde λ'_m de son rayonnement maximal ? .....

Entraînement 15.16 — Température de l'atmosphère terrestre.

L'atmosphère est modélisée par un corps noir rayonnant une puissance surfacique φ_a. Le rayonnement solaire à l'entrée de l'atmosphère terrestre a une puissance surfacique moyenne $\varphi_\odot = 342\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. L'atmosphère en absorbe la partie φ_S. L'atmosphère absorbe aussi la puissance surfacique φ_T provenant de la Terre.

On donne $\varphi_S = 70\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et $\varphi_T = 450\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.



a) À partir du bilan énergétique de l'atmosphère en régime stationnaire, la puissance surfacique φ_a est

(a) $\varphi_T + \varphi_S$
(b) $2(\varphi_T + \varphi_S)$
(c) $\dfrac{\varphi_T + \varphi_S}{2}$
(d) $\dfrac{\varphi_T - \varphi_S}{2}$

.....

b) Calculer la température de l'atmosphère T_a .....

Réponses mélangées

$5{,}8 \times 10^3\,\mathrm{K}$ (b) $9{,}35\,\mu\mathrm{m}$ $0{,}50\,\mu\mathrm{m}$ $65\,^\circ\mathrm{C}$ (b) $1{,}4 \times 10^5\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$

$T_0 + \dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}\dfrac{L^2}{8}$ $62{,}9\,\mathrm{MW \cdot m^{-2}}$ $\lambda\dfrac{\pi a^2}{b}(T_0 - T_a)$ $1{,}2\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$

(b) et (e) $1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ (c) (d) $\dfrac{p_v}{2\lambda}x(L-x) + (T_1 - T_0)\dfrac{x}{L} + T_0$

(b) $260\,\mathrm{K}$ (c) (c) (c) (b) (c) $2{,}9 \times 10^5\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$

$\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$ (c) (b) et (c) $\mathrm{L^2 \cdot T^{-1}}$ nul 0 Même sens que $\vec{e_r}$

$3{,}8 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$ $60\,\mathrm{W \cdot m^{-3}}$ $1{,}5\,\mathrm{m^2}$ $60\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ négatif positif

(b) $4{,}0\,\mathrm{cm}$ (a) $T_0 + \dfrac{I^2}{2\gamma\lambda S^2}\left(\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 - x^2\right)$ Même sens que $\vec{e_r}$ (b)

▶ Réponses et corrigés page 383

Tables et diagrammes thermodynamiques

Prérequis
Notions d'additivité et d'extensivité de fonctions d'état. Transition de phase.

Tables thermodynamiques

Entraînement 16.1 — Table à double entrée – Table de vapeur sèche.

La table ci-dessous liste les propriétés de la vapeur d'eau sèche.

Le volume massique v est exprimé en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$, l'enthalpie massique h en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$ et l'entropie massique s en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

p en kPa (T_{sat} en °C)		T en °C				
		100	150	200	250	300
100 (99,606)	v	1,696 0	1,936 7	2,172 5	2,406 2	2,638 9
	h	2 675,77	2 776,59	2 875,48	2 974,54	3 074,54
	s	7,361 0	7,614 7	7,835 6	8,034 6	8,217 1
200 (120,21)	v		0,969 89	1,080 5	1,198 9	1,316 2
	h		2 769,09	2 870,78	2 971,26	3 072,08
	s		7,280 9	7,508 1	7,710 0	7,894 0
500 (151,84)	v			0,425 03	0,474 43	0,522 60
	h			2 855,90	2 961,13	3 064,60
	s			7,061 1	7,272 6	7,461 4

a) En arrondissant le volume massique v à deux chiffres significatifs, calculer la masse volumique ρ en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{mL}^{-1}$ de la vapeur d'eau soumise à une pression de 200 kPa et à une température de 200 °C.

.....

b) Que vaut la température de saturation T_{sat} pour une pression de 200 kPa ?

(a) 200 °C
(b) 120,21 °C
(c) 99,606 °C
(d) 151,84 °C

.....

c) Quel est l'état d'équilibre du système à une température de 100 °C et soumis à une pression de 200 kPa ?

(a) état liquide
(b) état vapeur
(c) état diphasé

.....

Entraînement 16.2 — Table à unique entrée – Table de vapeur saturante.

Les propriétés de l'eau sous forme diphasée sont données dans la table de vapeur saturante ci-dessous :

T (°C)	p_{sat} (MPa)	Liquide saturant ①	②	③	Vapeur saturante ①	②	③
20	0,002 339	83,9	0,296 5	0,001 002	2 537,4	8,666 0	57,757
40	0,007 385	167,5	0,572 4	0,001 008	2 573,5	8,255 5	19,515
60	0,019 946	251,2	0,831 3	0,001 017	2 608,8	7,908 1	7,667 2
80	0,047 414	335,0	1,075 6	0,001 029	2 643,0	7,611 1	3,405 2
100	0,101 420	419,2	1,307 2	0,001 043	2 675,6	7,354 1	1,671 8

Les colonnes ①, ②, ③ sont respectivement exprimées en $\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, $\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ et $\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$.

À l'aide d'une analyse des unités, attribuer chaque colonne à une de ces trois grandeurs : volume massique v, enthalpie massique h et entropie massique s.

a) h ..... b) v ..... c) s .....

d) Exprimer la valeur de la pression de saturation p_{sat} à 100 °C en millimètres de mercure (mmHg) en sachant que 1 mmHg = 133,3 Pa .....

e) Le volume massique de l'eau contenue dans un ballon d'eau chaude à 60 °C est de $v = 1{,}03\,\mathrm{cm^3/g}$. Quel est l'état du système : liquide, diphasé ou vapeur ? .....

Déterminer, par une lecture de la table à 60 °C, la valeur du volume massique de liquide saturant v_l et celle du volume massique de vapeur saturante v_g.

f) v_l ..... g) v_g .....

h) Le théorème des moments donne la fraction massique de vapeur d'un mélange diphasé : $x_g = \dfrac{v - v_l}{v_g - v_l}$.

En raisonnant en terme d'ordres de grandeur, laquelle des propositions ci-dessous correspond à une approximation raisonnable de l'expression de x_g si $v = 1{,}03\,\mathrm{cm^3/g}$ à 60 °C ?

(a) v/v_l (b) v_l/v_g (c) v/v_g

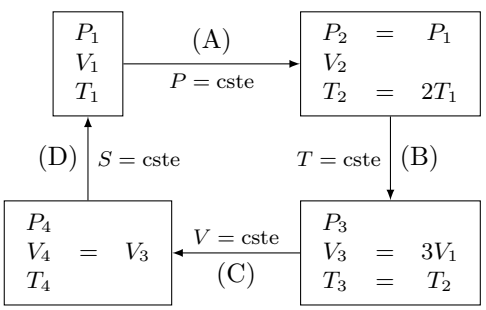
.....

Diagramme de Clapeyron *P-v* et diagramme de Watt *P-V*

Entraînement 16.3 — Schéma synoptique d'un cycle thermodynamique.

Soit n moles de gaz parfait qui décrivent le cycle ci-contre.

Attribuer aux transformations trois des quatre adjectifs suivants : isobare, adiabatique, isochore, isotherme.



a) Transformation (A) .....

b) Transformation (B) .....

c) Transformation (C) .....

d) À l'aide de la relation $PV = nRT$, exprimer V_2 en fonction de V_1 .....

Entraînement 16.4 — Un cycle dans le diagramme *P-V*.

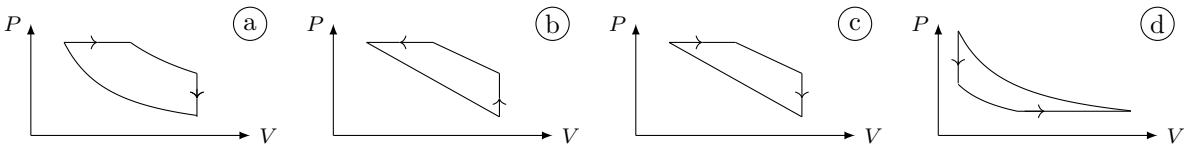
Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **16.3**.

Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle de ces relations est valable pour la transformation (B) ?

(a) $\dfrac{P}{V} = \text{cste}$ (b) $PV = \text{cste}$ (c) $P^\gamma V^\gamma = \text{cste}$ (d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.

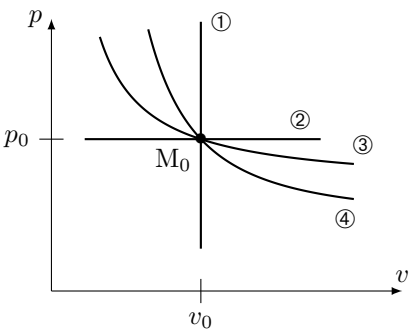


c) Sachant que le travail des actions de pression reçu au cours du cycle est $W = \oint_{\text{cycle}} -P\,\mathrm{d}V$, déterminer laquelle de ces affirmations est correcte.

(a) $W > 0$ donc le cycle est récepteur.
(b) $W < 0$ donc le cycle est récepteur.
(c) $W = 0$ car la transformation est un cycle.
(d) $W < 0$ donc le cycle est moteur.

Entraînement 16.5 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme *p-v*.

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme (p, v) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0 ayant pour coordonnées la pression p_0 et le volume massique v_0.

Pour un gaz parfait,

- l'équation d'état massique est : $pv = rT$ avec $r = R/M$ la constante massique des gaz parfaits ;
- une des lois de Laplace dans le cas d'une transformation adiabatique réversible est $pv^\gamma = \text{cste}$ avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial p}{\partial v}$ au point M_0 pour chaque courbe iso en fonction de p_0, v_0 et γ :

a) iso-p ..... c) iso-v .....

b) iso-T ..... d) iso-s .....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point M_0, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① ..... g) ③ .....

f) ② ..... h) ④ .....

Diagramme entropique T-s

Entraînement 16.6 — Courbes isobares d'un diagramme $T-s$.

La 2ème identité thermodynamique est : $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. La seconde loi de Joule énonce que $\mathrm{d}h = c_P\,\mathrm{d}T$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(s)$ le long d'une courbe isobare.

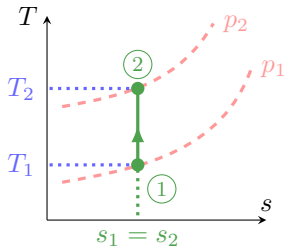
.....

b) En déduire l'expression de $T(s)$ vérifiée le long d'une courbe isobare parmi les relations suivantes :

(a) $T_0\cos(\omega s+\varphi)$ (b) $T_0\exp\left(\dfrac{s-s_0}{c_p}\right)$ (c) $T_0\exp\left(\dfrac{s_0-s}{c_p}\right)$ (d) $T_0\cos(s/c_p)$

.....

La suite vise à déterminer la position relative de deux courbes isobares. Pour cela, la compression isentropique d'un gaz parfait, passant d'un état (1) à un état (2), est représentée par un trait plein dans le diagramme $T-s$ ci-contre. Les courbes en pointillés représentent deux courbes isobares p_1 et p_2.



c) La transformation vérifie une des lois de Laplace : $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cste}$. En déduire laquelle des relations suivantes est une expression de p_2 valide ?

(a) $p_1^{1-\gamma}\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}$ (b) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ (c) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$

.....

d) Sachant que $\gamma > 1$, que dire de la position relative d'une courbe isobare haute pression (HP) relativement à une courbe isobare basse pression (BP) ?

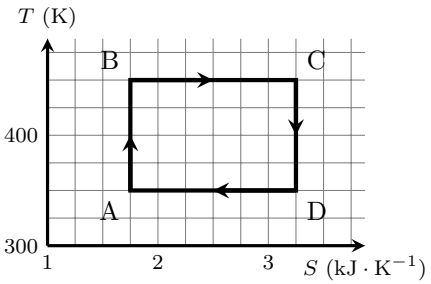
(a) Les HP sont au-dessus des BP. (b) Les HP sont en-dessous des BP.

.....

Entraînement 16.7 — Estimation d'un transfert thermique.

Les transformations étudiées ici sont réversibles si bien qu'un transfert thermique reçu entre un état I et un état F est $Q_{\mathrm{IF}} = \displaystyle\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}} T\,\mathrm{d}S$.

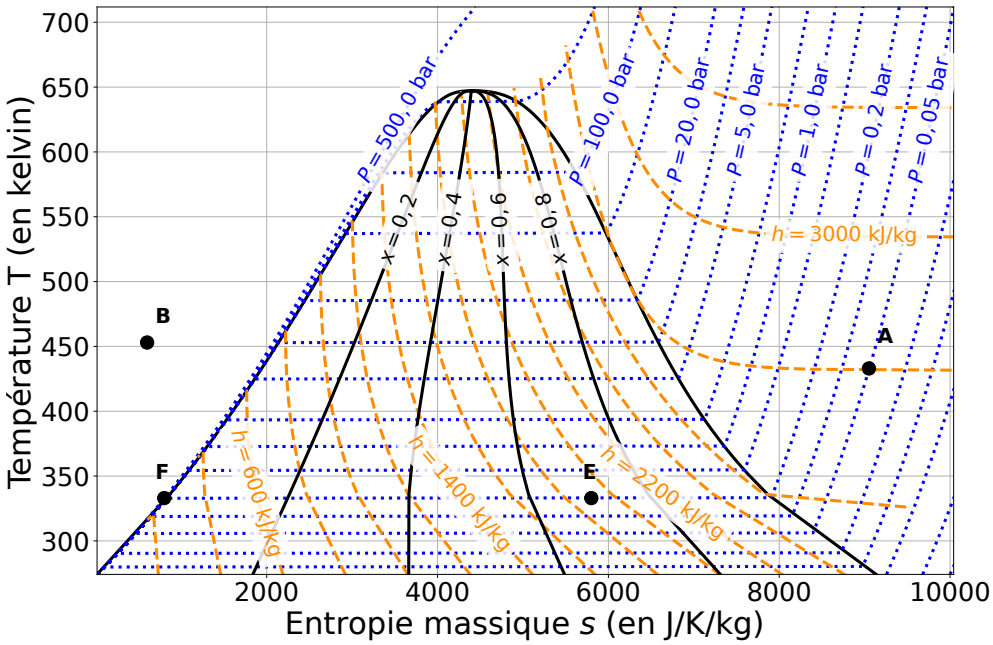
Estimer le transfert thermique reçu lors du cycle donné ci-contre.



(a) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 1{,}5\times10^{5}\ \mathrm{J}$
(b) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5\times10^{5}\ \mathrm{J}$
(c) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5\times10^{2}\ \mathrm{J}$
(d) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25\times10^{2}\ \mathrm{J}$
(e) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25\times10^{5}\ \mathrm{J}$
(f) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -2{,}25\times10^{2}\ \mathrm{J}$

.....

Entraînement 16.8 — Diagramme entropique de l'eau.



Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. Pour un liquide, cette loi s'écrit sous la forme $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$.

a) Quelles sont les propositions vraies au point A ?

(a) La pression est de 0,05 bar.
(b) L'enthalpie massique est de 2 800 J.
(c) Le corps pur est sous forme gazeuse et le modèle du gaz parfait est valable.
(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Quelles sont les propositions vraies au point B ?

(a) Le corps pur est sous forme liquide.
(b) Le corps pur est un mélange de liquide et de vapeur.
(c) La température est de 450 °C.
(d) L'entropie massique vaut $600\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

.....

c) Quelles sont les propositions vraies au point E ?

(a) Le titre massique en liquide est de 0,7.
(b) Le titre massique en vapeur est de 0,7.
(c) Le titre massique en liquide est de 0,3.
(d) L'enthalpie massique est de $1{,}9\times10^{3}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

.....

d) Quels termes est-il possible d'associer à la transformation d'un système passant de l'état E à l'état F ?

(a) vaporisation (b) fusion (c) liquéfaction (d) isobare

.....

e) Quelle est la valeur de l'entropie massique au point F ? .....

f) Déterminer à l'aide d'une lecture graphique la valeur de la variation d'entropie massique d'un système passant de l'état E à l'état F.

.....

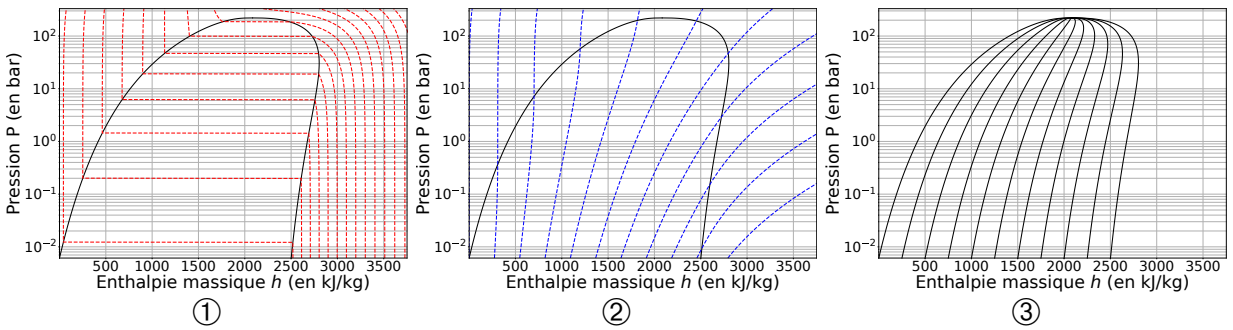
g) Déterminer à l'aide d'une lecture graphique la valeur de la variation d'enthalpie massique d'un système passant de l'état E à l'état F ?

.....

Diagramme des frigoristes *P-h*

Entraînement 16.9 — Réseaux de courbes.

Différents réseaux de courbes sont tracés dans les diagrammes *P-h* ci-dessous.



La 1ère et la 2ème identités thermodynamiques sont respectivement $\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Les phases condensées incompressibles et indilatables, dont l'équation d'état est $v = \text{cste}$, et les gaz parfaits vérifient les lois de Joule qui, écrites en relations différentielles, donnent $\mathrm{d}u = c_V\,\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.

Pour chacun des trois diagrammes, choisir quel adjectif parmi la liste suivante correspond au réseau de courbes tracé :

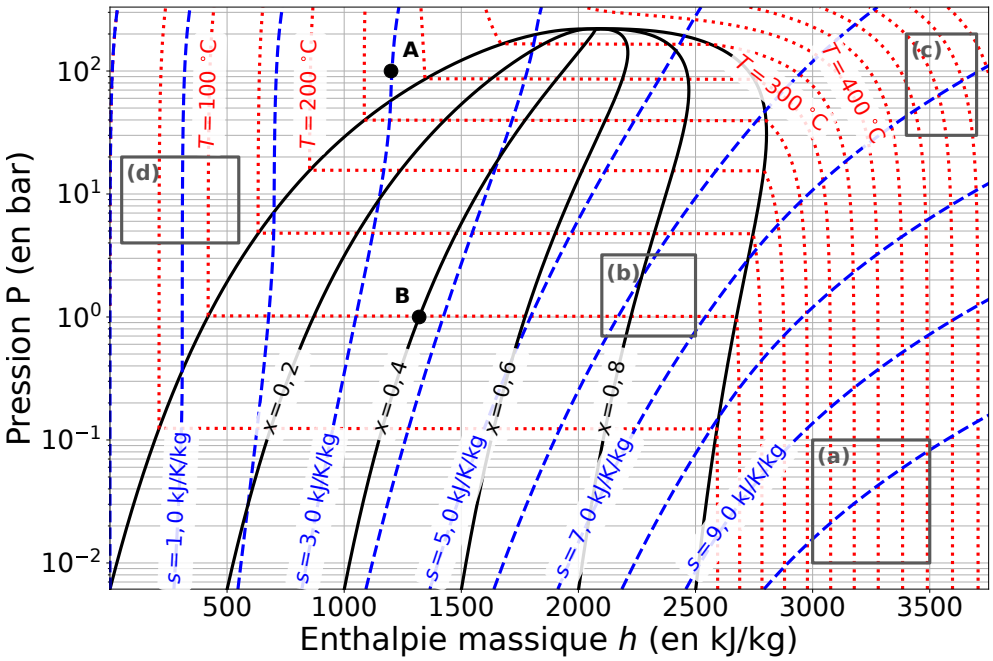
(a) isobare (b) isotherme (c) isotitre (d) isentrope (e) isenthalpe

a) Diagramme ① .....

b) Diagramme ② .....

c) Diagramme ③ .....

Entraînement 16.10 — Diagramme des frigoristes de l'eau.



a) Au point A, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de $1{,}00 \times 10^7$ Pa.
(b) La température est de 275 K.
(c) Le corps pur est sous forme gazeuse.
(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Au point B, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de 1 Pa.
(b) La température est de 100 °C.
(c) Le corps pur est sous forme de mélange diphasé contenant du liquide et de la vapeur.
(d) Le titre massique en liquide est de 0,6.

.....

c) Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. En déduire quelles sont les propositions valides en phase vapeur si le fluide est assimilé à un gaz parfait :

(a) Les courbes isothermes sont des segments horizontaux.
(b) Les courbes isothermes sont des demi-droites verticales.
(c) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isenthalpes.
(d) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isobares.

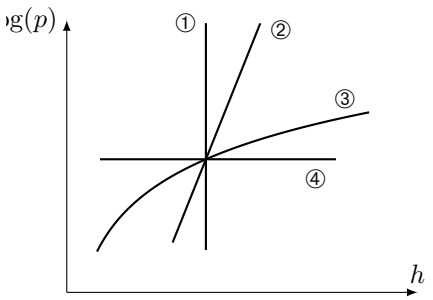
.....

d) En déduire dans quelle(s) zone(s) (a), (b), (c) ou (d) représentée(s) sur l'abaque le gaz peut-il être considéré comme un gaz parfait.

.....

Entraînement 16.11 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme $(\log(p), h)$.

Quatre courbes iso ont été tracées dans le diagramme $(\log(p), h)$ ci-contre. Le fluide étudié est assimilé à un gaz parfait qui vérifie l'équation d'état $pvM = RT$ et la 2nde loi de Joule $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.



a) Le long d'une courbe isochore, la pente est $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec A une constante. Exprimer A en fonction de R, M, c_p et v.

.....

Par une étude qualitative des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① ..... c) ② ..... d) ③ ..... e) ④ .....

Entraînement 16.12 — Vaporisation de l'eau.

Le diagramme des frigoristes de l'eau est donné ci-dessus, dans l'entraînement **16.10**.

a) À l'aide d'une analyse visuelle, c'est-à-dire sans lecture de valeurs ni calculs, utiliser la position du point B sous la courbe de saturation pour déterminer laquelle de ces propositions est valide.

On rappelle que l'échelle des abscisses est linéaire.

(a) Il y a davantage de liquide que de vapeur.
(b) Il y a davantage de vapeur que de liquide.
(c) Il y a autant de vapeur que de liquide.
(d) Il n'y a que du liquide.

.....

À l'aide de lectures graphiques, attribuer les valeurs de 2 650, 1 320, 420 et 1 000 $\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ aux enthalpies massiques caractérisant l'état du fluide au point B.

b) Enthalpie massique (moyenne) h_B du fluide diphasé : .....

c) Enthalpie massique $h_{\mathrm{v,B}}$ de la vapeur saturante : .....

d) Enthalpie massique $h_{\mathrm{l,B}}$ du liquide saturant : .....

e) Quelle est l'écriture correcte du théorème des moments donnant le titre en vapeur x_B désigne le titre vapeur à l'état B ?

(a) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_\mathrm{B}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (b) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_\mathrm{B} - h_{\mathrm{l,B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (c) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_\mathrm{B}}{h_{\mathrm{l,B}} - h_{\mathrm{v,B}}}$ (d) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_{\mathrm{l,B}} - h_\mathrm{B}}{h_\mathrm{B} - h_{\mathrm{v,B}}}$

.....

f) En déduire la valeur du titre vapeur au point B en prenant $2230 \approx 2250$ .....

g) Par analyse de la forme de la courbe de saturation, comment évolue l'enthalpie de vaporisation $\Delta_\mathrm{vap}h = h_\mathrm{v} - h_\mathrm{l}$ lorsque la pression augmente ?

(a) elle reste constante (b) elle diminue (c) elle augmente

.....

Encore plus de tables thermodynamiques

Entraînement 16.13 — Volume massique d'une vapeur sèche.

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur sèche de l'entraînement **16.1**.

a) Si R est la constante des gaz parfaits exprimée en $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ et M la masse molaire, quelle est l'unité usuelle de $r = R/M$?

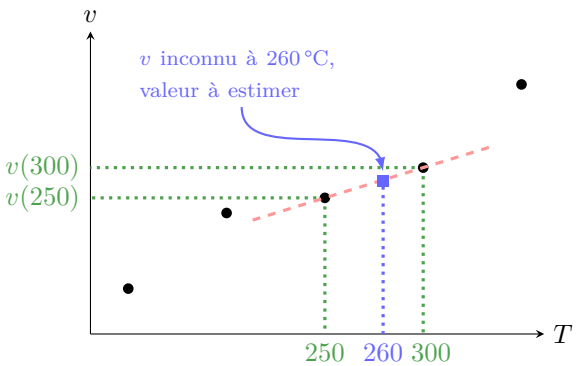
(a) $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot g^{-1}}$ (b) $\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ (c) $\mathrm{kg \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

b) Laquelle des expressions suivantes est l'équation d'état des gaz parfaits « massique » si v est le volume massique, p la pression, T la température et r la constante massique des gaz parfaits ?

(a) $pvr = T$ (b) $pv = T/r$ (c) $pv = r/T$ (d) $pv = rT$

c) À l'aide de l'équation d'état massique des gaz parfaits où $r = R/M = 0{,}46\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ pour l'eau, estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa.

L'objectif de ce qui suit est d'évaluer le volume massique d'une vapeur sèche à 260 °C à partir des valeurs connues du volume massique à 250 °C et 300 °C. Pour cela, il est supposé que la représentation graphique du volume massique en fonction de la température est une droite passant par les points 250 °C et 300 °C.



d) Quelle expression permet d'estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa ?

(a) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (300 - 250)$

(b) $v(260) = \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

(c) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 260} \times (250 - 260)$

(d) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

e) En déduire une estimation numérique de la valeur de $v(T = 260\,°\mathrm{C}, p = 100\,\mathrm{kPa})$.

Entraînement 16.14 — Transfert thermique avec changement d'état.

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur saturante de l'entraînement **16.2**.

a) Quelle est l'enthalpie h_g de la vapeur saturante soumise à une pression 1,0142 bar ?

.....

b) Quelle est l'enthalpie h_ℓ du liquide saturant à une température de 100 °C ? .....

De l'eau, contenant initialement 90% de vapeur, subit une liquéfaction totale sous une pression de 1,0142 bar au sein d'un condenseur sans parties mobiles.

c) Quelle relation permet de calculer l'enthalpie initiale h_i du mélange diphasé ?

(a) $h_i = 10\,h_\ell + 90\,h_g$ (c) $h_i = 0,10\,h_\ell + 0,90\,h_g$

(b) $h_i = 0,10\,h_\ell - 0,90\,h_g$ (d) $h_i = 0,90\,h_\ell + 0,10\,h_g$

.....

d) Calculer le transfert thermique massique q reçu par le fluide en utilisant le 1er principe industriel qui établit que $q = h_f - h_i$ avec h_f l'enthalpie massique du fluide après liquéfaction totale.

.....

Et encore plus de diagrammes thermodynamiques

Entraînement 16.15 — Un cycle dans le diagramme (V,T).

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **16.3**.

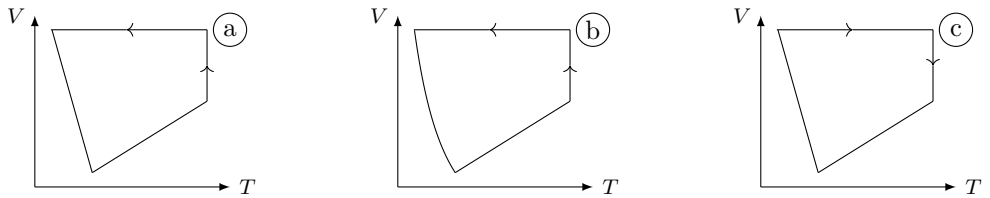
Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

(a) $\dfrac{T}{V} = \text{cste}$ (b) $TV = \text{cste}$ (c) $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$ (d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

.....

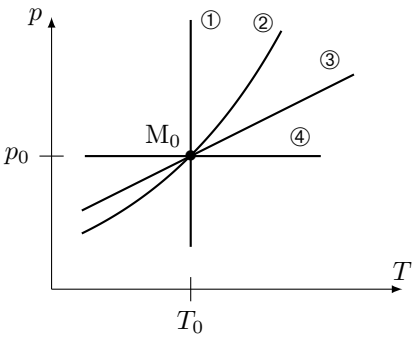
b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.



.....

Entraînement 16.16 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (p,T).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme (p,T) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0.

Pour un gaz parfait,

- l'équation d'état est : $pv = rT$;
- une des lois de Laplace dans le cas d'une transformation isentropique : $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}$ avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

a) Que dire de la pente $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ de la courbe isochore $v = v_0$ passant par le point M_0 ?

(a) Elle est décroît avec T. (b) Elle est constante avec T. (c) Elle est croît avec T. ☐

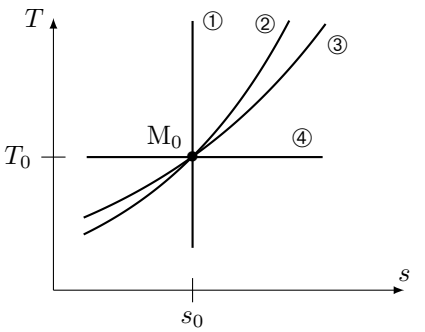
À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① . ☐ c) ② . ☐ d) ③ . ☐ e) ④ . ☐

Entraînement 16.17 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (T,s).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-dessous dans le diagramme (T,s) d'un gaz parfait.

Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0 ayant pour coordonnées la température T_0 et l'entropie massique s_0.



Pour rappel, le coefficient adiabatique est défini comme le rapport de la capacité thermique (massique) par la capacité thermique à volume constant : $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ avec $\gamma > 1$.

De plus, pour un gaz parfait, les points de la courbe isobare vérifient la relation $T(s) = T_\text{a} \text{e}^{s/c_p}$ quand ceux de la courbe isochore vérifient la relation $T(s) = T_\text{b} \text{e}^{s/c_v}$ avec T_a et T_b des constantes.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial T}{\partial s}$ au point M_0 pour chaque courbe iso en fonction de T_0, c_v et c_p :

a) iso-p ..... ☐ c) iso-v ..... ☐

b) iso-T ..... ☐ d) iso-s ..... ☐

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point M_0, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① . ☐ f) ② . ☐ g) ③ . ☐ h) ④ . ☐

Entraînement 16.18 — Un cycle dans le diagramme (P,T).

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **16.3**.

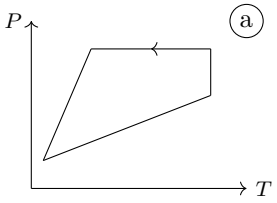
Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

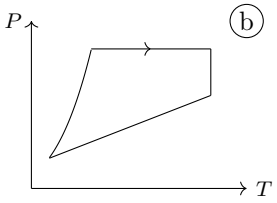
(a) $PT = \text{cste}$ (b) $P^\gamma T^{\gamma-1} = \text{cste}$ (c) $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$ (d) $\dfrac{P}{T} = \text{cste}$

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.

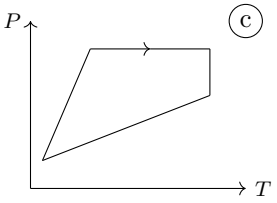
(a)



(b)



(c)



Entraînement 16.19 — Compression : irréversibilités et élévation de température.

Du fluide R718 se trouve à l'entrée d'un compresseur sous une pression de 250 mbar à 100 °C (état I).

a) En plaçant le point I dans le diagramme des frigoristes de l'entraînement **16.10**, déterminer la valeur de l'enthalpie massique initiale h_I .....

b) Dans quel état se trouve le fluide à l'état I ?

(a) liquide saturant (b) vapeur saturante (c) vapeur sèche (d) mélange diphasé

c) Quelle est la valeur de l'entropie s_I du fluide à l'état I ? .....

d) Le fluide est comprimé de manière adiabatique et réversible ($s_\text{I} = s_\text{F}$) jusqu'à la pression $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$ par le compresseur qui fournit le travail $w = h_\text{F} - h_\text{I}$. Calculer w en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .....

e) Quelle est la température finale T_F du fluide après compression réversible ? .....

f) Le fluide est désormais comprimé à $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$ de manière irréversible si bien que son entropie a augmenté de 6%. En plaçant le point F′ entre deux courbes isentropes, déterminer la valeur de la température finale $T_{\text{F}'}$ .....

g) L'augmentation de la température du fluide est due à sa compression, mais aussi aux irréversibilités qui ont lieu lors de celle-ci. Laquelle de ces relations permet d'évaluer la proportion de l'élévation de température strictement due aux irréversibilités par rapport à l'élévation totale de température $T_{\text{F}'} - T_\text{I}$?

On rappelle que, pour une quantité $X_{tot} = X_1 + X_2$, la proportion ***relative*** *de X_1 au sein de X_{tot} s'exprime comme X_1/X_{tot}.*

(a) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_{\text{F}'} - T_\text{I}}$ (b) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_\text{I}}$ (c) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{I}}{T_{\text{F}'}}$ (d) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{I}}{T_\text{F} - T_\text{I}}$

Réponses mélangées

$1{,}017 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$ $7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg}$ (b) $-2\,031\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ isochore isotherme

(a), (d) (c) isentrope (c) (b) isotherme (a) $9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{g \cdot mL^{-1}}$

$2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$ (a) (b) isobare ∞ isochore (b) 760,8 mmHg

(a) isentrope $-5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ (a) (c) isobare (d) isobare

$-\dfrac{p_0}{v_0}$ (c) (c), (d) $1\,320\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ diphasé (a) (b) (a) $2V_1$

$-1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ ∞ $\dfrac{T_0}{c_p}$ isochore $8\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ (a), (c) isochore

(b) $2\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ 0 400 °C (b) $300\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ $\dfrac{T_0}{c_v}$ $2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$

(d) 250 °C isobare $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$ isochore $2\,680\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (b)

(a) $x_\mathrm{B} = 40\%$ (d) isobare 0 isentrope ① $\dfrac{R}{\ln(10) M v c_p}$

(b) et (c) (a), (d) isotherme isentrope isotherme isotherme

$-\gamma\dfrac{p_0}{v_0}$ (b) (c) (c) (b) ② $420\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ $800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

$419{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (b) (d) (b), (d) (b), (c), (d) $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ ③

▶ Réponses et corrigés page 387

Thermodynamique industrielle

Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer
⟶ *Thermodynamique*

Prérequis
Lois de Laplace. Principes sous forme industrielle. Diagramme (P, h).

Dans l'ensemble de la fiche, on se place en régime permanent.

Principes industriels

Entraînement 17.1 — Composants des machines thermiques.

En négligeant les variations d'énergie mécanique, les premier et second principes industriels par unité de masse s'écrivent

$$\Delta h = q + w_\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}\,, \tag{1}$$

où q est le transfert thermique massique, w_i est le travail indiqué massique, s_e est l'entropie massique échangée et s_c est l'entropie massique créée. Rappelons que l'entropie massique échangée avec un thermostat de température T_0 constante est égale à $s_\mathrm{e} = q/T_0$.

Pour chacun des composants suivants, on souhaite savoir comment ces deux principes se réécrivent.

Choisissez la bonne réponse à chaque fois.

a) Un compresseur fonctionnant de manière adiabatique réversible avec des pièces mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

b) Un échangeur thermique dans lequel le fluide se liquéfie (condenseur).

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

c) Un détendeur idéal calorifugé et sans pièce mobile.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

d) Une turbine idéale réalisant une détente adiabatique réversible au travers de parties mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

Entraînement 17.2 — Comparaison des formes énergies d'un système.

Un gaz de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, allant à la vitesse $v = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, traverse une turbine. La température du gaz diminue de 10 °C entre l'entrée et la sortie, où la différence d'altitude est de l'ordre du mètre. Toutes les énergies considérées sont massiques, c'est-à-dire exprimées par kg d'air.

a) Estimer la variation d'enthalpie du système constitué des gaz à l'intérieur de la turbine.

(a) $10\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (b) $50\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c) $10\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (d) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

b) Même question pour son énergie cinétique dans le cas extrême où la vitesse de sortie est nulle.

(a) $10\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (b) $10\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (d) $50\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$

c) Même question pour son énergie potentielle en prenant le champ de pesanteur terrestre $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

(a) $10\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (b) $50\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c) $10\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (d) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

d) Comparer les termes et indiquer celui qui prédomine.

(a) la variation d'enthalpie Δh
(b) la variation d'énergie cinétique Δe_c
(c) la variation d'énergie potentielle Δe_p
(d) les trois sont comparables

Entraînement 17.3 — Étude d'une tuyère.

L'air d'un réservoir $\mathcal{R}$ se détend dans une tuyère horizontale, isolée thermiquement du milieu extérieur, et ne contenant aucune pièce mobile. L'air est assimilable à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, d'indice adiabatique $\gamma = 1{,}4$ et de capacité thermique massique $c_p = \dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

L'air entre dans la tuyère avec une vitesse c_1 supposée négligeable, sous la pression p_1 à la température $T_1 = 273\,\text{K}$. Il en sort animé d'une vitesse c_2 sous la pression p_2 à la température $T_2 = 200\,\text{K}$.

a) Quelle est la forme du premier principe par unité de masse pour le système étudié ?

(a) $\Delta h + \Delta e_c = w_i$ (c) $\Delta h + \Delta e_c = 0$ (e) $\Delta h = q$
(b) $\Delta h + \Delta e_c = q$ (d) $\Delta h = w_i$ (f) $\Delta h = w_i + q$

b) En utilisant la deuxième loi de Joule, déterminer l'expression de la variation d'enthalpie massique Δh de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures T_1, T_2, de la masse molaire M de l'air, de γ et de la constante R des gaz parfaits.

c) En déduire l'expression de la vitesse c_2 d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures T_1, T_2, de la masse molaire M de l'air, de γ et de la constante R des gaz parfaits.

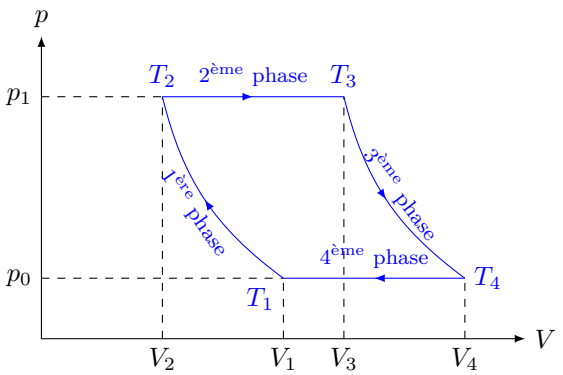
d) Calculer numériquement la vitesse c_2 d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en utilisant les données.

Modèle du gaz parfait : exemple d'un turbopropulseur

On considère un gaz parfait décrivant le cycle de Joule ci-dessous dans lequel la première et la troisième phases sont isentropiques.

La deuxième phase (combustion) et la quatrième phase (refroidissement) se font sans travail indiqué.

On néglige les variations d'énergies cinétique Δe_c et potentielle Δe_p.



Entraînement 17.4 — **Températures.**

a) En utilisant la loi de Laplace sous la forme $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte}$, exprimer le température T_2.

(a) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{1-2\gamma}$

(b) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

(c) $T_2 = T_1^\gamma \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)\gamma}$

(d) $T_2 = \left(\dfrac{T_1 p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

.....

b) En utilisant maintenant la forme $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$, exprimer T_4.

(a) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

(b) $T_4 = T_3^{1-\gamma} \dfrac{V_3}{V_4}$

(c) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1-\gamma}$

(d) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1/(\gamma-1)}$

.....

Entraînement 17.5 — Rendement.

Le cycle précédent est utilisé dans une machine, fonctionnant sans travail indiqué pendant la deuxième et la quatrième phase. La première phase est une compression, la troisième phase une détente. On les suppose isentropiques, donc adiabatiques réversibles. Les travaux sont algébriques, de signe positif lorsqu'ils sont réellement reçus par le fluide.

a) Indiquer si le cycle est moteur ou récepteur.

(a) moteur (b) récepteur

b) Quelle est l'expression du travail indiqué total reçu lors de ce cycle ?

(a) $w_1 + w_3$ (d) $-w_1 - w_3$ (g) $w_2 - w_4$
(b) $-w_1 + w_3$ (e) $w_2 + w_4$ (h) $-w_2 - w_4$
(c) $w_1 - w_3$ (f) $-w_2 + w_4$

c) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source chaude ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

d) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source froide ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

e) Quelle est l'expression du travail indiqué w_1 reçu dans la première phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

f) Quelle est l'expression du travail indiqué w_3 reçu dans la troisième phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

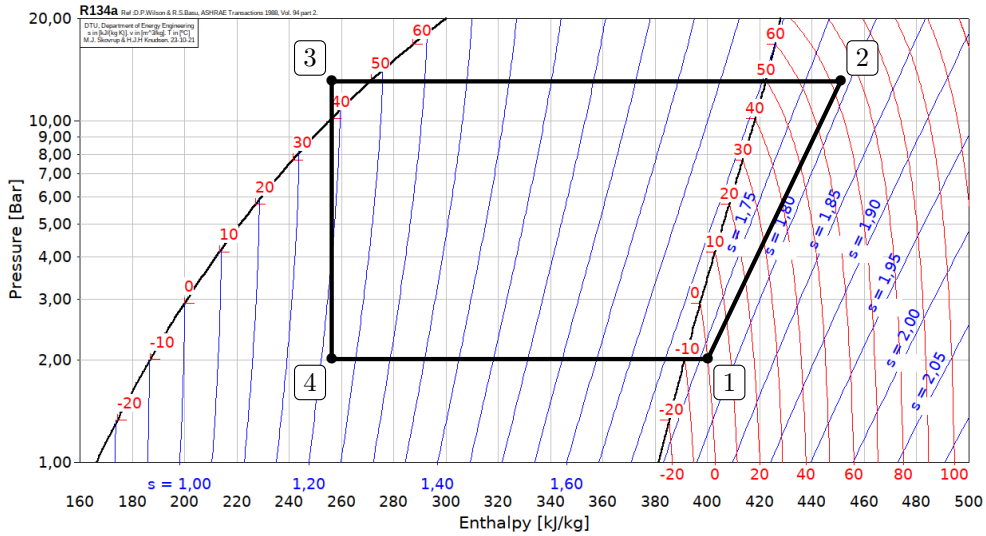
g) Exprimer le rendement de ce cycle moteur en fonction de w_1, w_3 et q_2.

h) Exprimer le rendement en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4.

Exploitation de diagrammes enthalpiques

Entraînement 17.6 — Efficacité d'une pompe à chaleur.

Considérons une pompe à chaleur dont le cycle est représenté ci-dessous.



a) Le fluide reçoit du travail dans le compresseur, ce qui a pour effet d'augmenter la pression ainsi que la température à une température supérieure à celle de la source chaude.

Quelle transformation du cycle correspond au compresseur ? .....

b) Calculer numériquement le travail massique algébrique w_{compr} reçu par le fluide dans le compresseur.

.....

c) L'échange avec la source chaude a lieu dans le condenseur, où le fluide se liquéfie totalement.

Quelle transformation du cycle correspond au condenseur ? .....

d) Calculer numériquement le transfert thermique algébrique q_{cond} reçu par le fluide dans le condenseur.

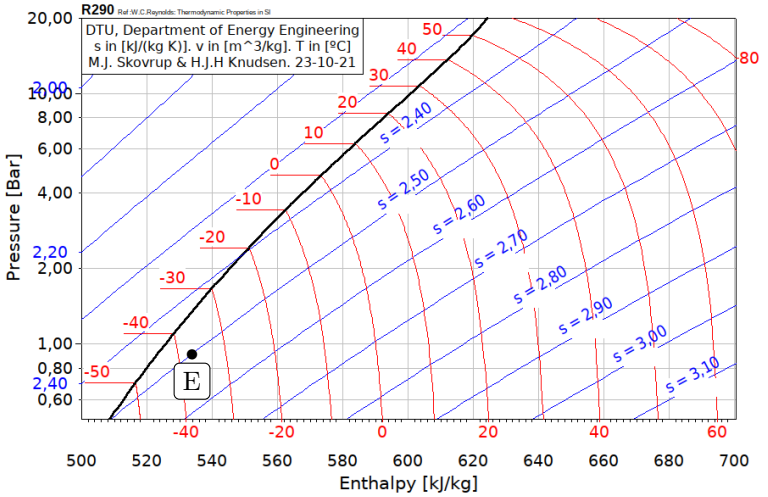
.....

e) Calculer l'efficacité de la machine $e = -\dfrac{q_{\text{cond}}}{w_{\text{compr}}}$ .....

Entraînement 17.7 — Rendement isentropique d'un compresseur.

Dans cet entraînement, on considère un compresseur adiabatique destiné à augmenter la pression d'une vapeur de propane de 1 à 10 bar.

Le fluide est dans l'état initial E indiqué sur le diagramme des frigoristes ci-dessous en entrée du compresseur, on note S son état de sortie. Les valeurs lues sur le diagramme seront données avec deux chiffres significatifs ; les entropies sont données en $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.



a) On suppose la compression réversible. Donner la valeur de $s_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie ....

b) Déterminer graphiquement la température du fluide $T_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie .....

c) Calculer le travail massique $w_{\mathrm{rév}}$ fourni à la vapeur .....

d) En réalité, la compression est irréversible, et la valeur de la température réelle en sortie du compresseur est $T_{\mathrm{S}} = 65\,°\mathrm{C}$. Déterminer le travail massique w réellement fourni lors du processus.

.....

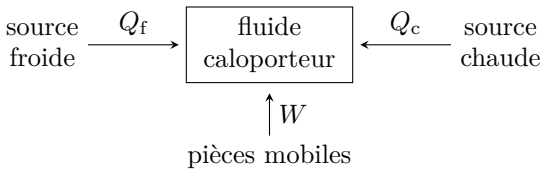
e) Calculer le rendement isentropique du compresseur $\eta = \dfrac{w_{\mathrm{rév}}}{w}$ .....

f) Calculer l'entropie massique créée lors de la compression .....

Autres entraînements

Entraînement 17.8 — Machines thermiques.

On donne ci-dessous le schéma conventionnel d'une machine ditherme, les énergies reçues par le fluide étant algébriques.



a) S'il s'agit d'un moteur, indiquer le signe de chaque transfert énergétique W, Q_f et Q_c.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

b) Comment le rendement est-il alors défini ?

(a) $-W/Q_c$ (c) $-Q_c/W$ (e) $-Q_f/W$
(b) $+Q_f/W$ (d) $+W/Q_f$ (f) $+W/Q_c$

.....

c) Même question pour un réfrigérateur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

d) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$ (d) $+W/Q_f$
(b) $+Q_f/W$ (e) $-Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$ (f) $+W/Q_c$

.....

e) Même question pour une pompe à chaleur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

f) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$ (c) $-Q_c/W$ (e) $-Q_f/W$
(b) $+Q_f/W$ (d) $+W/Q_f$ (f) $+W/Q_c$

.....

g) Même question pour un climatiseur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$ (d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$ (e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$ (f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

h) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$ (c) $-Q_c/W$ (e) $-Q_f/W$
(b) $+Q_f/W$ (d) $+W/Q_f$ (f) $+W/Q_c$

.....

Entraînement 17.9 — Échangeurs thermiques.

Les machines dithermes possèdent deux échangeurs thermiques : un condenseur, dans lequel le fluide se liquéfie, et un évaporateur, où il se vaporise.

a) Le fluide caloporteur d'une centrale thermique doit céder de l'énergie à l'environnement extérieur avant de retourner vers la chaudière. L'échangeur est-il un évaporateur ou un condenseur ?

.....

b) Le fluide caloporteur d'un réfrigérateur doit recevoir de l'énergie de la part du compartiment réfrigéré. S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

c) Le fluide caloporteur d'une pompe à chaleur doit céder de l'énergie dans une maison.

S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

Entraînement 17.10 — Mélangeur.

Un mélangeur calorifugé à deux entrées et une sortie fonctionne avec deux liquides identiques, de l'eau par exemple, de capacité thermique massique à pression constante c_p constante. Le premier fluide a un débit massique $D_{\mathrm{m}1}$ et une température T_1 tandis que le second a un débit massique $D_{\mathrm{m}2}$ et une température $T_2 < T_1$. En sortie, le débit massique du mélange est D_m et sa température T.

a) Exprimer la conservation du débit massique avec les données de l'exercice.

.....

b) En ne considérant que le sous-système « fluide 1 » qui reçoit de la part du fluide 2 le transfert thermique $q_{2\to1}$, déduire du premier principe industriel la relation entre $q_{2\to1}$, c_p, T_1 et T.

.....

c) Même question pour le sous-système « fluide 2 », en fonction de $q_{1\to2}$, c_p, T_2 et T.

.....

d) L'échange thermique est supposé parfait entre les deux liquides : $D_{\mathrm{m}1}\,q_{2\to1} + D_{\mathrm{m}2}\,q_{1\to2} = 0$. En déduire l'équation reliant les différents débits et températures.

.....

e) Exprimer la température T en sortie .....

f) Faire l'application numérique avec $T_1 = 80\,°\mathrm{C}$, $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$, $D_{\mathrm{m}1} = 3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et $D_{\mathrm{m}2} = 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et exprimer la température en degré celsius.

.....

Entraînement 17.11 — Étude d'une turbine.

À l'entrée d'une turbine horizontale, isolée thermiquement, de l'air possède une pression p_1, une température T_1, et une vitesse c_1. À la sortie, il a mêmes pression et température, sa vitesse est négligeable.

a) Simplifier le premier principe par unité de masse pour les écoulements en régime permanent.

(a) $\Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (c) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = 0$ (e) $\Delta h = q_\mathrm{e}$

(b) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (d) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ (f) $\Delta h = w_\mathrm{i} + q_\mathrm{e}$

.....

b) Exprimer le travail W_f récupéré sur l'arbre de la turbine pour le passage d'une masse m d'air.

(a) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}c_1^2$ (b) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}c_1^2$ (c) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}mc_1^2$ (d) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}mc_1^2$

.....

c) Déterminer la valeur numérique du travail échangé pendant 1 heure avec un débit de $0{,}5\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ en prenant $c_1 = 100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

.....

Entraînement 17.12 — Étude d'une pompe.

De l'eau liquide est refoulée à l'aide d'une pompe d'un point A vers un point B. Les vitesses à l'entrée et à la sortie sont négligeables de même que la variation d'altitude. En amont, l'eau est à pression $p_1 = 0{,}10\,\text{bar}$ et en aval à $p_2 = 20\,\text{bar}$. On suppose l'écoulement isentropique.

a) Indiquer les hypothèses à prendre en compte dans l'expression du bilan enthalpique.

(a) $q_\text{e} = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$
(b) $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$
(c) $\Delta h = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$
(d) $q_\text{e} = 0$, $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$

.....

b) Pour les écoulements en régime permanent appliqué à la pompe étudiée, comment s'écrit le premier principe, pour l'unité de masse de fluide ?

(a) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = w_\text{i}$
(b) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = q$
(c) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = 0$
(d) $\Delta h = w_\text{i}$
(e) $\Delta h = q$
(f) $\Delta h = w_\text{i} + q$

.....

c) En utilisant la deuxième identité thermodynamique $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$, exprimer la variation d'enthalpie Δh de l'eau en fonction des pressions p_1, p_2 et du volume massique v de l'eau.

.....

d) En déduire l'expression du travail indiqué massique w_i, en fonction du volume massique v et des pressions p_1 et p_2.

.....

e) Déterminer numériquement ce travail, en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .....

Réponses mélangées

$c_\text{p}(T - T_2) = q_{1\to2}$ (a) (f) $383\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ évaporateur $140\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
$1{,}99\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ $-200\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ $2{,}50\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ $1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$ (c) (a)
(c) $v(p_2 - p_1)$ $50\,^\circ\text{C}$ (a) (a) (a) $2 \to 3$ (c) (a) (d) (a)
$D_{\text{m}1} + D_{\text{m}2} = D_\text{m}$ (a) (a) $1 \to 2$ (d) (c) $c_\text{p}(T - T_1) = q_{2\to1}$ (c)
(b) $9 \times 10^6\,\text{J}$ (d) (a) (a) $c_2 = \sqrt{\dfrac{2}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}$ $T = \dfrac{D_{\text{m}1}T_1 + D_{\text{m}2}T_2}{D_m}$
(b) (a) $50\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ 4 $-\dfrac{w_1 + w_3}{q_2}$ (b) (a) $100\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
$\dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$ $D_{\text{m}1}(T - T_1) + D_{\text{m}2}(T - T_2) = 0$ condenseur (a) 0,78
(b) condenseur $110\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (d) $\Delta h = v(p_2 - p_1)$ $38\,^\circ\text{C}$ (d)

► Réponses et corrigés page 394

Signaux

Prérequis
Continuités imposées par les bobines et condensateurs.
Comportement des bobines et condensateur à HF et BF.

Pour bien commencer

Entraînement 18.1 — Un peu de calcul intégral.

Calculer les intégrales suivantes si $T = 2\pi/\omega$ est une constante homogène à un temps.

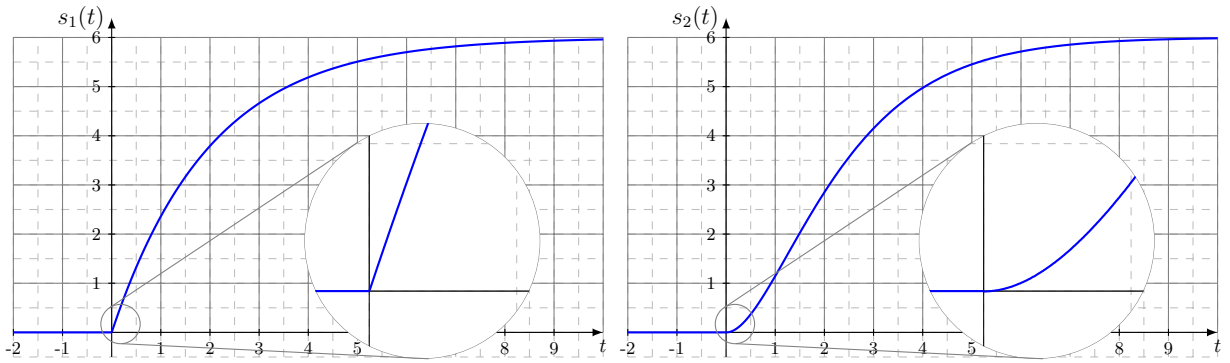
a) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ ..... c) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ .....

b) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t$ .....

Régimes transitoires

Entraînement 18.2 — Premier/second ordre.

Soit les deux courbes $s_1(t)$ et $s_2(t)$ respectivement à gauche et à droite sur la figure ci-dessous.



Parmi les propositions suivantes,

(a) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = 0$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

(e) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

(f) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

où $(\tau, \omega_0, Q, E) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$, laquelle correspond à

a) $s_1(t)$? ..... b) $s_2(t)$? .....

Entraînement 18.3 — Stabilité d'un système linéaire continu invariant.

Qualifier de « stable » ou d' « instable » les systèmes décrits par les équations différentielles suivantes. Les signaux s, r et v sont les signaux de sortie des systèmes étudiés tandis que le signal e est un signal d'entrée. Toute autre notation renvoie à des constantes strictement positives.

a) $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 s$ ..... b) $\tau\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = -e$ .....

$\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2 r = -g\cos\theta$ si $\theta > \pi/2$ .....

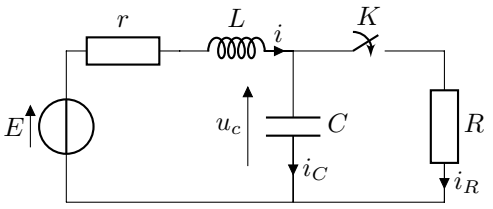
$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1 - H_0 A)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e$ si $H_0 A \leqslant 1$ .....

$\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}\left(RC - \dfrac{L}{r}\right)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}\left(1 - \dfrac{R}{r}\right)v = 0$ si $R > r$ et $R < \dfrac{L}{rC}$ .....

Entraînement 18.4 — Continuité (I).

On considère le circuit ci-contre. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On le ferme à l'instant $t = 0$.

Trois étudiants comparent leurs analyses de ce circuit à l'instant $t = 0^-$, l'instant $t = 0^+$ et lorsque $t \to +\infty$.



a) À $t = 0^-$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :
$i(0^-) = 0$
$i_R(0^-) = 0$
$i_C(0^-) = 0$
$u_C(0^-) = 0$

Étudiant ⓑ :
$i(0^-) = E/R$
$i_R(0^-) = 0$
$i_C(0^-) = E/R$
$u_C(0^-) = 0$

Étudiant ⓒ :
$i(0^-) = 0$
$i_R(0^-) = 0$
$i_C(0^-) = 0$
$u_C(0^-) = E$

b) À $t = 0^+$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :
$i(0^+) = 0$
$i_R(0^+) = E/R$
$i_C(0^+) = -E/R$
$u_C(0^+) = E$

Étudiant ⓑ :
$i(0^+) = E/R$
$i_R(0^+) = 0$
$i_C(0^+) = E/R$
$u_C(0^+) = 0$

Étudiant ⓒ :
$i(0^+) = 0$
$i_R(0^+) = E/R$
$i_C(0^+) = 0$
$u_C(0^+) = E$

c) À $t = +\infty$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :
$i(\infty) = E/(R+r)$
$i_R(\infty) = E/(R+r)$
$i_C(\infty) = 0$
$u_C(\infty) = \dfrac{R}{R+r}E$

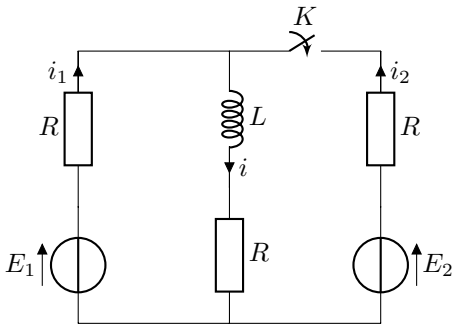
Étudiant ⓑ :
$i(\infty) = E/R$
$i_R(\infty) = E/R$
$i_C(\infty) = 0$
$u_C(\infty) = 0$

Étudiant ⓒ :
$i(\infty) = E/r$
$i_R(\infty) = E/R$
$i_C(\infty) = E/r - E/R$
$u_C(\infty) = E$

Entraînement 18.5 — Continuité (II).

On considère le circuit ci-dessous.

L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On le ferme à l'instant $t = 0$.



Trois étudiants comparent leurs analyses de ce circuit :

- à l'instant $t = 0^-$,
- à l'instant $t = 0^+$
- et lorsque $t \to +\infty$.

a) À $t = 0^-$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(0^-) = E_1/2R$ $i_1(0^-) = E_1/2R$ $i_2(0^-) = 0$	$i(0^-) = E_1/R$ $i_1(0^-) = E_1/R$ $i_2(0^-) = E/R$	$i(0^-) = E_1/2R$ $i_1(0^-) = 0$ $i_2(0^-) = 0$

b) À $t = 0^+$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(0^+) = E_1/R$ $i_1(0^+) = \dfrac{4E_1 - 2E_2}{3R}$ $i_2(0^+) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$	$i(0^+) = E_1/2R$ $i_1(0^+) = E_1/4R$ $i_2(0^+) = E_1/4R$	$i(0^+) = E_1/2R$ $i_1(0^+) = \dfrac{3E_1 - 2E_2}{4R}$ $i_2(0^+) = \dfrac{2E_2 - E_1}{4R}$

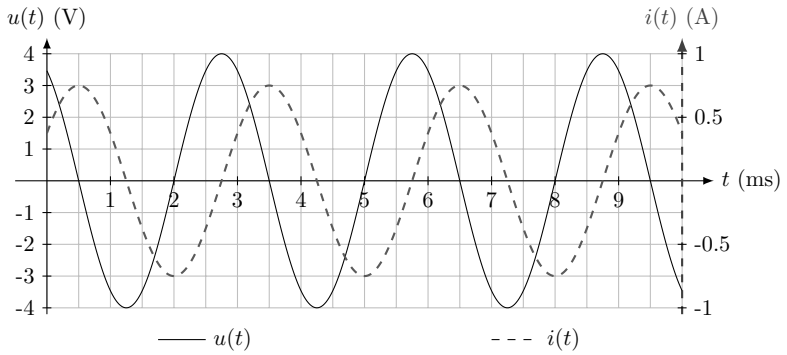
c) À $t = +\infty$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$ $i_1(\infty) = E_1/3R$ $i_2(\infty) = E_2/3R$	$i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{2R}$ $i_1(\infty) = E_1/2R$ $i_2(\infty) = E_2/2R$	$i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$ $i_1(\infty) = \dfrac{2E_1 - E_2}{3R}$ $i_2(\infty) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$

Régimes oscillants forcés

Entraînement 18.6 — Qui est-ce (I) ?

Un étudiant a mesuré la tension et l'intensité électrique traversant un dipôle dont les mesures sont représentées ci-dessous.



Un peu étourdi, il a oublié si ces courbes correspondent à celles mesurées aux bornes d'un condensateur ou d'une bobine.

Aidez-le à le retrouver !

a) Quelle est l'amplitude de l'intensité ? .....

b) Quelle est l'amplitude de la tension ? .....

c) Quelle est la fréquence des signaux ? .....

d) Comment est la tension par rapport à l'intensité électrique ?

(a) en avance (b) en retard

.....

e) Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité vaut :

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $+\frac{\pi}{2}$ (c) $-\pi$ (d) $+\pi$

.....

f) Le dipôle étudié est alors :

(a) une bobine d'impédance $\mathrm{j}L\omega$

(b) un condensateur d'admittance $\mathrm{j}C\omega$

.....

g) Le cas échéant déterminer la valeur de la capacité ou de l'inductance de ce dipôle.

On prendra $\frac{1}{\pi} \simeq 0{,}32$.

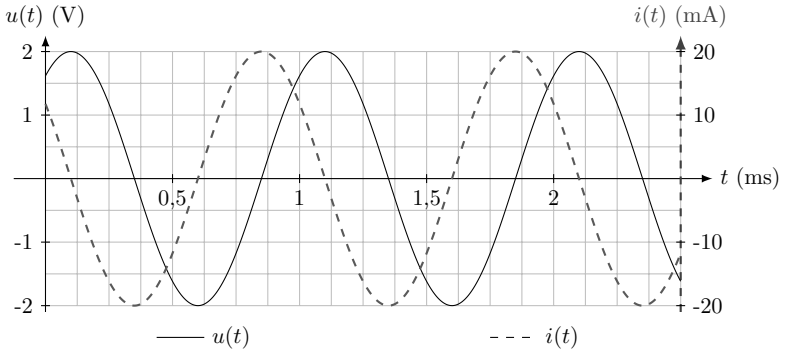
.....

Entraînement 18.7 — Qui est-ce (II) ?

Un étudiant a mesuré la tension et l'intensité électrique traversant un dipôle dont les mesures sont représentées ci-contre.

Un peu étourdi, il a oublié si ces courbes correspondent à celles mesurées aux bornes d'un condensateur ou d'une bobine.

Aidez-le à le retrouver !



a) Comment est la tension par rapport à l'intensité électrique ?

(a) en avance (b) en retard

.....

b) Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique vaut :

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $+\frac{\pi}{2}$ (c) $-\pi$ (d) $+\pi$

.....

c) Le dipôle étudié est donc :

(a) une bobine d'impédance $\mathrm{j}L\omega$ (b) un condensateur d'admittance $\mathrm{j}C\omega$

.....

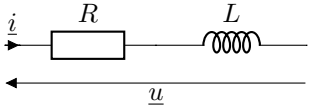
d) Le cas échéant déterminer la valeur de la capacité ou de l'inductance de ce dipôle.

On prendra $\frac{1}{2\pi} \simeq 16$.

.....

Entraînement 18.8 — Caractéristiques d'un montage RL (I).

On considère l'association de dipôles ci-contre.



a) L'impédance de cette association est de la forme :

(a) $\underline{Z} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}LR\omega}$ (b) $\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega$ (c) $\underline{Z} = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}$

.....

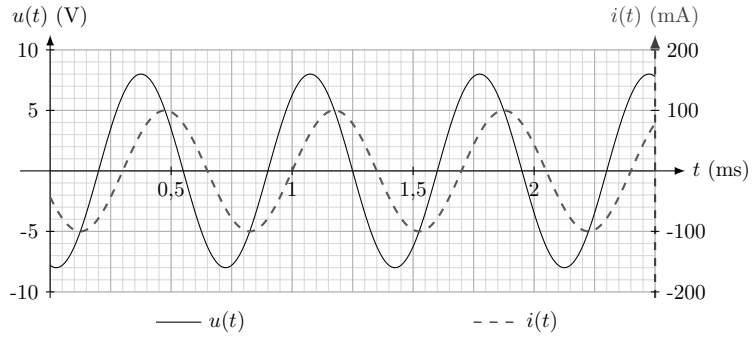
On note U_0 et I_0 les amplitudes respectives de la tension $u(t)$ et de l'intensité électrique $i(t)$. On note φ le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique (c'est l'argument de $\underline{Z}$).

b) Les grandeurs L et R vérifient le système :

(a) $\begin{cases} \dfrac{R^2 + (L\omega)^2}{(LR\omega)^2} = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} R^2 + \dfrac{1}{(L\omega)^2} = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{1}{RL\omega} = \tan(\varphi) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan(\varphi) \end{cases}$

.....

Entraînement 18.9 — Caractéristiques d'un montage RL (II).



La tension $u(t)$ et l'intensité électrique $i(t)$ de l'association série d'une bobine et d'un conducteur ohmique sont mesurées expérimentalement (courbes ci-contre). L'impédance de ce montage est

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega.$$

On peut montrer que R, L et ω vérifient le système :

$$\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan(\varphi), \end{cases}$$

où U_0 et I_0 sont respectivement les amplitudes de la tension $u(t)$ et de l'intensité électrique $i(t)$ tandis que φ est le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique.

a) La pulsation des signaux est :

(a) $8{,}98 \times 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ (b) $8{,}98 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ (c) $8{,}98 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ .....

b) Quelle est la valeur du décalage temporel δt entre l'extinction de la tension et celle de l'intensité électrique ?

(a) $-0{,}1\,\mathrm{ms}$ (b) $-0{,}2\,\mathrm{ms}$ (c) $0{,}1\,\mathrm{ms}$ (d) $0{,}2\,\mathrm{ms}$ .....

c) Le déphasage φ de la tension par rapport à l'intensité électrique vaut :

(a) $\dfrac{\pi}{3}$ rad (b) $-\dfrac{\pi}{3}$ rad (c) $\dfrac{2}{7}\pi$ rad (d) $-\dfrac{2}{7}\pi$ rad .....

En résolvant le système, déterminer :

d) la valeur de la résistance R ..... e) la valeur de l'inductance L .....

Entraînement 18.10 — Équivalents.

On considère les trois fonctions de transfert suivantes :

$$\underline{H_1}(\mathrm{j}x) = \frac{4}{1 - x^2 + 3\mathrm{j}x}, \quad \underline{H_2}(\mathrm{j}x) = \frac{1 + 2\mathrm{j}x}{1 - 3\mathrm{j}x} \quad \text{et} \quad \underline{H_3}(\mathrm{j}x) = \frac{2 + 3\mathrm{j}x}{1 + 5\mathrm{j}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}.$$

Pour chacune des fonctions de transfert, trouver un équivalent de la forme Ax^n au module des fonctions de transfert, où $A \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont deux constantes à déterminer.

a) $\left|\underline{H_1}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

b) $\left|\underline{H_1}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

c) $\left|\underline{H_2}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

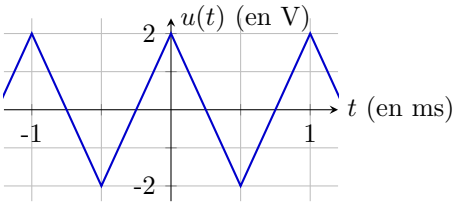
d) $\left|\underline{H_2}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

e) $\left|\underline{H_3}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

f) $\left|\underline{H_3}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

Entraînement 18.11 — DSF d'un signal triangulaire.

L'oscillogramme d'un signal triangulaire $u(t)$, d'amplitude U et de période T, est représenté ci-dessous.



Par lecture graphique, déterminer les propriétés du signal :

a) T ..... b) U .....

c) Quelle est la valeur de la fréquence fondamentale f du signal ? .....

d) Laquelle des propositions ci-dessous décrit le signal triangulaire sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$?

(a) $u(t) = \begin{cases} U(1+4t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1-4t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(b) $u(t) = \begin{cases} U(1-4t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1+4t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(c) $u(t) = \begin{cases} U(1-2t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1+2t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(d) $u(t) = \begin{cases} U(1+2t) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1-2t) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

.....

Le signal triangulaire peut se décomposer en série de Fourier :

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f\, t) + b_n \sin(2\pi n f\, t),$$

avec a_0 la moyenne de $u(t)$, a_n et b_n les coefficients des harmoniques définis par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\,2\pi f\, t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\,2\pi f\, t)\ \mathrm{d}t.$$

e) Que vaut a_0 ? .....

Ici, il est admis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(2\pi f n\, t)\ \mathrm{d}t.$$

f) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer lesquelles des propositions suivantes sont correctes :

(a) $a_n = 0$ si n pair

(b) $a_n = \frac{8U}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ si n pair

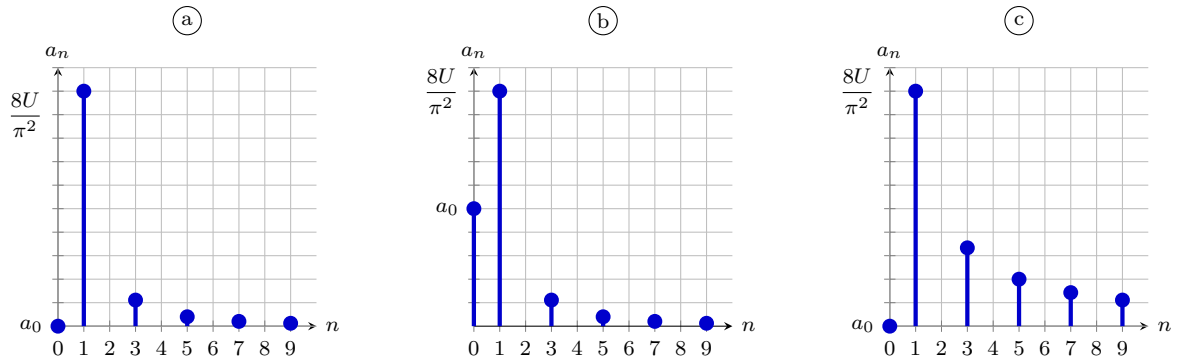
(c) $a_n = 0$ si n impair

(d) $a_n = \frac{8U}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ si n impair

.....

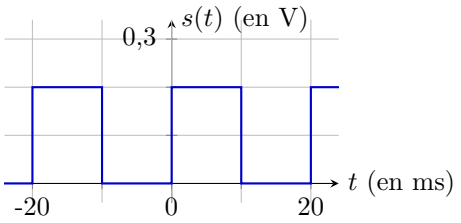
g) Lequel des spectres ci-dessous correspond au spectre en amplitude du signal triangulaire ?

.....



Entraînement 18.12 — Spectre d'un signal carré.

L'oscillogramme d'un signal carré $s(t)$, de moyenne s_0, d'amplitude S_m et de période T, est représenté ci-contre.



Par lecture graphique, déterminer les propriétés du signal :

a) T .....

b) s_0 .....

c) S_m .....

d) Quelle est la valeur de la fréquence fondamentale ν du signal ? .....

Le signal carré peut se décomposer en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c_n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\,2\pi\nu\,t},$$

avec $\underline{c_n}$ les coefficients complexes des harmoniques définis par :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu\,t}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

e) À l'aide de la définition de la valeur moyenne, déterminer la valeur de $\underline{c_0}$ .....

f) En remarquant que $s(t \in [T/2, T]) = 0$, déterminer lesquelles des propositions suivantes sont correctes pour $n \neq 0$:

(a) $\underline{c_n} = 0$ si n impair

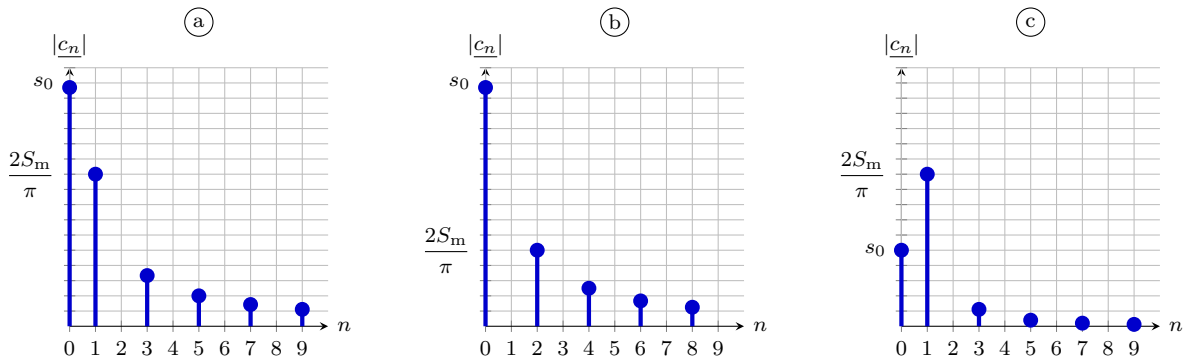
(b) $\underline{c_n} = \dfrac{2S_\text{m}}{\mathrm{i}\pi}\dfrac{1}{n}$ si n impair

(c) $\underline{c_n} = 0$ si n pair

(d) $\underline{c_n} = \dfrac{2S_\text{m}}{\mathrm{i}\pi}\dfrac{1}{n}$ si n pair

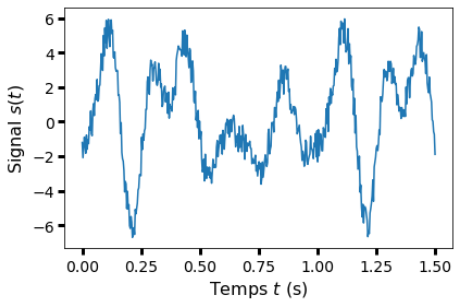
.....

g) Lequel des spectres ci-dessous correspond au spectre en amplitude du signal carré ? ....



Entraînement 18.13 — Fréquence d'échantillonnage.

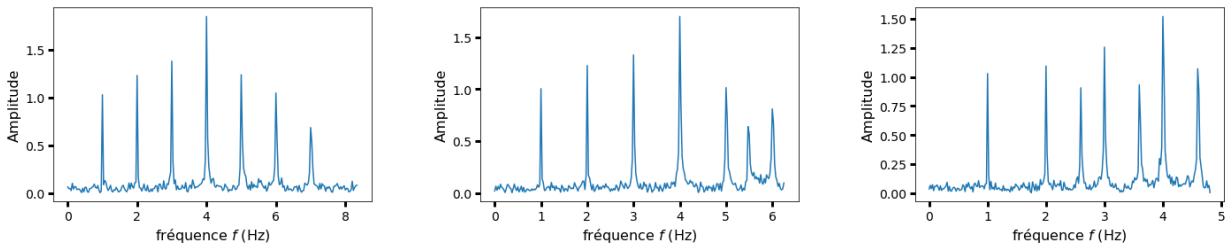
L'acquisition du signal $s(t)$ ci-dessous est effectuée en l'échantillonnant en N points équidistants répartis sur un intervalle $[0, t_{\max}]$.



a) Quelle est la fréquence f du signal ? .....

On effectue cette acquisition sur trois durées $t_{\max}$ différentes.

Les spectres ainsi obtenus, similaires mais pas parfaitement identiques, sont représentés ci-dessous.



(a) $N = 500$; $T_{\max} = 30{,}0\,\text{s}$ (b) $N = 500$; $T_{\max} = 40{,}0\,\text{s}$ (c) $N = 500$; $T_{\max} = 52{,}0\,\text{s}$

Quelle est la fréquence d'échantillonnage $f_e = \dfrac{N}{T_{\max}}$ dans les conditions expérimentales du spectre :

b) (a) ..... c) (b) ..... d) (c) .....

D'après l'analyse de Fourier, un signal périodique se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples de la fréquence du fondamental, fréquence du signal.

e) Lequel des spectres (ⓐ, ⓑ ou ⓒ) vérifie cette propriété ? .....

f) Comment s'appelle l'effet responsable des différences entre ces spectres ? .....

g) Quelle condition doit être remplie pour ne pas observer ce phénomène ?

ⓐ $f_e \geqslant f$
ⓑ $f_e \geqslant 2f$
ⓒ $f_e \geqslant nf$ avec n l'harmonique qu'on souhaite observer.
ⓓ $f_e \geqslant 2nf$ avec n l'harmonique qu'on souhaite observer.

.....

Entraînement 18.14 — Filtrage numérique.

Un filtre, d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, possède une fonction de transfert est $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $H_0 > 0$ un terme identifié au gain statique et ω_0 la pulsation caractéristique du filtre.

a) À l'aide d'une analyse qualitative de la fonction de transfert, déterminer la nature et l'ordre du filtre :

ⓐ passe-bas d'ordre 1
ⓑ passe-bas d'ordre 2
ⓒ passe-haut d'ordre 1
ⓓ passe-haut d'ordre 2
ⓔ passe-bande d'ordre 2
ⓕ coupe-bande d'ordre 2

.....

b) Utiliser la fonction de transfert pour déterminer l'équation différentielle liant e et s.

.....

Une chaîne d'acquisition permet de numériser respectivement les signaux analogiques e et s en des signaux numériques e_n et s_n définis par

$$e_n = e(t = t_n) \quad \text{et} \quad s_n = s(t = t_n) \quad \text{où} \quad t_n = nT_\mathrm{e}$$

avec T_e la période d'échantillonnage et n le numéro d'un échantillon.

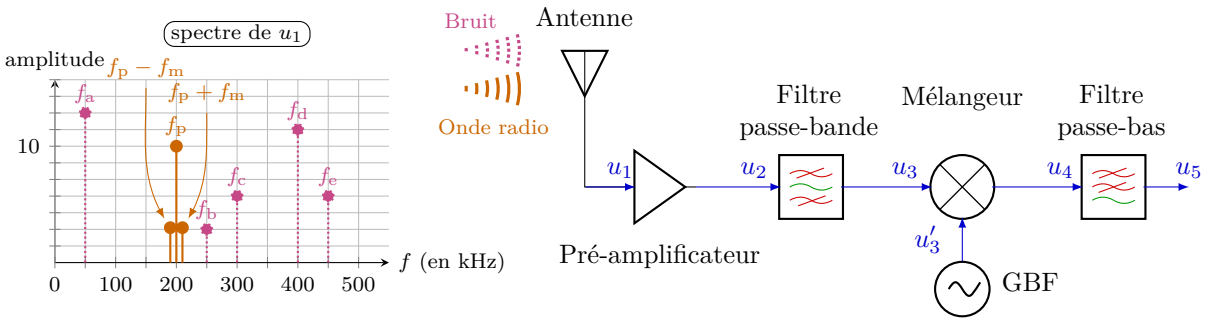
c) En approximant la dérivée par un taux de variation entre t_{n+1} et t_n (schéma d'Euler explicite), laquelle des relations de récurrence proposées ci-dessous permet de calculer la suite s_n pour tout n si s_0 est connue ?

ⓐ $s_n = (1 - T_\mathrm{e}\omega_0)s_{n+1} + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_{n+1}$
ⓑ $s_{n+1} = (1 - T_\mathrm{e}\omega_0)s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_n$
ⓒ $s_{n+1} = s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_{n+1}$
ⓓ $s_{n+1} = s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_n$

.....

Entraînement 18.15 — Démodulation d'amplitude.

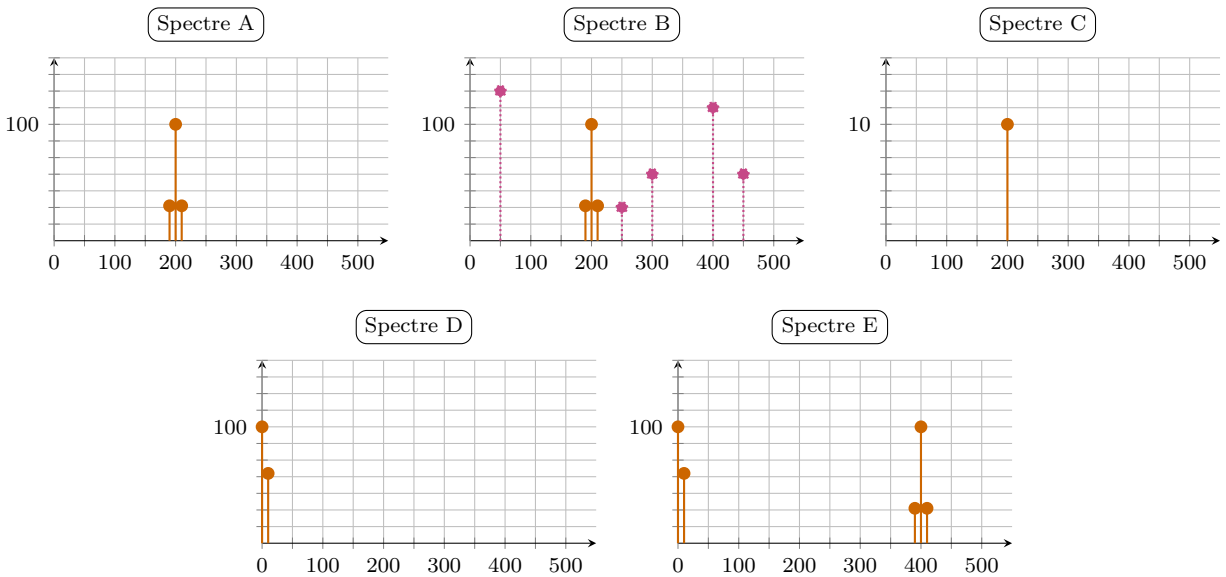
Le signal $u(t)$ modulé en amplitude est émis sous forme d'onde radio contenant les fréquences f_p, $f_\text{p}+f_\text{m}$ et $f_\text{p}-f_\text{m}$. Une antenne capte ce signal, mais également du bruit contenant les fréquences f_a, f_b, f_c, f_d et f_e. Le spectre du signal $u_1(t)$ généré par l'antenne est tracé ci-dessous.



Le signal $u_1(t)$ capté est envoyé successivement au travers de :

- un pré-amplificateur de gain $A = 10$,
- un filtre passe-bande idéal de bande-passante $[175\,\text{kHz}, 225\,\text{kHz}]$,
- un mélangeur produisant un signal $u_4(t) = ku_3(t) \times u'_3(t)$ avec $k = 0{,}1\,\text{V}^{-1}$ et $u'_3(t) = U_\text{p}\cos(2\pi f_\text{p} t)$,
- un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_\text{c} = 60\,\text{kHz}$.

Les spectres des signaux $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u'_3(t)$, $u_4(t)$ et $u_5(t)$ sont représentés ci-dessous. Les titres des axes ont été retirés pour plus de clarté.



Attribuer un des spectres proposés ci-dessus à chaque signal :

a) $u_2(t)$ ..... ☐ c) $u'_3(t)$ ..... ☐ e) $u_5(t)$ ..... ☐

b) $u_3(t)$ ..... ☐ d) $u_4(t)$ ..... ☐

Entraînement 18.16 — Figure de battements, modulation d'amplitude.

Une station de radio émet un signal modulé en amplitude :

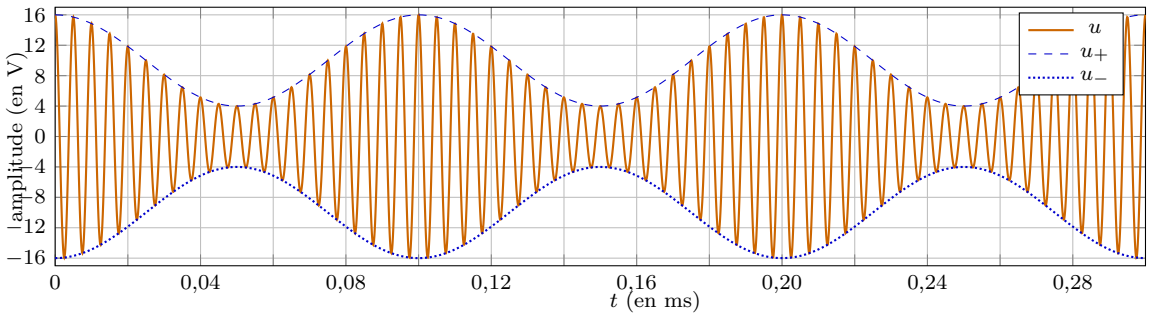
$$u(t) = U_\mathrm{p}\cos(2\pi f_\mathrm{p} t) \times \big(1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)\big)$$

avec f_m la fréquence du message sonore transporté par la porteuse, de fréquence f_p et d'amplitude U_p, avec un taux de modulation $0 < m < 1$.

Numériquement, f_p est très grande devant f_m ; ainsi, $u(t)$ peut être vu comme un signal oscillant « rapidement » à la période T_p entre les enveloppes

$$u_+(t) = +U_\mathrm{p}[1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)] \qquad \text{et} \qquad u_-(t) = -U_\mathrm{p}[1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)],$$

des fonctions oscillant « lentement » à la période T_m.



À l'aide d'une lecture graphique de l'oscillogramme, déterminer la valeur des grandeurs suivantes :

a) T_m ☐ b) T_p . ☐ c) U_p . ☐ d) m . ☐

En déduire les fréquences caractéristiques du signal $u(t)$ modulé en amplitude :

e) f_p ..... ☐ f) f_m ..... ☐

Réponses mélangées

(b) 1,6 µF $4x^{-2}$ 0,005 ms (b) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0 s = H_0\omega_0 e$ (b) et (c)

2 V (b) (a) 0,1 V (a) et (d) (b) $\frac{1}{2}$ (c) (b) B

$\frac{2}{5}x^1$ 0,1 V (c) 1 ms (d) E C $\frac{3}{5}x^0$ (c) (a) 7 mH

16,7 Hz 0 instable (a) (c) (a) 1 kHz 2,56 mH (a) 4 V

$4x^0$ (c) 10 kHz 9,61 Hz 12,5 Hz (d) Repliement de spectre (a)

(a) 0,1 ms 50 Hz (a) 20 ms 10 V stable stable instable

0 (a) $1x^0$ 0,75 A 200 kHz 0,1 V instable 50 Ω 0,6

(b) (b) $\frac{2}{3}x^0$ D (c) A 0 1 Hz 333 Hz (a) (a)

▶ Réponses et corrigés page 399

ALI

Prérequis
Modèle de l'ALI idéal de gain infini. Impédances complexes.
Impédance d'entrée d'un quadripôle : $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{v}_e}{\underline{i}_e}$.

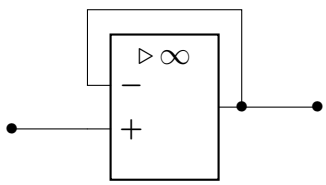
Régime de fonctionnement

Entraînement 19.1 — Circuit en régime linéaire.

Pour chacun des circuits ci-dessous, choisir la phrase qui convient.

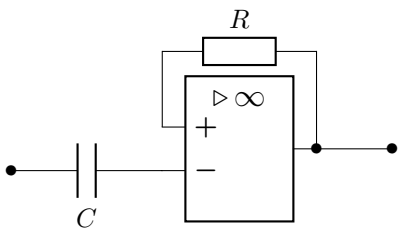
(a) L'ALI fonctionne vraisemblablement en régime linéaire.
(b) L'ALI fonctionne vraisemblablement en régime saturé.
(c) On ne peut pas répondre.

a)



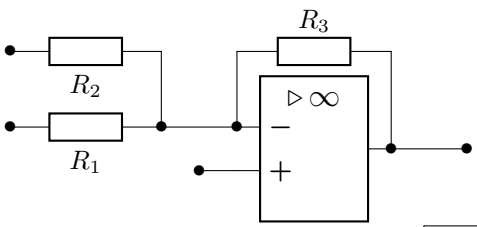
.....

b)



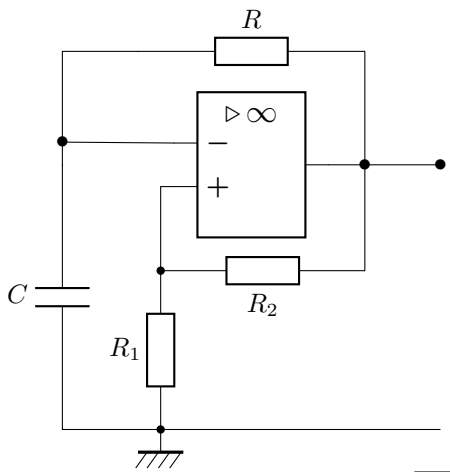
.....

c)



.....

d)

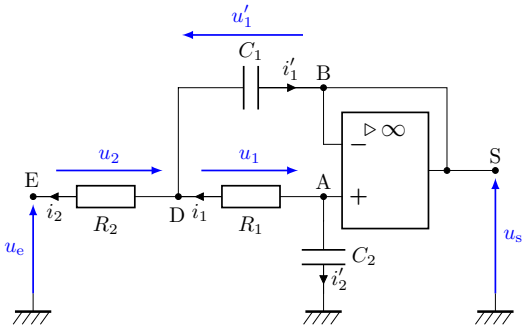


.....

Loi des nœuds et pont diviseur de tension

Entraînement 19.2 — Intensités sens dessus dessous.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Exprimer la loi des nœuds au point D en fonction des intensités i_1, i_2 et i_1'.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds au point D en fonction des tensions u_1, u_2, u_1', des résistances R_1, R_2 et de la capacité C_1 du condensateur supérieur.

.....

c) Indiquer la relation entre les intensités i_1 et i_2'.

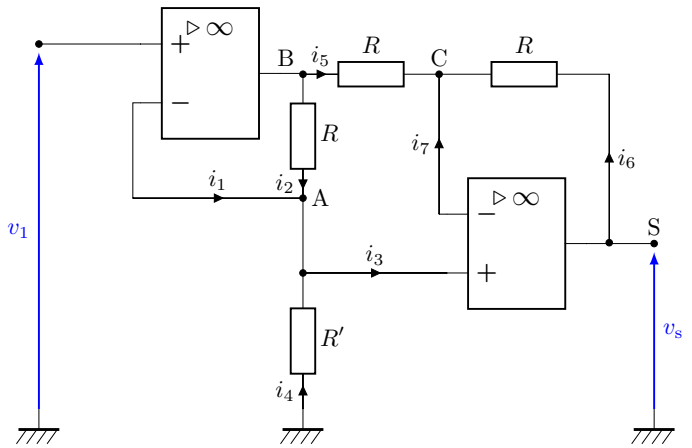
.....

d) En déduire l'expression de l'intensité i_2' en fonction de V_A, V_D et R_1 ainsi que de C_2 et V_A.

.....

Entraînement 19.3 — Montage à plusieurs ALI.

On considère le montage amplificateur d'instrumentation suivant, dans lequel tous les ALI sont considérés comme idéaux :



a) Pourquoi n'est-il pas intéressant d'écrire la loi des nœuds en B ?

(a) L'intensité de sortie de l'ALI est nulle.

(b) L'intensité de sortie de l'ALI est inconnue.

(c) La sortie de l'ALI est reliée à la masse.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds en termes d'intensité au point A en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

c) En appliquant la loi d'Ohm, quelle égalité obtient-on ?

(a) $\dfrac{V_B - V_A}{R} + \dfrac{V_A}{R'} = 0$

(b) $\dfrac{V_A - V_B}{R} + \dfrac{V_A}{R'} = 0$

(c) $\dfrac{v_1 - v_s}{R} + \dfrac{V_C - V_A}{R'} = 0$

(d) $\dfrac{V_A - V_B}{R'} + \dfrac{V_A}{R} = 0$

.....

d) Exprimer la loi des nœuds en termes d'intensité au point C en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

e) En utilisant la loi d'Ohm, quelle égalité obtient-on ?

(a) $\dfrac{V_C - V_S}{R} + \dfrac{V_B - V_C}{R} = 0$

(b) $\dfrac{V_C - V_A}{2R} + \dfrac{V_C - V_S}{R} = 0$

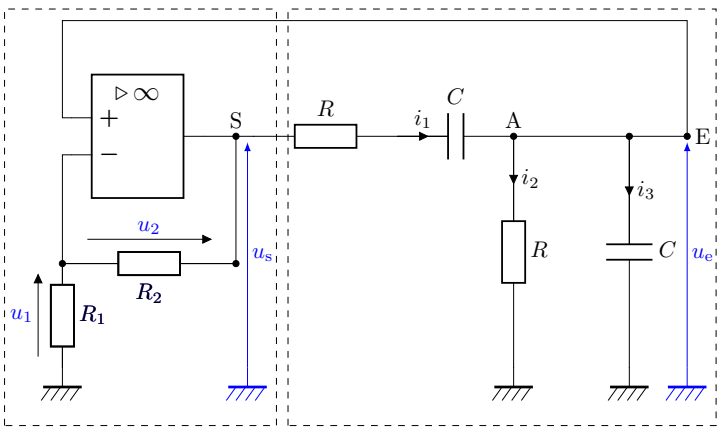
(c) $2V_C = V_B + V_S$

(d) $\dfrac{V_C - V_S}{R} + \dfrac{V_C - V_B}{R} + \dfrac{V_C - V_A}{R} = 0$

.....

Entraînement 19.4 — Oscillateur de Wien.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Le pont diviseur de tension du cadre de gauche permet d'écrire une relation entre u_1 et u_s. Écrire cette relation.

.....

b) Écrire la loi des nœuds en A.

.....

c) Exprimer i_2 en fonction de u_e et R.

.....

d) Exprimer l'intensité i_3 en fonction de u_e et C .....

e) Écrire la loi des mailles vérifiée par la partie du droite du montage encadrée en pointillés.

.....

f) Dériver cette relations et donner la relation liant $\dfrac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}$, i_1, $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, R et C.

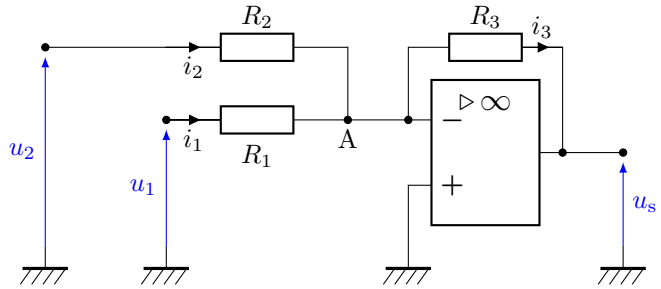
.....

g) En déduire une équation différentielle liant R, C, $\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ et u_e.

.....

Entraînement 19.5 — Montage sommateur inverseur.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Exprimer la loi des nœuds au point A en fonction des intensités i_1, i_2 et i_3.

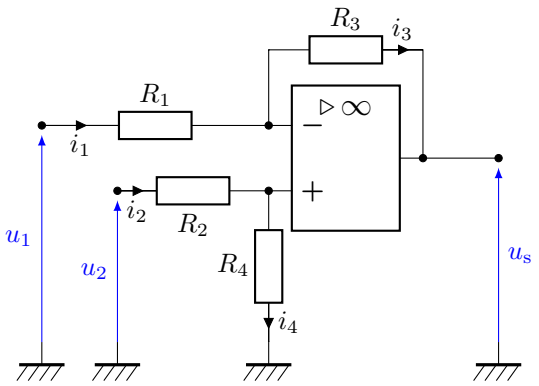
.....

b) À l'aide de l'expression précédente, déterminer une relation liant les tensions u_1, u_2 et u_s ainsi que les résistances R_1, R_2 et R_3.

.....

Entraînement 19.6 — Montage soustracteur.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Donner la relation entre les intensités i_1 et i_3 .....

b) Donner la relation entre les intensités i_2 et i_4 .....

c) Exprimer le potentiel V_+ en fonction de R_2, R_4 et u_2, à l'aide d'un pont diviseur de tension.

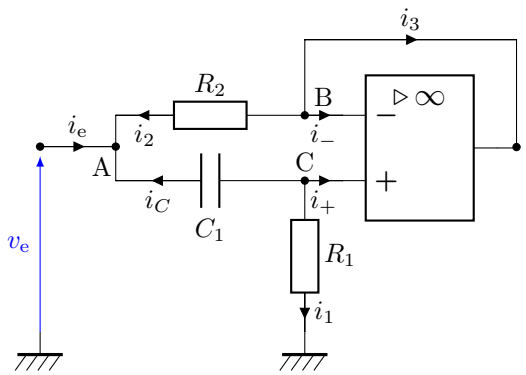
.....

d) Exprimer le potentiel V_- en fonction de R_1, R_3, u_1 et u_s, à l'aide d'un autre pont diviseur de tension.

.....

Entraînement 19.7 — Impédance d'un dipôle.

On considère le montage suivant dans lequel l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

a) Exprimer la loi des nœuds au point A en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds au point C en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

c) En écrivant la loi d'Ohm en complexes sur R_2 et C_1, en déduire une relation entre v_e, V_B, V_C, i_e, C_1, R_2 et ω.

.....

On cherche désormais à établir l'expression de l'impédance d'entrée du montage. Pour cela, il faut simplifier l'équation obtenue.

d) Quelle(s) relation(s) supplémentaire(s) est-il alors intéressant d'utiliser ?

(a) La loi des nœuds en B
(b) La loi des nœuds en C
(c) $V_B = v_s$
(d) $V_B = V_C$

.....

e) Pourquoi n'est-il pas intéressant d'écrire la loi des nœuds en B ?

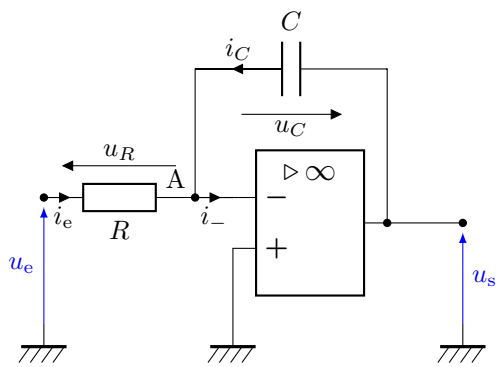
(a) Le point B est relié à la borne $\ominus$.
(b) Le courant i_3 est nul.
(c) Le courant i_3 est inconnu.

.....

Filtrage

Entraînement 19.8 — Étude d'un montage intégrateur.

On considère le montage intégrateur ci-dessous. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) À l'aide d'une des propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire, exprimer le potentiel V_-.

.....

b) Exprimer une relation entre $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ à l'aide d'une loi des nœuds en complexes au point A.

.....

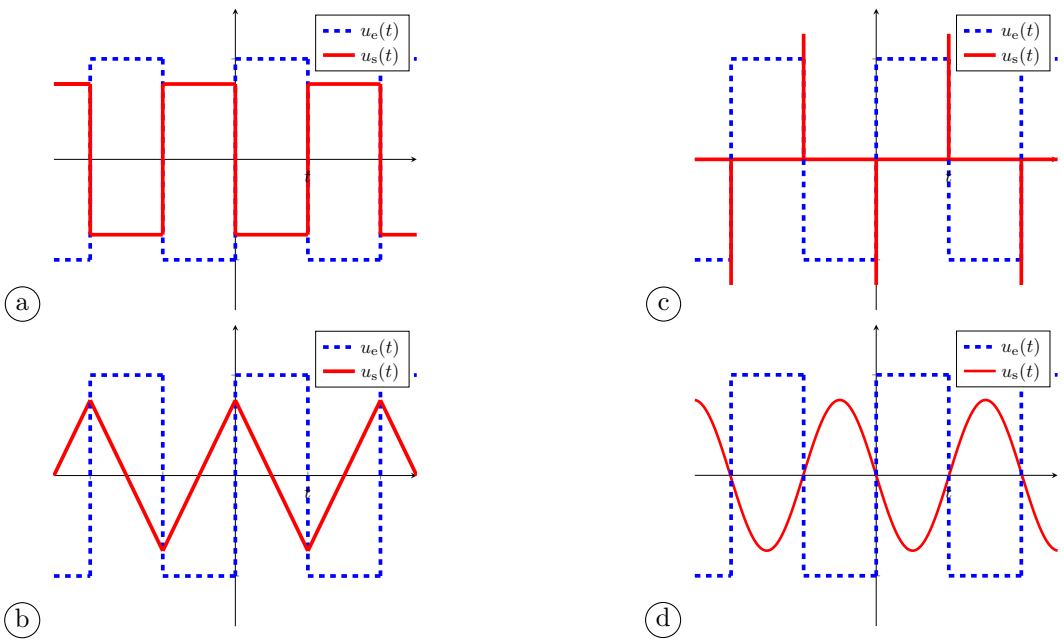
c) En déduire l'expression de la fonction de transfert du montage $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

.....

d) Donner l'équation différentielle qui relie $u_e(t)$ et $u_s(t)$ .....

e) On envoie un signal créneau (en pointillés) en entrée du montage intégrateur.

Parmi les courbes de sortie (en traits pleins) suivantes, laquelle est compatible avec ce montage ?

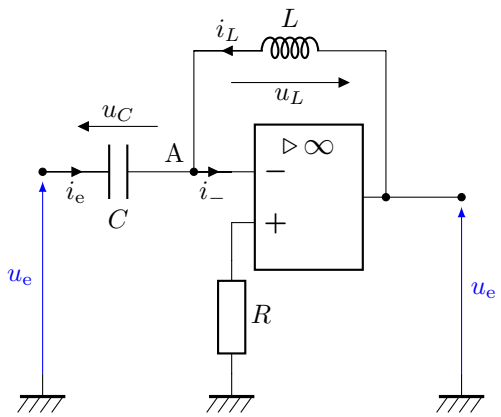


.....

f) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$ du montage .....

Entraînement 19.9 — Étude d'un montage dérivateur.

On considère le montage dérivateur ci-dessous. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) À l'aide d'une des propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire, exprimer le potentiel V_-.

.....

b) Exprimer une relation entre $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ à l'aide d'une loi des nœuds en complexes au point A.

.....

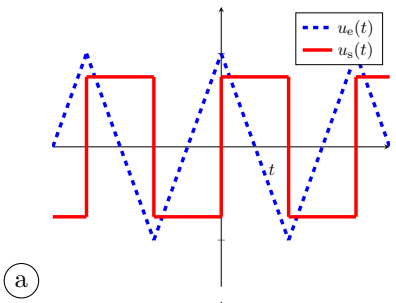
c) En déduire l'expression de la fonction de transfert du montage $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

.....

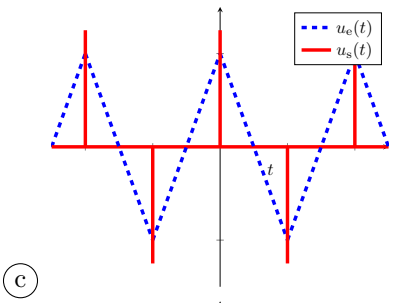
d) Exprimer l'équation différentielle qui relie $u_e(t)$ et $u_s(t)$ .....

e) On envoie un signal triangulaire (en pointillés) en entrée du montage dérivateur.

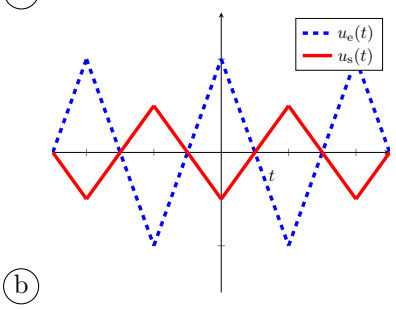
Parmi les courbes de sortie (en traits pleins) suivantes, laquelle est compatible avec ce montage ?



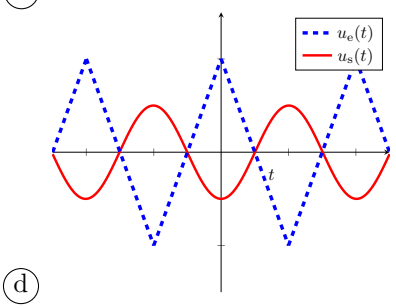
(a)



(c)



(b)



(d)

.....

f) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$ du montage .....

Entraînement 19.10 — Étude qualitative à hautes et basses fréquences (I).

On considère le même montage que dans l'entraînement **19.7**, où l'ALI est considéré idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, à quel dipôle le montage est-il équivalent à basses fréquences ?

(a) R_1 (c) C_1
(b) R_2

.....

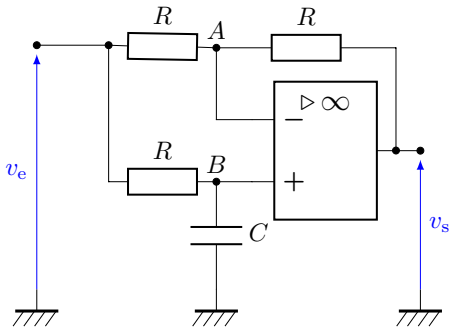
b) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, à quel dipôle le montage est-il équivalent à hautes fréquences ?

(a) R_1 (c) C_1
(b) R_2

.....

Entraînement 19.11 — Étude qualitative à hautes et basses fréquences (II).

On considère maintenant le montage déphaseur suivant où l'ALI est toujours considéré idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, quelle relation lie v_s et v_e à basses-fréquences ?

.....

b) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, quelle relation lie v_s et v_e à hautes fréquences ?

.....

Entraînement 19.12 — Montage déphaseur.

On considère un filtre déphaseur, contenant un ALI, pour lequel on donne l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1 - \mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}.$$

a) Quelle est la fonction de transfert équivalente à basses fréquences ? .....

b) Quelle est la fonction de transfert équivalente à hautes fréquences ? .....

c) Exprimer le gain du montage .....

d) Exprimer le déphasage du montage en fonction de R, C et ω .....

On donne $R = 800\,\Omega$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$.

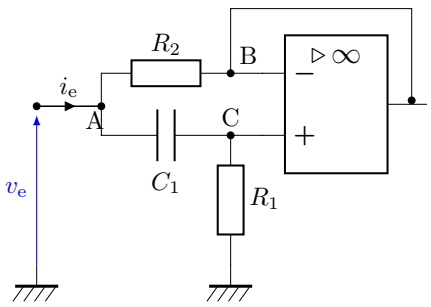
e) On envoie une tension de la forme $v_e(t) = E\cos(\omega t)$ de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$ et $E = 1{,}0\,\mathrm{V}$. Donner l'expression de la tension de sortie v_s.

.....

Autres entraînements

Entraînement 19.13 — Impédance d'un dipôle.

On revient à nouveau sur le montage ci-dessous où l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



On donne l'expression de l'impédance d'entrée du dipôle :

$$\underline{Z}(\omega) = R_2 \frac{1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega}{1 + \mathrm{j}R_2C_1\omega}.$$

a) À quel dipôle le montage est-il équivalent à basses fréquences ?

.....

b) À quel dipôle le montage est-il équivalent à hautes fréquences ?

.....

c) On peut mettre en évidence deux pulsations caractéristiques ω_1 et ω_2 dans cette impédance. Donner leurs expressions en fonction de R_1, R_2 et C_1.

.....

On considère que R_1 et R_2 sont telles que $\omega_1 \ll \omega_2$.

d) À quel dipôle le montage est-il équivalent à pulsations intermédiaires ($\omega_1 < \omega \ll \omega_2$) ?

(a) une résistance et une bobine en série
(b) une résistance et un condensateur en parallèle
(c) une résistance et un condensateur en série
(d) une résistance

.....

Réponses mélangées

$i_2 = i_4$ (c) $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_2}{R_2} + C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$ $i_3 = C\dfrac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ $-i_e + \dfrac{v_e - V_B}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1(v_e - V_C) = 0$

$E\sin(\omega t)$ (a) $\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_1}$ $\dfrac{V_D - V_A}{R_1} = i_2' = C_2\dfrac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t}$ (a)

$i_1 = i_2 + i_3$ $\mathrm{j}C\omega\underline{u_e} + \dfrac{\underline{u_s}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$ (c) $i_5 + i_6 = 0$ 1 $V_+ = \dfrac{R_4}{R_2 + R_4}u_2$

(b) et (d) $u_e(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ $-2\arctan(RC\omega)$ (a) (b) -1

$\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$ 0 (c) $\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i_1}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ $V_- = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}u_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_3}u_s$

(b) 1 $-\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$ R_2 $i_1 = i_3$ (b) $i_1 + i_2 = i_3$ (c)

$v_s = -v_e$ $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_s}{R_1 + R_2}$ $\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = RC\dfrac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{RC}u_e$ $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = -\dfrac{u_s}{R_3}$

$v_s = v_e$ $i_1 = i_2 + i_1'$ $i_C + i_1 = 0$ $i_e + i_C + i_2 = 0$ $i_1 = -i_2'$

$u_s = u_R + u_C + u_e = Ri_1 + u_C + u_e$ $u_s(t) = -LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2}$ (a) $\dfrac{\underline{u_e}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u_s} = 0$

R_1 $LC\omega^2$ (b) $i_2 = \dfrac{u_e}{R}$ R 0 (b) $i_2 + i_4 = 0$

► Réponses et corrigés page 404

Oscillateurs électroniques

Prérequis
Propriétés de l'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) idéal en régime linéaire.

Équations différentielles et complexes

La pulsation d'un signal sinusoïdal est notée ω. Les grandeurs ω_0, τ, R, L, C et A sont des constantes.

Entraînement 20.1 — Des équations complexes aux équations différentielles.

Pour chacune des équations complexes suivantes, exprimer l'équation différentielle associée.

a) $\mathrm{j}\omega\underline{u} + \dfrac{\underline{u}}{\tau} = 0$

.....

b) $\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + (\mathrm{j}\omega)^2\underline{u} = 0$

.....

c) $\mathrm{j}RC\omega\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + \omega^2\underline{u} = A$

.....

d) $\dfrac{1}{\omega_0\tau}\underline{u} - \mathrm{j}\dfrac{\omega_0}{\omega}\underline{u} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\underline{u} = A$

.....

Entraînement 20.2 — Des équations différentielles aux équations complexes.

Pour chacune des équations différentielles suivantes, exprimer l'équation complexe associée.

a) $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{i}{RC}$

.....

b) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L^2C^2i - \dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = A$

.....

Conditions d'oscillations

Entraînement 20.3 — Type de filtre.

a) Pour réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal, quel filtre faut-il utiliser préférentiellement ?

(a) passe-haut (c) passe-bande (e) peu importe
(b) passe-bas (d) coupe-bande (f) aucun ne convient

.....

b) Avec l'aide de quel autre montage ce filtre doit-il être bouclé ?

(a) comparateur à Hystérésis (c) passe-bande (e) amplificateur
(b) passe-bas (d) filtre passe-haut (f) aucun ne convient

.....

Entraînement 20.4 — Stabilité.

On considère des systèmes décrits par les équations différentielles suivantes. Les constantes ω_0, τ et Q sont réelles positives. Indiquer dans chaque cas si l'équation décrit un système stable ou instable.

a) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

b) $-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

c) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

d) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

Entraînement 20.5 — Critère d'oscillations sinusoïdales (critère de Barkhausen).

On considère un oscillateur constitué d'un filtre passe-bande et d'un amplificateur bouclés l'un sur l'autre.

La fonction de transfert de l'amplificateur est $\underline{H_\mathrm{a}} = A$ et celle du filtre est $\underline{H_\mathrm{f}} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

L'équation différentielle associée s'écrit alors : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1 - H_0A)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$.

a) Pour que des oscillations apparaissent, indiquer l'état que doit avoir le montage bouclé.

(a) stable (b) instable

.....

b) Indiquer la condition pratique de démarrage des oscillations.

(a) $H_0A > 1$ (b) $H_0A = 1$ (c) $H_0A < 1$

.....

c) Que vaut alors la pulsation des oscillations si celles-ci sont quasi-sinusoïdales ?

(a) $\omega_0(1 - H_0A)$ (b) $\dfrac{\omega_0(1 - H_0A)}{Q}$ (c) ω_0

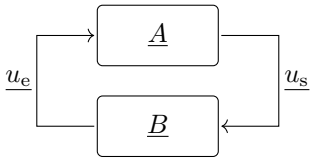
.....

d) Quelles sont les conditions pour que le système soit le siège d'oscillations **parfaitement** sinusoïdales ?

(a) $H_0A > 1$ et $\omega = \omega_0$
(b) $H_0A = 1$ et $\omega = \omega_0$
(c) $H_0A < 1$ et $\omega = \omega_0$
(d) $H_0A > 1$ et $\omega \neq \omega_0$
(e) $H_0A = 1$ et $\omega \neq \omega_0$
(f) $H_0A < 1$ et $\omega \neq \omega_0$

.....

Entraînement 20.6 — Chaîne de rétroaction.



On considère le montage ci-contre.

Pour chaque affirmation, répondre par « vrai » ou « faux ».

a) $\underline{u}_s = \underline{A}\,\underline{u}_e$ et $\underline{u}_e = \underline{B}\,\underline{u}_s$ .....

b) $\underline{u}_e = \underline{A}\,\underline{u}_s$ et $\underline{u}_s = \underline{B}\,\underline{u}_e$ .....

Le critère de Barkhausen correspond à la limite de la convergence et de la divergence des oscillations.

On en déduit un gain de boucle $\underline{AB}$ qui doit alors être égal à l'unité.

c) Parmi les propositions suivantes, indiquer celle qui est correcte.

(a) $|\underline{A}||\underline{B}| = 0$ et $\arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(b) $|\underline{A}||\underline{B}| = 1$ et $\arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(c) $|\underline{A}||\underline{B}| = 1$ et $\arg(\underline{A}) \times \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(d) $|\underline{A}||\underline{B}| = 0$ et $\arg(\underline{A}) \times \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

.....

Oscillateur à pont de Wien

Entraînement 20.7 — Oscillateur à pont de Wien.

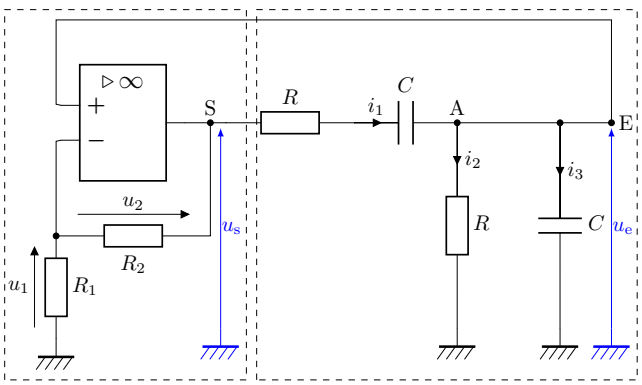
a) Pour observer des oscillations avec ce circuit, comment l'ALI doit-il fonctionner ?

(a) en régime linéaire

(b) en régime saturé

(c) alternativement en régime linéaire et saturé

.....



b) Le pont diviseur de tension du cadre de gauche permet d'écrire une relation entre u_1 et u_s.

Écrire cette relation en posant $A = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$ .....

c) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z_1}$ du système $\{R - C\}$ série situé entre S et A ?

(a) $R + \underline{Z_C}$ (b) $\dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}$ (c) $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\underline{Z_C}}$ (d) $\dfrac{1}{R + \underline{Z_C}}$

.....

d) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z_2}$ du système $\{R-C\}$ série parallèle situé entre AE et la masse ?

(a) $R+\underline{Z_C}$ (b) $\dfrac{R\underline{Z_C}}{R+\underline{Z_C}}$ (c) $\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{\underline{Z_C}}$ (d) $\dfrac{1}{R+\underline{Z_C}}$

.....

e) En utilisant des impédances équivalentes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$, déterminer le rapport $\dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ en fonction de $\underline{Z_C}$ et R.

.....

f) Parmi les équations suivantes, déterminer celle qui est vérifiée par u_s.

(a) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2-\dfrac{1}{R^2C^2}+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

(b) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2+\dfrac{1}{R^2C^2}-\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

(c) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2-\dfrac{1}{R^2C^2}-\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

(d) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2+\dfrac{1}{R^2C^2}+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

.....

g) Transposer l'équation complexe précédente et en déduire une équation différentielle portant sur $u_s(t)$.

.....

Entraînement 20.8 — Conditions d'oscillations.

Pour l'oscillateur à pont de Wien précédent, on donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3-A}{RC}\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R^2C^2}u_s=0.$$

a) Indiquer la condition théorique pour obtenir des oscillations sinusoïdales.

(a) $A=3$ (b) $A<3$ (c) $A>3$

.....

b) Dans ce cas, indiquer la fréquence de ces oscillations sinusoïdales.

(a) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{(3-A)}{RC}}$ (c) $\dfrac{RC}{2\pi(3-A)}$ (e) $\dfrac{1}{2\pi RC}$

(b) $\dfrac{(3-A)}{2\pi RC}$ (d) $\dfrac{2\pi(3-A)}{RC}$ (f) $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{RC}}$

.....

c) Si $A<3$, indiquer le comportement ultérieur.

(a) oscillations amorties
(b) saturation
(c) oscillations sinusoïdales

.....

d) Si $A>3$, indiquer le comportement ultérieur.

(a) oscillations amorties
(b) saturation
(c) oscillations sinusoïdales

.....

Oscillateurs à relaxation

Entraînement 20.9 — Multivibrateur astable.

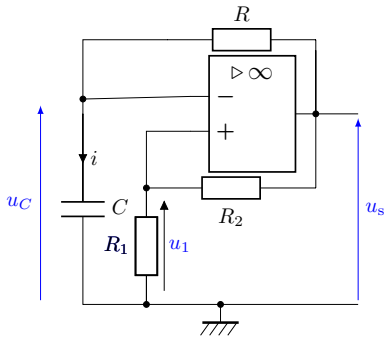
Dans le circuit ci-contre, l'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal.

a) *A priori*, quel est le régime de fonctionnement de l'ALI ?

(a) régime linéaire (c) impossible de répondre

(b) régime saturé

.....



Supposons que l'ALI fonctionne en régime saturé, avec à l'instant initial $t = 0$, $u_s = V_{sat}$.

b) Exprimer la tension u_1 en fonction des résistances R_1, R_2 et de la tension de saturation V_{sat} .....

c) Écrire la relation entre l'intensité i et la tension u_C .....

d) Écrire la relation entre l'intensité i, les tensions u_C et V_{sat} et la résistance R.

.....

e) Déduire des deux relations précédentes, l'équation différentielle liant R, C, u_C et V_{sat}.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_{sat}}{RC}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - \dfrac{u_C}{RC} = -\dfrac{V_{sat}}{RC}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = -\dfrac{V_{sat}}{RC}$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_{sat}}{RC}$

.....

f) Quelle est la solution de l'équation homogène (sans second membre), avec A constante ?

(a) $u_C = A\exp(-RCt)$

(b) $u_C = A\exp(RCt)$

(c) $u_C = A\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$

(d) $u_C = A\exp\left(\dfrac{t}{RC}\right)$

.....

g) Que dire de la solution particulière de l'équation ?

(a) Elle est nulle.

(b) C'est une constante.

(c) C'est une variable.

(d) On ne peut pas savoir.

.....

h) Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, le condensateur soit déchargé. Indiquer son comportement.

(a) Il se charge. (b) Il se décharge. (c) Rien ne se passe.

.....

i) Comment évolue la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = V_+ - V_-$ si le condensateur se charge ?

(a) Elle n'évolue pas. (b) Elle augmente. (c) Elle diminue.

.....

j) Que va-t-il se passer pour l'amplificateur linéaire intégré au bout d'un certain temps ?

(a) Il va claquer. (b) Il va basculer en saturation négative. (c) Il va passer en fonctionnement linéaire.

.....

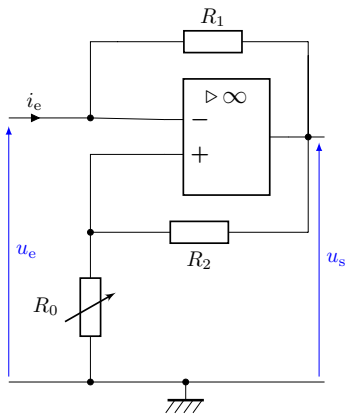
Oscillateur à résistance négative

Entraînement 20.10 — Résistance négative.

On utilise le dipôle suivant dans lequel l'amplificateur linéaire intégré est idéal.

a) En supposant le régime linéaire, déterminer le rapport $\dfrac{u_e}{u_s}$ en fonction des résistances R_0 et R_2.

.....



b) Donner la relation entre u_e, u_s et i_e.

.....

c) En supposant le régime linéaire, en déduire l'expression de u_e en fonction de i_e, ainsi que des résistances R_0, R_1 et R_2.

.....

d) À quelle condition le régime reste-t-il linéaire ?

(a) $|u_s| < V_{sat}$

(b) $|u_s| > V_{sat}$

(c) $|u_e| < V_{sat}$

(d) $|u_e| > V_{sat}$

.....

e) Supposons que le régime est linéaire tant que $|u_s| < V_{sat}$. Que peut-on en déduire ?

(a) $|u_e| > \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$

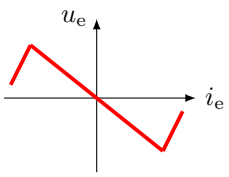
(b) $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$

.....

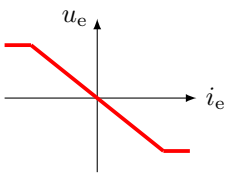
f) En supposant le régime en saturation haute, déterminer u_e en fonction de i_e, R_1 et V_{sat}.

.....

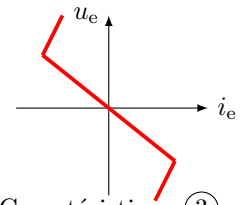
On donne les caractéristiques suivantes :



Caractéristique ①



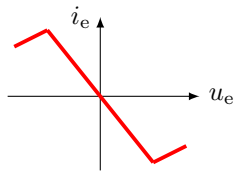
Caractéristique ②



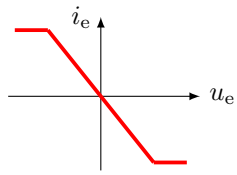
Caractéristique ③

g) Sachant que même en régime de saturation, $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$, indiquer celle qui correspond au dipôle précédent. .....

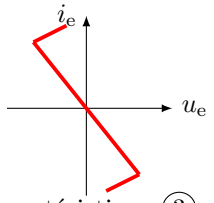
On donne les caractéristiques $i_e = g(u_e)$ suivantes.



Caractéristique ①



Caractéristique ②



Caractéristique ③

h) Indiquer celle qui correspond au dipôle précédent .....

i) Dans quel intervalle de tension ce dipôle se comporte-t-il comme une résistance négative ?

ⓐ $u_e < -\dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$ ⓒ $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

ⓑ $u_e > \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$ ⓓ $|u_e| > \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

.....

Réponses mélangées

ⓓ ⓑ ⓔ ⓑ $\dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$ Caractéristique ① ⓑ ⓐ ⓒ

ⓑ Faux $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ ⓒ Caractéristique ③ $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$ ⓐ

ⓒ $u_1 = \dfrac{u_s}{A}$ ⓐ Vrai ⓐ ⓐ ⓐ $RC\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u - \dfrac{d^2u}{dt^2} = A$

ⓐ ⓒ ⓑ ⓒ $u_e = R_1 i_e + V_{sat}$ ⓑ $u_e = -R_0\dfrac{R_1}{R_2}i_e$

$\dfrac{(R+\underline{Z_C})^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$ $\dfrac{j\omega}{\tau}\underline{i} + L^2C^2\underline{i} - (j\omega)^2\underline{i} = A$ $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$ ⓑ ⓓ

ⓑ $u_e - u_s = R_1 i_e$ $\dfrac{u_e}{u_s} = \dfrac{R_0}{R_0+R_2}$ $\dfrac{d^2u_s}{dt^2} + \dfrac{3-A}{RC}\dfrac{du_s}{dt} + \dfrac{1}{R^2C^2}u_s = 0$ ⓑ

ⓒ $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = 0$ $j\omega\underline{i} = -\dfrac{\underline{i}}{RC}$ ⓔ $i = \dfrac{V_{sat} - u_C}{R}$ ⓒ ⓐ ⓑ

▶ Réponses et corrigés page 409

Physique quantique

Prérequis
Onde progressive. Densité de probabilité de présence. État stationnaire en mécanique quantique. Normalisation d'une fonction d'onde. Coefficient de transmission. Principe de superposition.

Constantes utiles

→ Constante de Planck $h = 6{,}6 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$

→ Constante de Planck réduite : $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

→ Constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

Pour commencer

Entraînement 21.1 — Caractère quantique.

Un objet est qualifié de quantique dès lors que $L \leqslant 100\lambda$, avec L sa taille, λ sa longueur d'onde de de Broglie telle que $\lambda = h/p$, et p sa quantité de mouvement.

Calculer la longueur d'onde de de Broglie λ des objets ci-dessous.

a) Balle de pistolet : $L = 10\,\mathrm{mm}$; $m = 10\,\mathrm{g}$; $v = 350\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

.....

b) Grain de pollen : $L = 5\,\mu\mathrm{m}$; $m = 5\,\mathrm{ng}$; $v = 2\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

.....

c) Virus de l'hépatite B : $L = 42\,\mathrm{nm}$; $m = 3 \times 10^{-18}\,\mathrm{g}$; $v = 0{,}1\,\mathrm{mm \cdot h^{-1}}$

.....

d) Molécule de O_2 : $L = 0{,}29\,\mathrm{nm}$; $M = 32{,}0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $v = 1\,800\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

.....

e) Quel(s) objet(s) pouvez-vous qualifier de quantique ?

(a) une balle de pistolet
(b) un grain de pollen
(c) le virus de l'hépatite B
(d) une molécule de O_2

.....

Entraînement 21.2 — Interférences.

Prenons une expérience d'interférences impliquant un faisceau de particules quantiques. Ce faisceau est dirigé vers un dispositif à trois fentes contenues dans un même plan. Un détecteur est placé en un point M, à une grande distance du plan contenant les fentes.

Sans plus de détails sur la géométrie de l'interféromètre, voici les différentes configurations observées :

- si la fente n° 1 est ouverte alors l'amplitude de probabilité en M vaut $\varphi_1(\mathrm{M}) = 1/\sqrt{2}$;
- si la fente n° 2 est ouverte alors l'amplitude de probabilité en M vaut $\varphi_2(\mathrm{M}) = \mathrm{i}/2$ avec $\mathrm{i}^2 = -1$;
- si la fente n° 3 est ouverte alors l'amplitude de probabilité en M vaut $\varphi_3(\mathrm{M}) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{6}}$.

On rappelle que la densité de probabilité de présence est donnée par $|\varphi(M)|^2$.

Déterminer la densité de probabilité de détection d'une particule au voisinage de M lorsque :

a) seule la fente n° 1 est ouverte .....

b) les fentes n° 1 et n° 2 sont ouvertes .....

c) les fentes n° 2 et n° 3 sont ouvertes .....

d) toutes les fentes sont ouvertes .....

Autour des fonctions d'onde

- On rappelle qu'une fonction d'onde est dite normalisée si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$.
- On rappelle qu'en mécanique quantique, un état est dit stationnaire si sa densité de probabilité de présence $|\psi(x,t)|^2$ est indépendante du temps.
- On rappelle la formule de linéarisation : $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Entraînement 21.3 — Normalisation d'une fonction d'onde (I).

Pour chaque fonction d'onde spatiale, déterminer la constante A pour normaliser la fonction d'onde.

a) $\varphi(x) = \sqrt{A\mathrm{e}^{-|x|/a}}$ .....

b) $\varphi(x) = A\mathrm{e}^{-|x|/b}$ .....

c) $\varphi(x) = \begin{cases} A\sqrt{1-x^2/a^2} & \text{si } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

Entraînement 21.4 — Normalisation d'une fonction d'onde (II).

Pour chaque fonction d'onde spatiale, déterminer la constante A pour normaliser la fonction d'onde.

a) $\varphi(x) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

b) $\varphi(x) = \begin{cases} A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/a} + 1) & \text{si } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

c) $\varphi(x) = \begin{cases} A\dfrac{x}{a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ A\dfrac{b-x}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

Entraînement 21.5 — État stationnaire.

Parmi les différentes fonctions $\Psi(x,t)$ suivantes, quelles sont celles pouvant représenter un état stationnaire en mécanique quantique ?

(a) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

(b) $\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

(c) $\Psi(x,t) = A\cos(kx)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

(d) $\Psi(x,t) = A\cos(kx)\cos(\omega t)$

(e) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\right)$

.....

Entraînement 21.6 — Fonction d'onde associée à une onde progressive.

Rappelons l'équation de Schrödinger unidimensionnelle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}.$$

On cherche une solution pour une particule libre sous la forme d'une onde progressive.

a) Pour une particule libre, que vaut la grandeur $V(x,t)$? .....

b) Dans nos conditions, rappeler l'expression de l'énergie cinétique de la particule en fonction, entre autres, de la norme du vecteur d'onde k.

.....

c) Quelle est la fonction d'onde compatible avec l'équation de Schrödinger ?

(a) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$

(b) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}$

.....

d) Dans quel sens se propage l'onde ?

(a) Dans le sens des x décroissants

(b) Dans le sens des x croissants

.....

e) Calculer la densité de probabilité de présence $|\Psi(x,t)|^2$ .....

f) La fonction d'onde représente-t-elle un état stationnaire : « oui » ou « non » ? .....

Entraînement 21.7 — Particule dans un puits.

Une particule quantique de masse m est confinée dans un puits. Dans son état fondamental, la fonction d'onde spatiale s'écrit

$$\varphi(x) = \begin{cases} A\cos(\alpha x) & \text{si } -\dfrac{\pi}{2\alpha} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2\alpha} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec α une grandeur réelle positive.

a) Déterminer la constante de normalisation A .....

b) Calculer la probabilité P que la particule se trouve dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4\alpha}$. Cette probabilité est définie par $P = \displaystyle\int_0^{\pi/4\alpha} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

.....

c) Donner sans calculs la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule, définie par $\langle x \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x|\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

.....

Entraînement 21.8 — Particule liée.

Prenons une particule quantique de masse m susceptible de se déplacer le long d'un axe $(\mathrm{O}x)$. Son état quantique est représenté par la fonction d'onde

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ Ax\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

avec α un grandeur réelle positive.

a) Comment s'écrit le calcul de la probabilité de présence P de la particule dans tout l'espace ?

(a) $P = A^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2\alpha x} \,\mathrm{d}x$

(b) $P = A^2 \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2\alpha x} \,\mathrm{d}x$

(c) $P = A^2 \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2\alpha x + 2Et/\hbar} \,\mathrm{d}x$

(d) $P = A^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{2\alpha x} \,\mathrm{d}x$

.....

b) La normalisation de la fonction d'onde impose $P = 1$.

Grâce à une intégration par parties, déterminer la constante de normalisation A.

.....

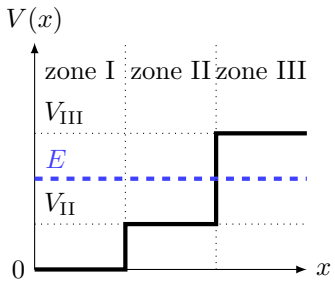
c) Calculer la probabilité que la particule se trouve dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.

.....

Cas d'un potentiel uniforme par morceaux

Entraînement 21.9 — Détermination d'une fonction d'onde.

On considère le profil de potentiel $V(x)$ ci-contre, constant par morceaux. On souhaite obtenir les formes $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$, $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ et $\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ de la fonction d'onde d'une particule d'énergie E ($V_{\mathrm{II}} < E < V_{\mathrm{III}}$) dans les trois zones.



Pour cela on utilise l'équation de Schrödinger à une seule dimension x, indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x). \qquad (2)$$

De plus, on rappelle les solutions pour l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \alpha f(x)$:

$$\text{si } \alpha < 0 : \quad f(x) = A\cos\left(\sqrt{|\alpha|}x\right) + B\sin\left(\sqrt{|\alpha|}x\right) ;$$
$$\text{si } \alpha > 0 : \quad f(x) = A\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}x}.$$

a) Utiliser l'équation (2) dans la zone I pour exprimer $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

.....

b) Exprimer $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$ en fonction de A_{I}, B_{I}, m et E.

.....

c) Utiliser l'équation (2) dans la zone II pour exprimer $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

.....

d) Exprimer $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ en fonction de A_{II}, B_{II}, m, E et V_{II}.

.....

e) Utiliser l'équation (2) dans la zone III pour exprimer $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

.....

f) Exprimer $\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ en fonction de A_{III}, B_{III}, m, E et V_{III}.

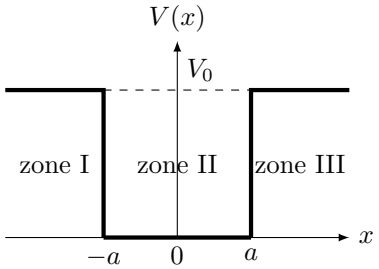
.....

g) Réexprimer $\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ afin d'empêcher sa divergence quand $x \to +\infty$.

.....

Entraînement 21.10 — Puits de potentiel fini, étude des solutions paires.

Soit un puits de potentiel fini, de valeur nulle entre les positions $x = -a$ et $x = a$, et de valeur V_0 partout ailleurs. En étudiant une particule d'énergie $E < V_0$, on peut montrer que sa fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ prend les formes suivantes dans les trois zones définies sur la figure ci-contre :



$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{Qx} \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}}\cos(Kx) \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{III}}(x) = A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qx}.$$

On cherche à déterminer une relation entre A_{I} et A_{III}, les amplitudes de la fonction d'onde dans les zones I et III, ainsi qu'une relation entre Q et K, des paramètres liés à V_0 et E, en utilisant les relations de continuité pour $\varphi(x)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$ et a.

a) On a calculé ci-dessous les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x}$:

$$-K\alpha\sin(Kx) \qquad Q\beta\mathrm{e}^{Qx} \qquad -Q\gamma\mathrm{e}^{-Qx} \qquad K\delta\sin(Kx).$$

Déterminer parmi les termes α, β, γ et δ, ceux qui correspondent à A_{I}, A_{II} et A_{III}.

(a) $A_{\mathrm{I}} = \beta$, $A_{\mathrm{II}} = \delta$, $A_{\mathrm{III}} = \gamma$ (c) $A_{\mathrm{I}} = \gamma$, $A_{\mathrm{II}} = \alpha$, $A_{\mathrm{III}} = \beta$

(b) $A_{\mathrm{I}} = \beta$, $A_{\mathrm{II}} = \alpha$, $A_{\mathrm{III}} = \gamma$

.....

b) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en $-a$. Égaliser $\varphi_{\mathrm{I}}(-a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(-a)$.

.....

c) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(-a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(-a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

d) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en a. Égaliser $\varphi_{\mathrm{III}}(a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(a)$.

.....

e) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en a. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

f) À partir des réponses des questions b) et d) trouver une relation entre A_{I} et A_{III}.

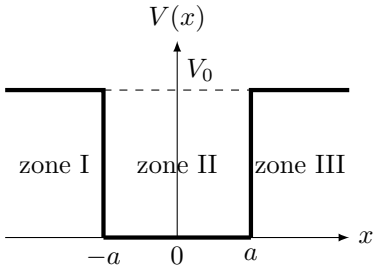
.....

g) À partir des réponses des questions d) et e) trouver une relation entre Q et K.

.....

Entraînement 21.11 — Puits de potentiel fini, étude des solutions impaires.

Soit un puits de potentiel fini, de valeur nulle entre les positions $x = -a$ et $x = a$, et de valeur V_0 partout ailleurs. En étudiant une particule d'énergie $E < V_0$, on peut montrer que sa fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ prend les formes suivantes dans les trois zones définies sur la figure ci-contre :



$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{Qx} \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}}\sin(Kx) \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{III}}(x) = A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qx}.$$

On cherche à déterminer une relation entre A_{I} et A_{III}, les amplitudes de la fonction d'onde dans les zones I et III, ainsi qu'une relation entre Q et K, des paramètres liés à V_0 et E, en utilisant les relations de continuité pour $\varphi(x)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$ et a.

a) On a calculé ci-dessous les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x}$:

$$-Q\alpha\mathrm{e}^{-Qx} \qquad K\beta\cos(Kx) \qquad -K\gamma\cos(Kx) \qquad Q\delta\mathrm{e}^{Qx}.$$

Déterminer parmi les termes α, β, γ et δ, ceux qui correspondent à A_{I}, A_{II} et A_{III}.

(a) $A_{\mathrm{I}} = \alpha$, $A_{\mathrm{II}} = \beta$, $A_{\mathrm{III}} = \delta$ (c) $A_{\mathrm{I}} = \delta$, $A_{\mathrm{II}} = \beta$, $A_{\mathrm{III}} = \alpha$

(b) $A_{\mathrm{I}} = \delta$, $A_{\mathrm{II}} = \gamma$, $A_{\mathrm{III}} = \alpha$

.....

b) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en $-a$. Égaliser $\varphi_{\mathrm{I}}(-a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(-a)$.

.....

c) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(-a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(-a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

d) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en a. Égaliser $\varphi_{\mathrm{III}}(a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(a)$.

.....

e) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en a. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

f) À partir des réponses des questions b) et d) retrouver la relation entre A_{I} et A_{III}.

.....

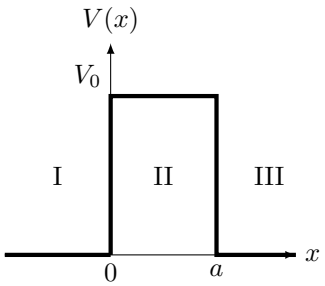
g) À partir des réponses des questions d) et e) trouver une relation entre Q et K.

.....

Effet tunnel

Entraînement 21.12 — Coefficient de transmission.

On considère une particule de masse m se déplaçant selon un axe (Ox) soumise au potentiel représenté ci-contre. Cette particule arrive de la région I avec une énergie $E < V_0$. Dans ces conditions, on peut montrer que le coefficient de transmission T s'écrit :



$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(ka)} \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Dans le cas où $ka \gg 1$, on montre que T se simplifie sous la forme : $T \approx T_0 \mathrm{e}^{-2ka}$.

On donne l'approximation suivante : pour $x \gg 1$, $\sinh(x) \approx \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

a) Exprimer T_0 en fonction de V_0 et E .....

b) Toutes choses égales par ailleurs, la probabilité de transmission est d'autant plus grande que la barrière est épaisse.

(a) vrai (b) faux .....

c) Toutes choses égales par ailleurs, un proton a plus de chances d'être transmis qu'un électron.

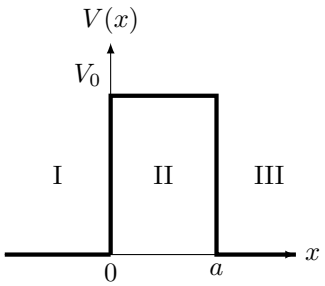
(a) vrai (b) faux .....

d) Toutes choses égales par ailleurs, la transmission est d'autant plus probable que la particule est énergétique.

(a) vrai (b) faux .....

Entraînement 21.13 — Courant tunnel.

On considère un électron de masse $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg se déplaçant selon un axe (Ox). Ce dernier arrive de la région I avec une énergie $E = 1,0$ eV sur une barrière de potentiel de hauteur $V_0 = 2,0$ eV et d'épaisseur $a = 1,0$ nm. On peut montrer que le coefficient de transmission T s'écrit :



$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \mathrm{e}^{-2ka} \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

en supposant l'approximation $ka \gg 1$ vérifiée. On rappelle : 1 eV = 1,6 × 10^{-19} J.

a) Calculer T .....

On considère maintenant un faisceau incident d'électrons correspondant à un courant $I = 10$ mA.

b) Calculer l'intensité du courant transmis I_t, en µA .....

Toutes choses égales par ailleurs, on remplace maintenant le faisceau d'électrons par un faisceau de protons, de masses $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg.

c) Qualitativement, l'intensité transmise va :

(a) augmenter (b) diminuer

.....

d) Calculer la nouvelle intensité transmise I_t' .....

Réponses mélangées

$\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\text{III}} - E)\varphi_{\text{III}}(x)$ $A_{\text{III}}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\text{III}}-E)}x} + B_{\text{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\text{III}}-E)}x}$ $\frac{Q}{K} = \tan(Ka)$ $1{,}9 \times 10^{-34}$ m

$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$ (b) $A_{\text{I}} = -A_{\text{III}}$ oui $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ $-\frac{K}{Q} = \tan(Ka)$

$|\Psi(x,t)|^2 = A^2$ $\frac{1}{2}$ $A_{\text{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = -A_{\text{II}}\sin(Ka)$ 0 (a) et (c) $A_{\text{I}} = A_{\text{III}}$

$A = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$ $A_{\text{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\text{II}}\cos(Ka)$ 1,4 µA (b) $-QA_{\text{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\text{II}}\cos(Ka)$

$1{,}4 \cdot 10^{-4}$ $A = \frac{1}{\sqrt{b}}$ $B_{\text{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\text{III}}-E)}x}$ 7×10^{-21} m (b) $2{,}5 \times 10^{-11}$ m

$\frac{3}{4}$ $A_{\text{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\text{II}}\cos(Ka)$ $A_{\text{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\text{II}}\sin(Ka)$ $QA_{\text{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\text{II}}\sin(Ka)$

(a) $\frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}$ $-\frac{2m}{\hbar^2}E\varphi_{\text{I}}(x)$ $-\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\text{II}})\varphi_{\text{II}}(x)$ $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{12}$

$\frac{11 - 2\sqrt{6}}{12}$ $A_{\text{I}}\cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}Ex}\right) + B_{\text{I}}\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}Ex}\right)$ $A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}$ (c)

$A_{\text{II}}\cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\text{II}})x}\right) + B_{\text{II}}\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\text{II}})x}\right)$ $A = \sqrt{\frac{3}{b}}$ (a) $A = 2\alpha^{3/2}$ (b)

(b) (c) et (d) (b) $QA_{\text{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\text{II}}\cos(Ka)$ $A = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ $1 - 5\mathrm{e}^{-2}$

8×10^{-6} m $A = \frac{1}{2a}$ $QA_{\text{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\text{II}}\sin(Ka)$ $1{,}7 \times 10^{-193}$ A 0

► Réponses et corrigés page 414

Physique du laser

Prérequis
Modèle de l'onde plane progressive harmonique (OPPH).
Module d'onde k et longueur d'onde λ du rayonnement : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Constantes utiles
→ Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
→ Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
→ Constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

À propos du mode fondamental gaussien

La vibration scalaire d'une onde associée au mode gaussien fondamental peut s'écrire, à une constante multiplicative près, pour une propagation suivant les z croissants, en notant r la distance à l'axe (Oz),

$$\psi(r,z,t) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w^2(z)}\right) \exp\Big(\mathrm{j}(\omega t - \phi(r,z))\Big),$$

où la phase totale s'écrit

$$\phi(r,z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_\mathrm{R}}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)}.$$

La longueur w_0 est appelé le *rayon de pincement* (ou de ceinture) ou *waist du faisceau gaussien*, et la longueur z_R est appelée la *longueur de Rayleigh*.

L'expression $R(z) = z\left(1 + \dfrac{z_\mathrm{R}^2}{z^2}\right)$ définit le rayon de courbure du front d'onde et $w(z) = w_0\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}}$ définit une mesure de l'extension radiale du faisceau.

Entraînement 22.1 — Influence de la longueur d'onde sur la directivité.

Un faisceau gaussien est caractérisé par une longueur de Rayleigh $z_\mathrm{R} = 5{,}00\,\mathrm{cm}$, reliée au waist w_0 du laser par la relation

$$z_\mathrm{R} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.$$

Calculer le waist pour :

a) un laser bleu de longueur d'onde $\lambda = 450\,\mathrm{nm}$

.....

b) un laser à CO_2 avec $\lambda = 10{,}6\,\mu\mathrm{m}$

.....

Entraînement 22.2 — Modèle équivalent d'un faisceau gaussien pour $z \ll z_R$.

a) Donner un équivalent simple de $R(z)$ quand $z \ll z_R$ .....

b) Donner un équivalent simple de $w(z)$ au plus bas ordre en z quand $z \ll z_R$.

.....

c) On rappelle que pour $x \ll 1$, on a $\arctan(x) \approx x$.

Déterminer l'expression de $\phi(r,z)$ au plus bas ordre en z quand $z \ll z_R$ et $r^2 \ll \dfrac{z_R}{k}$.

.....

d) Déduire des questions précédentes l'expression de $\psi(z,t)$ pour $z \ll z_R$, $r \ll w_0$ et $z_R \gg kr^2$.

.....

e) À quel type d'onde correspond l'expression précédente de ψ ?

(a) une onde progressive plane harmonique

(b) une onde progressive sphérique harmonique

.....

Entraînement 22.3 — Modèle équivalent d'un faisceau gaussien pour $z \gg z_R$.

a) Donner un équivalent simple de $R(z)$ quand $z \gg z_R$. .....

b) Donner un équivalent simple de $w(z)$ quand $z \gg z_R$. .....

c) On rappelle que $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'expression de $\phi(r,z)$ au plus bas ordre en z quand $z \gg z_R$ et $z \gg kr^2$.

.....

d) Déduire des questions précédentes l'expression de $\psi(z,t)$ pour $z \gg z_R$, $r \ll w_0$ et $z \gg kr^2$.

.....

e) Quel est le type d'onde associé au faisceau laser pour $z \gg z_R$, $r \ll w_0$ et $z \gg kr^2$?

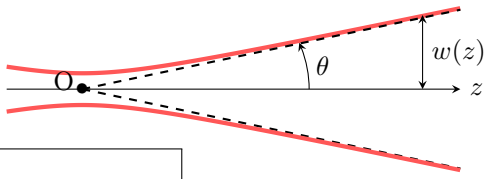
(a) une onde progressive plane harmonique.

(b) une onde progressive sphérique harmonique.

.....

Entraînement 22.4 — Divergence d'un faisceau gaussien pour $z \gg z_R$.

On suppose que $z \gg z_R$ et on considère que l'extension radiale de l'onde gaussienne est limitée par $w(z)$. L'angle θ, représenté sur la figure ci-contre, définit la divergence angulaire du faisceau.



a) Exprimer $\tan(\theta)$ en fonction de w_0 et z_R .....

b) La divergence θ du faisceau laser :

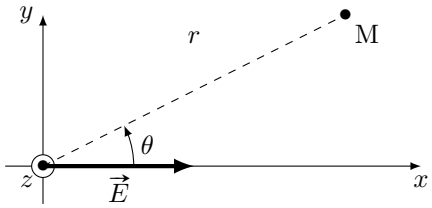
(a) est d'autant plus grande que z_R est plus grand. (b) est d'autant plus grande que z_R est plus petit. (c) indépendante de z_R.

.....

Entraînement 22.5 — Le modèle du faisceau gaussien.

Le champ électrique complexe associé à l'onde électromagnétique d'un laser se propageant suivant les z croissants en un point $M(r, \theta, z)$ s'écrit

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}(r,z)\exp(j(kz-\omega t))\vec{e_x}.$$



Dans cette expression, l'amplitude complexe $\underline{E}(r,z)$ s'écrit :

$$\underline{E}(r,z) = E_0 \frac{jz_R}{z+jz_R}\exp\left(-jk\frac{r^2}{2(z+jz_R)}\right),$$

où z_R est une constante positive appelée longueur de Rayleigh et E_0 un réel positif.

a) Déterminer θ pour que le complexe $-jk\dfrac{r^2}{2(z+jz_R)}$ s'écrive sous la forme $\dfrac{-kr^2 z_R}{2(z^2+z_R^2)} - j\theta$; on exprimera θ en fonction de k, r, z et z_R .....

On souhaite écrire le carré du module du terme exponentiel $\exp\left(-jk\dfrac{r^2}{2(z+jz_R)}\right)$ de $\underline{E}(r,z)$ sous la forme :

$$\left|\exp\left(-jk\frac{r^2}{2(z+jz_R)}\right)\right|^2 = \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right).$$

b) Exprimer $w^2(z)$ en fonction de k, z et z_R .....

c) On écrit $w(z)$ sous la forme $w(z) = w_0\sqrt{1+\dfrac{z^2}{z_R^2}}$.

Exprimer la constante w_0 ($w_0 > 0$) en fonction de z_R et λ .....

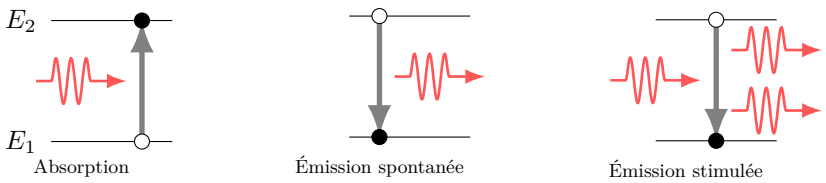
d) On note $A(z) = \left|E_0\dfrac{jz_R}{z+jz_R}\right|$.

Exprimer le produit $A(z)w(z)$ en fonction de E_0 et w_0 .....

Interaction lumière-matière, l'effet laser

Lorsqu'une onde lumineuse traverse un milieu matériel, elle interagit avec les atomes le constituant.

On considère pour simplifier que les atomes peuvent peupler seulement deux niveaux d'énergie : le niveau 1 fondamental d'énergie E_1 et un niveau 2 excité d'énergie E_2.



Il existe trois phénomènes permettant ces transitions énergétiques :

- passage de 1 à 2 par absorption d'un photon d'un rayonnement avec la probabilité par atome et par unité de temps $\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t} = B_{12}u_\nu$, où u_ν est la densité spectrale d'énergie du rayonnement, c'est-à-dire l'énergie électromagnétique par unité de volume et de fréquence du rayonnement, qui s'exprime en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-3}\cdot\mathrm{Hz}^{-1}$;
- passage de 2 à 1 par émission spontanée d'un photon avec la probabilité par atome et par unité de temps $\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t} = A_{21}$;
- passage de 2 à 1 par émission stimulée causée par un rayonnement avec la probabilité par atome et par unité de temps $\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t} = B_{21}u_\nu$.

Le nombre d'atomes dans un état quelconque b venant d'un état quelconque a est lié à la probabilité d'occurrence du phénomène impliqué de telle manière que $\mathrm{d}N_b = \mathrm{d}P_{ab}N_a$.

Entraînement 22.6 — Deux intégrales utiles.

Soit α un réel positif.

a) L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t$ vaut :

(a) $I = 1$ (b) $I = \alpha$ (c) $I = \dfrac{1}{\alpha}$ (d) $I = -\dfrac{1}{\alpha}$

b) En effectuant une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty t\exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t$$

parmi les valeurs suivantes.

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b v(t)u'(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) $J = 1$ (b) $J = \alpha$ (c) $J = \dfrac{1}{\alpha}$ (d) $J = \dfrac{1}{\alpha^2}$

Entraînement 22.7 — Durée de vie d'un niveau excité.

On considère deux niveaux atomiques d'énergie E_1 et E_2 (avec $E_2 > E_1$), dont les nombres d'atomes par unité de volume sont notés respectivement N_1 et N_2.

On ne prend en compte ici pour l'interaction lumière-matière que le phénomène d'émission spontanée.

On admet que la durée de vie moyenne du niveau 2, notée τ, est $\tau = \dfrac{1}{A_{21}}$.

a) Exprimer en fonction de A_{21}, $N_2(t)$ et $\mathrm{d}t$, la variation $\mathrm{d}N_2(t)$ de la population d'atomes sur le niveau 2 pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

b) À l'instant $t = 0$, la population d'atomes sur le niveau 2 est N_2^0.

Intégrer l'équation différentielle vérifiée par $N_2(t)$ et en déduire la loi $N_2(t)$ en fonction de A_{21}, N_2^0 et t.

.....

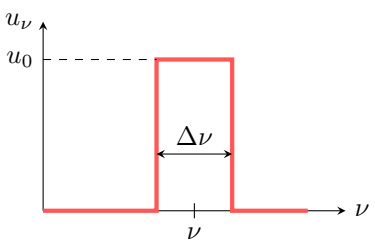
c) On définit la durée de demi-vie du niveau 2 comme la durée $T_{1/2}$ telle que $N_2\big(T_{1/2}\big) = \dfrac{N_2^0}{2}$.

Exprimer $T_{1/2}$ en fonction de τ .....

Entraînement 22.8 — Lien entre énergie spectrale et flux surfacique de photons.

Considérons, ce qui est typiquement le cas pour un rayonnement laser, que la densité spectrale d'énergie volumique u_ν ne prend de valeurs notables, et est supposée constante u_0, que pour des fréquences centrées sur la valeur ν, comprises entre $\nu - \Delta\nu/2$ et $\nu + \Delta\nu/2$.

On note c la célérité de la lumière au sein du faisceau laser, S la section du faisceau et $\mathcal{J}$ le flux surfacique de photons (nombre de photons du rayonnement par unité de temps et unité de surface du faisceau).



a) Exprimer en fonction de u_0 et $\Delta\nu$ l'énergie électromagnétique volumique ϖ du rayonnement considéré.

.....

b) En exprimant l'énergie électromagnétique des photons contenus dans le volume $\mathrm{d}V = Sc\,\mathrm{d}t$ balayé pendant la durée $\mathrm{d}t$ de deux manières différentes, l'une faisant intervenir l'éclairement $\mathcal{E}$ du faisceau (puissance moyenne surfacique) et l'autre l'énergie électromagnétique volumique ϖ, exprimer u_0 en fonction de c, $\Delta\nu$, $h\nu$ et $\mathcal{J}$.

On rappelle que $\mathcal{E} = h\nu\mathcal{J}$.

.....

Notations.

Pour les deux entraînements suivants, on considère les définitions et notations suivantes.

- On définit le flux surfacique de photons, noté $\mathcal{J}$, comme le nombre de photons du rayonnement par unité de temps et unité de surface du faisceau.
- La probabilité d'absorption par atome et par unité de temps est souvent notée $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{12}}{\mathrm{d}t} = \sigma_{12}\mathcal{J}$; la probabilité d'émission induite par atome et par unité de temps est notée $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{21}}{\mathrm{d}t} = \sigma_{21}\mathcal{J}$.
- On supposera que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, qu'on note simplement σ.

Entraînement 22.9 — Éclairement d'un laser et flux surfacique de photons.

On note $\mathcal{E}$ l'éclairement d'un faisceau laser, défini comme la puissance moyenne rayonnée par unité de surface.

a) Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}$ à l'aide du faisceau au flux surfacique $\mathcal{J}$ de photons et de l'énergie $h\nu$ d'un photon.

.....

b) Quelle est la dimension de $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{12}}{\mathrm{d}t}$ ou de $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{21}}{\mathrm{d}t}$?

.....

c) En déduire la dimension de σ.

.....

Entraînement 22.10 — Équations du laser pour un système à deux niveaux.

On considère un système à deux niveaux d'énergie dans une cavité fermée de section S, caractérisé par les populations atomiques volumiques $N_1(t)$ sur le niveau 1 d'énergie E_1 et $N_2(t)$ sur le niveau 2 d'énergie E_2 avec $E_2 > E_1$, tel que $N_1(t) + N_2(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$.

On néglige ici le phénomène d'émission spontanée devant ceux d'absorption et d'émission stimulée.

On note c la célérité de la lumière dans la cavité.

a) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$ en fonction de σ, $\mathcal{J}$, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ .....

b) En déduire la loi $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$ en fonction de σ, $\mathcal{J}$ et $D(t)$, où $D(t) = N_2(t) - N_1(t)$.

.....

c) Exprimer l'évolution $\mathrm{d}\mathcal{N}(t)$ du nombre de photons émis dans le volume $\mathrm{d}V = Sc\,\mathrm{d}t$, balayé par le rayonnement dans la cavité pendant la durée $\mathrm{d}t$ en fonction de c, σ, S, $\mathcal{J}$, $D(t)$ et $\mathrm{d}t$.

.....

d) Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de c, σ, $\mathcal{J}$ et $D(t)$ .....

e) Sachant que pour un système à deux niveaux d'énergie, on ne peut qu'avoir $D(t) < 0$, un régime stationnaire dans la cavité est possible pour :

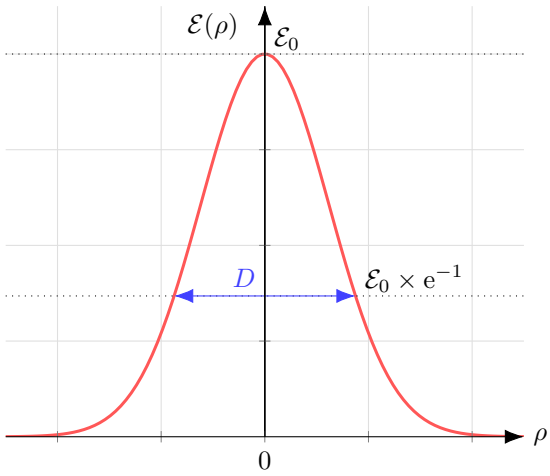
(a) $\mathcal{J} > 0$ (b) $\mathcal{J} < 0$ (c) $\mathcal{J} = 0$

.....

Considérations énergétiques

Entraînement 22.11 — Mesure du diamètre d'un faisceau gaussien.

À partir de mesures de puissances, on cherche à obtenir le diamètre D d'un faisceau laser gaussien qui correspond au diamètre pour lequel l'éclairement du faisceau vaut $\mathcal{E}_0 \times \mathrm{e}^{-1}$, avec $\mathcal{E}_0$ l'éclairement maximal au centre du faisceau comme illustré ci-contre.



On mesure d'abord la puissance $P = 5{,}00\,\mathrm{mW}$ contenue dans le faisceau à l'aide d'un détecteur dont le diamètre est beaucoup plus grand que le faisceau. Cela revient, pour un laser continu, à intégrer son éclairement sur un disque de rayon ρ infini et diviser par une durée $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$, soit

$$P = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathcal{E}_0 \mathrm{e}^{-4\frac{\rho^2}{D^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

a) Réexprimer P en effectuant le changement de variable $x = 4\dfrac{\rho^2}{D^2}$ .....

b) Calculer l'intégrale et exprimer P en fonction de $\mathcal{E}_0$, D et Δt .....

On mesure ensuite la puissance $P' = 4{,}15\,\mathrm{mW}$ contenue dans le faisceau à l'aide du même détecteur mais occulté par un diaphragme de diamètre $d = 2{,}00\,\mathrm{cm}$. Cela correspond à intégrer son éclairement sur un cercle de rayon $\rho = \dfrac{d}{2}$, soit

$$P' = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} \mathcal{E}_0 \mathrm{e}^{-4\frac{\rho^2}{D^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

c) Utiliser les résultats précédents pour exprimer P' en fonction de P, D et d.

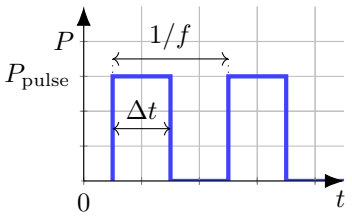
.....

d) Exprimer D en fonction de d, P et P' .....

e) Calculer D à partir des valeurs fournies .....

Entraînement 22.12 — Énergies et puissances.

On s'intéresse à une source laser délivrant des impulsions de durée Δt avec une cadence f exprimée en Hz. La puissance moyenne délivrée par la source est notée $\overline{P}$. La puissance d'une impulsion est notée P_{pulse} et correspond au rapport de l'énergie fournie pendant la durée de l'impulsion et cette durée Δt.



a) Exprimer l'énergie contenue dans une impulsion E_{pulse} en fonction de $\overline{P}$ et f .

b) Exprimer la puissance d'une impulsion P_{pulse} en fonction de $\overline{P}$, f et Δt .....

c) À l'aide de la réponse précédente, classer ces sources par ordre croissant de P_{pulse}.

(a) $\overline{P}_a = 20\,\text{W}$ $f_a = 20\,\text{kHz}$ $\Delta t_a = 10\,\text{ns}$

(b) $\overline{P}_b = 8{,}0\,\text{W}$ $f_b = 10\,\text{kHz}$ $\Delta t_b = 2{,}0\,\text{ns}$

(c) $\overline{P}_c = 1{,}8\,\text{W}$ $f_c = 10\,\text{kHz}$ $\Delta t_c = 700\,\text{ps}$

(d) $\overline{P}_d = 1{,}5\,\text{W}$ $f_d = 80\,\text{MHz}$ $\Delta t_d = 140\,\text{fs}$.

.....

Cavités laser

Entraînement 22.13 — Intensité transmise par une cavité.

Une onde lumineuse S_0 de longueur d'onde λ est orientée vers une cavité constituée de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ de coefficients de transmission et réflexion t_1, r_1 et t_2, r_2. Cette cavité a un indice de réfraction n et une longueur L.

La somme des amplitudes en sortie de la cavité est $S = S_0 t_1 t_2 \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\right)^k$.

Ici, on cherche la valeur de l'intensité en sortie de la cavité I, qu'on prendra égale à la norme au carré de la somme des amplitudes $|S|^2$.

a) Utiliser la formule $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ pour réexprimer S .....

b) Exprimer $I = |S|^2$ en fonction de S_0, t_1, t_2, r_1, r_2 et $\sin^2\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$.

On rappelle que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ *et* $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

.....

En divisant l'expression de I obtenue précédemment par $(1 - r_1 r_2)^2$ on peut la mettre sous la forme

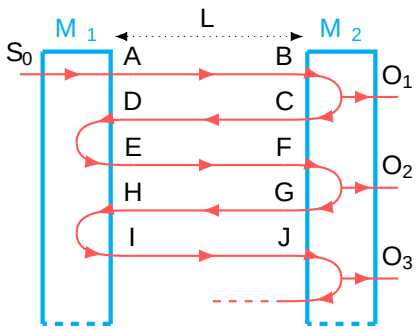
$$I = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

c) Exprimer $I_{\max}$ en fonction de S_0, t_1, t_2, r_1 et r_2 .....

d) Exprimer m en fonction de t_1, t_2, r_1 et r_2 .....

Entraînement 22.14 Amplitudes transmises par une cavité.

Une onde lumineuse S_0 de longueur d'onde est orientée vers une cavité constituée de deux miroirs M_1 et M_2 de coe cients de transmission et ré exion t_1, r_1 et t_2, r_2. Cette cavité a un indice de réfraction n et une longueur L.



À chaque transmission, l'amplitude complexe de l'onde est multipliée par t ; à chaque ré exion elle est multipliée par r ; à chaque fois qu'elle parcourt la cavité elle est multipliée par $e^{i = 2}$ avec $= 4 \frac{nL}{}$.

Déterminer l'amplitude complexe de l'onde aux points suivants.

a) Au point A

(a) $S_0 r_1$ (c) $S_0 r_2$

(b) $S_0 t_1$ (d) $S_0 t_2$

b) Au point C

(a) $S_0 t_1 r_2 e^{i = 2}$ (c) $S_0 t_1 t_2 e^{i = 2}$

(b) $S_0 t_1 r_1 e^{i = 2}$ (d) $S_0 t_1 t_2 e^{i}$

c) Au point H

(a) $S_0 t_1 r_1 r_2^2 e^{i2}$ (c) $S_0 t_1 r_1^2 r_2 e^{i3}$

(b) $S_0 t_1 r_1 r_2^2 e^{i2}$ (d) $S_0 t_1 r_1 r_2^2 e^{i3}$

d) Au point O_1

(a) $S_0 t_1 t_2 e^{i}$ (c) $S_0 t_1 r_2 e^{i = 2}$

(b) $S_0 t_1 r_1 e^{i = 2}$ (d) $S_0 t_1 t_2 e^{i = 2}$

e) Au point O_2

(a) $S_0 t_1 t_2 r_1 e^{i}$ (c) $S_0 t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i3 = 2}$

(b) $S_0 t_1 t_2 r_2 e^{i}$ (d) $S_0 t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i3 = 2}$

f) Au point O_3

(a) $S_0 t_1 t_2 r_1 r_2^2 e^{i5 = 2}$ (c) $S_0 t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 e^{i5 = 2}$

(b) $S_0 t_1 t_2 r_1 r_2^2 e^{i2}$ (d) $S_0 t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 e^{i2}$

Entraînement 24.5 — Propagation idéale.

On donne ci-dessous l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$ dans différentes situations.

(a) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\dfrac{ne^2}{m}\vec{E}$

(b) $\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

(c) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}$

(d) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Identifier celle(s) qui traduit(sent) une propagation idéale (sans dispersion ni absorption) ..

Entraînement 24.6 — Dispersion ou absorption ?.

On donne la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$ reliant le vecteur d'onde complexe $\underline{k}$ à la pulsation ω dans différentes situations. Elle est issue de l'équation d'onde régissant la propagation d'une onde mécanique transverse le long d'une corde vibrante.
Indiquer dans chaque cas s'il y a absorption et/ou dispersion au cours de la propagation.

a) $\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{c}$ .....

b) $\underline{k} \simeq \dfrac{\omega}{c} - \dfrac{1}{2}\mathrm{j}\dfrac{h}{\mu c}$ .....

c) $\underline{k} = k \simeq \dfrac{\omega}{c} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma\omega^3}{T_0c^3}$ .....

d) $\underline{k} \simeq \dfrac{\omega}{c} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma\omega^3}{T_0c^3} - \dfrac{1}{2}\mathrm{j}\dfrac{h}{\mu c}$ .....

Entraînement 24.7 — Ondes sonores dans un fluide.

On envisage la propagation unidimensionnelle d'une onde sonore dans un fluide de masse volumique μ_0.
On suppose que la surpression acoustique p dans le fluide est de la forme :

$$p = p_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)}$$

Établir la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$ vérifiée par $p(x,t)$ dans chacune des situations suivantes.

a) Fluide idéal : $c^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ .....

b) Fluide de viscosité η : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \dfrac{\eta}{\mu_0 c^2}\dfrac{\partial^3 p}{\partial t\partial x^2}$ .....

c) Pavillon de section droite $S_0\mathrm{e}^{mx}$: $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\dfrac{1}{S_0\mathrm{e}^{mx}}\dfrac{\partial}{\partial x}(S_0\mathrm{e}^{mx}\dfrac{\partial p}{\partial x})$ ...

d) Écoulement de vitesse u : $(c^2 - u^2)\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2u\dfrac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}$ .....

Vitesses de propagation

Entraînement 24.8 — Vitesse de phase.

On étudie la propagation des ondes de surface dans un bassin de profondeur h contenant un fluide de masse volumique μ et de tension superficielle γ.

Dans chacune des situations suivantes, pour lesquelles on donne la relation de dispersion $\omega(k)$ en absence de tout phénomène d'absorption, déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\phi(\omega) = \dfrac{\omega}{k}$.

a) Aux courtes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu} \times kh$.

.....

b) Aux courtes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu}$.

.....

c) Aux grandes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = gk \times kh$.

.....

d) Aux grandes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = gk$.

.....

Entraînement 24.9 — Relation de Klein-Gordon.

La propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma dilué est conditionnée à haute fréquence par la relation de dispersion suivante : $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{c^2}$.

On donne les représentations graphiques suivantes :

Figure (a)

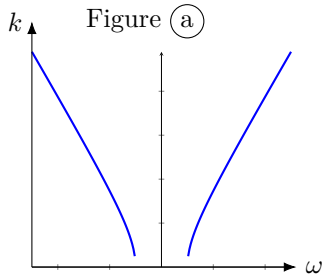


Figure (b)

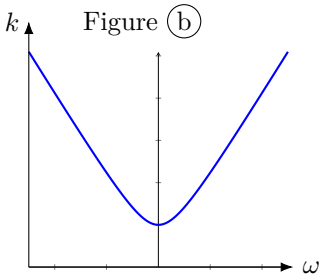
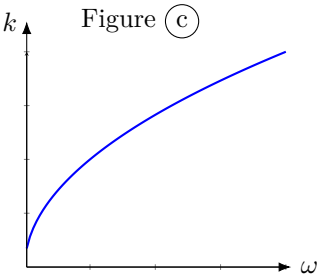


Figure (c)



a) Identifier le graphe représentant la fonction $k(\omega)$ .....

b) Calculer la vitesse de phase $v_\phi(\omega) = \dfrac{\omega}{k}$ .....

c) Calculer la vitesse de groupe $v_\mathrm{g}(\omega) = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ .....

Entraînement 24.10 — Vitesse de groupe.

On étudie la propagation des ondes de surface dans un bassin de profondeur h contenant un fluide de masse volumique μ et de tension superficielle γ.

Dans chacune des situations suivantes, pour lesquelles on donne la relation de dispersion $\omega(k)$ en absence de tout phénomène d'absorption, déterminer l'expression de la vitesse de groupe $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$.

a) Aux courtes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu} \times kh$ .....

b) Aux courtes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu}$ .....

c) Aux grandes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = gk \times kh$ .....

d) Aux grandes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = gk$ .....

Phénomènes de réflexion

Entraînement 24.11 — Propagation électrique dans un câble coaxial.

Un câble coaxial idéal est modélisé par une ligne bifilaire de capacité linéique Γ et d'inductance linéique Λ.

a) Identifier l'expression de son impédance caractéristique Z_c par analyse dimensionnelle :

(a) $Z_c = \sqrt{\Gamma\Lambda}$ (b) $Z_c = \dfrac{\Gamma}{\Lambda}$ (c) $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$ (d) $Z_c = \Lambda\Gamma$ (e) $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$ (f) $Z_c = \Gamma\Lambda$ (g) $Z_c = \dfrac{\Lambda}{\Gamma}$ (h) $Z_c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$

.....

Le câble est refermé sur une charge d'impédance Z. On note $R = \left|\dfrac{Z - Z_c}{Z + Z_c}\right|^2$ le coefficient de réflexion en puissance d'une onde électrique au point de jonction.

b) En cas de réflexion totale de l'onde électrique ($R = 1$), que vaut Z ? .....

c) En cas d'adaptation d'impédances ($R = 0$), que vaut Z ? .....

d) Lorsque la charge est purement réactive (Z imaginaire pure), que vaut R ? .....

On note T le coefficient de transmission en puissance.

e) Lorsque la charge est purement résistive (Z réelle), que vaut T ? .....

Entraînement 24.12 — Calcul de coefficients.

Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance sonore entre deux milieux d'impédances acoustiques Z_1 et Z_2 s'expriment :

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

On rappelle que l'impédance acoustique Z d'un fluide est donnée par $Z = \mu c$ où μ désigne sa masse volumique et c la célérité de l'onde sonore, et on donne $\mu_{\text{air}} = 1{,}3\,\text{kg/m}^3$, $c_{\text{air}} = 340\,\text{m/s}$, $\mu_{\text{eau}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$, $c_{\text{eau}} = 1\,500\,\text{m/s}$.

a) Calculer R à l'interface air/eau .....

b) Calculer R à l'interface eau/air .....

On admet que l'impédance acoustique Z d'un solide s'écrit $Z = \rho c$ où ρ désigne sa masse volumique et c la célérité de l'onde sonore, et on donne $\rho = 2\,400\,\text{kg/m}^3$ et $c = 3\,100\,\text{m/s}$ pour le béton.

c) Calculer T à l'interface air/béton .....

Entraînement 24.13 — Cavité électromagnétique.

On envisage la propagation d'une onde électromagnétique entre deux plans conducteurs parfaits placés en $z = 0$ et $z = L$. L'onde est stationnaire dans la direction (Oz) et reste transverse dans la cavité supposée vide. On recherche donc son champ électrique de la forme $\vec{E} = E(z)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$.

On rappelle l'équation de d'Alembert : $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$ .....

Les conditions aux limites $E(z = 0) = 0$ et $E(z = L) = 0$ issues de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique aux interfaces imposent la solution $E(z) = E_0 \sin(Kz)$ où $E_0 \in \mathbb{R}$ avec $K^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

b) Établir les expressions de K en fonction de L .....

c) Établir la forme définitive du champ électrique $\vec{E}$ .....

La pulsation de coupure ω_c de la cavité est donnée par la relation $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$. On appelle f_{c1} la fréquence de coupure du mode propre de rang $p = 1$ de cette onde transverse électrique si $L = 3\,\text{cm}$.

d) Calculer la fréquence f_{c1} .....

Phénomènes dissipatifs

Entraînement 24.14 — Profondeur de pénétration.

On envisage la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω dans un milieu conducteur de conductivité γ. Cette onde ne peut pénétrer le conducteur que sur une profondeur caractéristique δ, appelée épaisseur de peau, qui dépend de γ, $\omega = 2\pi f$ et de la perméabilité magnétique du vide μ_0.

a) Identifier l'expression de δ par analyse dimensionnelle.

(a) $\delta = \sqrt{\dfrac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$

(b) $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$

(c) $\delta = \dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}$

(d) $\delta = \sqrt{\dfrac{2\gamma}{\mu_0\omega}}$

(e) $\delta = \dfrac{\gamma\omega}{2\mu_0}$

(f) $\delta = \dfrac{2\omega}{\mu_0\gamma}$

.....

b) Calculer δ pour du cuivre ($\gamma = 5{,}96 \times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$, $f = 50$ Hz). .....

Entraînement 24.15 — Résonateur de Helmholtz.

On envisage la propagation d'une onde dans une cavité résonnante de volume V en contact avec le milieu extérieur par une unique surface de section S situé au bout d'un goulot de hauteur caractéristique L. Cette cavité contient un gaz caractérisé par une vitesse du son c_s. La fréquence de résonnance caractéristique de ce résonnateur est f_0.

a) Identifier l'expression de f_0 par analyse dimensionnelle.

(a) $f_0 = \dfrac{V}{2\pi}\sqrt{\dfrac{A}{c_s L}}$

(b) $f_0 = \dfrac{A}{2\pi}\sqrt{\dfrac{L}{V c_s}}$

(c) $f_0 = \dfrac{L}{2\pi}\sqrt{\dfrac{c_s}{AV}}$

(d) $f_0 = \dfrac{c_s}{2\pi}\sqrt{\dfrac{V}{AL}}$

(e) $f_0 = \dfrac{A}{2\pi}\sqrt{\dfrac{c_s}{VL}}$

(f) $f_0 = \dfrac{c_s}{2\pi}\sqrt{\dfrac{A}{VL}}$

.....

b) Calculer f_0 pour $c_s = 320\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $A = 10{,}0\,\mathrm{cm^2}$, $L = 100\,\mathrm{mm}$ et $V = 1{,}00\,\mathrm{L}$ .....

Entraînement 24.16 — Propagation diffusive.

On envisage la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur de conductivité γ.

On donne les équations de Maxwell aux fréquences usuelles :

Équation de Maxwell-Gauss (MG)	Équation de Maxwell-Thompson (MΦ)
$\operatorname{div}\vec{E} = 0$	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$
Équation de Maxwell-Faraday (MF)	**Équation de Maxwell-Ampère (MA)**
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E}$

L'analyse vectorielle stipule que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$.

a) Simplifier cette relation en injectant (MG) .....

Le théorème de Schwarz assure que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B})$.

b) Exploiter (MF) et (MA) pour exprimer $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E})$ .....

c) En déduire l'équation d'onde électrique dans le conducteur ...

Réponses mélangées

$\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)}$ (c) $\sqrt{\dfrac{\gamma k}{\mu}}$ $E_0 \sin(\dfrac{n\pi}{L}z)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$ $k'' = 1/\delta$

0,99 Absorption et dispersion $\dfrac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ Pas de dispersion ni d'absorption

$\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{u \pm c}$ Absorption sans dispersion $\dfrac{4ZZ_c}{(Z+Z_c)^2}$ $\underline{k} = \dfrac{\omega}{c}(1 + \mathrm{j}\omega\dfrac{\eta}{\mu_0 c^2})^{-1/2}$

(b)(c)(d) $\sqrt{\dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}}$ $\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Dispersion sans absorption

$\sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{g}{\omega}$ (a) (b) (e) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$ $\dfrac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}(z) = (k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2})E$

$k' = \omega/c$ $c^2\dfrac{f''}{f} = \dfrac{g''}{g}$ 0 ou $+\infty$ (a) (a)(c) $\dfrac{g}{2\omega}$ $\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{c}$

$\sqrt{gh}$ (c) 0,99 (b) $c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ $k = \omega/c$ 9,2 mm

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = -\mu_0\gamma\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{E})$ (f) 161 Hz $v_g = \dfrac{3\omega}{2k}$ (a) (b) Z_c

$\dfrac{p\pi}{L}$ $\omega^2 = \underline{k}^2c^2 + \mathrm{j}mc^2\underline{k}$ $\sqrt{gh}$ $2\dfrac{\omega}{k}$ 1 5 GHz $2{,}4 \times 10^{-4}$

► Réponses et corrigés page 432

Cinématique des fluides

Prérequis
Débit volumique. Débit massique. Conservation du débit.

Constantes utiles
→ Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
→ Masse molaire de l'eau : $M_{\text{eau}} = 18{,}0\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Autour du débit

Entraînement 25.1 — Premiers calculs.

On prélève pendant 3 minutes et 34 secondes de l'eau à un robinet à l'aide d'un récipient. Le volume prélevé est alors de 15,4 L.

a) Calculer le débit volumique associé, en $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ .....

b) Calculer le débit massique associé, en $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .....

Entraînement 25.2 — Bataille de débits.

Parmi ces trois écoulements, quel est celui dont le débit volumique est le plus grand ?

(a) 100 kg d'eau durant 50 min
(b) 0,2 mol d'eau durant 3,0 ms
(c) 18 m^3 d'eau durant 2 jours

.....

Entraînement 25.3 — Fluide mystérieux.

Un fluide inconnu s'écoule dans une canalisation de section circulaire de diamètre $d = 6\,\text{mm}$.

On mesure un débit massique $D_m = (75 \pm 5)\,\text{g} \cdot \text{s}^{-1}$ et la vitesse de l'écoulement est estimée à $v = 2\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On rappelle que l'expression du débit massique D_m dépend de la vitesse v du fluide, de la masse volumique ρ du fluide et de la surface S de la section de la canalisation est $D_m = \rho S v$.

Les masses volumiques des fluides possibles sont données à température ambiante dans le tableau ci-dessous :

Fluide	miel	eau	glycérine	huile
Masse volumique ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	1,4	1,0	1,3	0,9

Quel est le fluide en circulation dans la canalisation ?

(a) la glycérine
(b) l'huile ou l'eau
(c) le miel ou la glycérine
(d) aucun des fluides du tableau

.....

Entraînement 25.4 — Débit dans une gaine rectangulaire.

Considérons de l'air circulant de manière incompressible dans une gaine rectangulaire de largeur $l_1 = 30\,\text{cm}$ et de hauteur $h_1 = 50\,\text{cm}$. Le débit volumique d'eau mesuré est de $4\,700\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

a) Calculer la vitesse moyenne de l'air dans la conduite .....

En sortie, la gaine rectangulaire se réduit : ses dimensions sont alors $l_2 = 20$ cm et $h_2 = 30$ cm.

b) Calculer la nouvelle vitesse moyenne de l'air .....

Entraînement 25.5 — Écoulement dans une conduite cylindrique.

On considère un fluide incompressible, de masse volumique ρ, en écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R et d'axe (Oz). L'écoulement peut être décrit par un champ de vitesse de type « Poiseuille cylindrique »

$$\vec{v}(M) = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e_z}$$

où V_0 est une constante. On note v la norme du vecteur vitesse.

a) Quelle est la formule correcte pour calculer le débit massique à travers une section droite de cet écoulement ?

(a) $D_m = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho v \times r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

(b) $D_m = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho v \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

(c) $D_m = \int_0^{\pi}\int_0^R \rho v \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Exprimer dans ce cas le débit massique, en fonction de ρ, V_0 et R .....

Champ de vitesse de différents écoulements

On notera, en coordonnées cartésiennes, un champ de vitesse sous la forme :

$$\vec{v}(x,y,z,t) = v_x(x,y,z,t)\vec{e_x} + v_y(x,y,z,t)\vec{e_y} + v_z(x,y,z,t)\vec{e_z}.$$

Entraînement 25.6 — Écoulement stationnaire ou non ?

Un écoulement stationnaire vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Sachant que ω, τ et v_0 sont des constantes, lequel parmi ces écoulements n'est pas stationnaire ?

(a) $\vec{v}(x,y,z,t) = \omega y\vec{e_x}$

(b) $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$

(c) $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\sin(\omega t)\vec{e_y}$

(d) $\vec{v}(x,y,z,t) = \frac{y}{\tau}\vec{e_y}$

.....

Entraînement 25.7 — Caractère divergent d'un écoulement.

Un écoulement incompressible vérifie la relation suivante en tout point :

$$\text{div}(\vec{v}(x,y,z,t)) = \frac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial z} = 0.$$

On considère l'écoulement uniforme suivant : $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer la divergence de cet écoulement .....

b) Est-ce que l'écoulement est incompressible ? .....

c) Un écoulement caractérisé par son champ de vitesse $\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}$ ($k \neq 0$ constante) est-il incompressible ?

.....

d) Un écoulement caractérisé par un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = kz\vec{e_x}$ (dit écoulement de Couette plan) est-il incompressible ?

.....

Entraînement 25.8 — Caractère rotationnel d'un écoulement uniforme.

Dans un écoulement irrotationnel, le rotationnel du champ de vitesse est nul en tout point. On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

On étudie l'écoulement uniforme défini par $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer le rotationnel de ce champ de vitesse .....

b) Est-ce que l'écoulement est irrotationnel ? .....

Si l'écoulement est irrotationnel, alors on lui associe un potentiel des vitesses $\phi(x,y,z,t)$.

$$\vec{v}(x,y,z,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi(x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

c) Donner l'expression de ϕ d'un écoulement uniforme sachant qu'à l'origine, $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

.....

Entraînement 25.9 — Caractère rotationnel d'autres écoulements.

a) Un écoulement est caractérisé par son champ de vitesse $\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}$ où k est une constante. Calculer le rotationnel de ce champ de vitesse.

.....

b) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.

.....

c) Un écoulement (dit de Couette plan) caractérisé par son champ de vitesse de la forme $\vec{v} = kz\vec{e_x}$ est-il irrotationnel ?

.....

d) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.

.....

Entraînement 25.10 — Accélération d'une particule de fluide.

L'accélération d'une particule de fluide $\vec{a}_{\mathrm{M}}(t)$ se calcule avec la dérivée particulaire du champ de vitesse

$$\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = \frac{\mathrm{D}\vec{v}_{\mathrm{M}}(t)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t} + \left(\vec{v}(x,y,z,t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(x,y,z,t).$$

On étudie un écoulement uniforme de la forme $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer l'accélération locale de la particule $\dfrac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t}$ .....

b) Calculer l'accélération convective de la particule $\left(\vec{v}(x,y,z,t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(x,y,z,t)$.

.....

c) En déduire l'accélération de la particule .....

Entraînement 25.11 — Écoulement avec cisaillement.

Un écoulement avec cisaillement a un caractère rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}(x)) = \omega\vec{e_y} \neq \vec{0}$.

a) Exprimer le champ de vitesse $\vec{v}(x)$ de l'écoulement sachant que $\vec{v}(0) = \vec{0}$.

.....

b) L'écoulement est-il incompressible ? .....

Entraînement 25.12 — Accélération convective d'un écoulement de Poiseuille plan.

On étudie un écoulement de Poiseuille plan caractérisé par un champ de vitesse de la forme

$$\vec{v}(z) = v_0\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x},$$

avec une longueur L constante.

a) À quoi est égal $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2(z)}{2}\right)$?

(a) $v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(b) $v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

(c) $-v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(d) $-v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

.....

b) À quoi est égale $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(z) \wedge \vec{v}(z)$?

(a) $v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(b) $v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

(c) $-v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(d) $-v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

.....

c) En déduire l'accélération convective de la particule à l'aide de la formule suivante :

$$\left(\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(z) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2(z)}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(z) \wedge \vec{v}(z).$$

.....

Entraînement 25.13 — Potentiel des vitesses.

Le potentiel des vitesses d'un écoulement est $\phi(x,y,z,t) = -\frac{x^2}{2\tau} + \phi_0$, avec τ et ϕ_0 constants.

a) Retrouver le champ des vitesses $\vec{v}(x,y,z,t)$ .....

b) Calculer le rotationnel du champ de vitesse .....

c) L'écoulement est-il incompressible ? .....

d) Calculer l'accélération de la particule .....

Pour aller un peu plus loin

Entraînement 25.14 — Tornade.

Le champ de vitesse de l'air au sein d'une tornade peut s'écrire, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(r) = \begin{cases} \omega r \vec{e_\theta} & \text{si } r \leqslant a \\ \dfrac{K}{r}\vec{e_\theta} & \text{si } r \geqslant a \end{cases}$$

avec ω et K deux constantes. On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ $\vec{A}(r) = A_r(r)\vec{e_r} + A_\theta(r)\vec{e_\theta} + A_z(r)\vec{e_z}$ ne dépendant que de r :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r(r))}{\partial r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta(r))}{\partial r}\vec{e_z}.$$

a) En utilisant la continuité de la vitesse en $r = a$, déterminer la constante K .....

b) L'écoulement est-il incompressible ? .....

c) L'écoulement est-il irrotationnel pour $r \geqslant a$? .....

d) Exprimer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$ pour $r \leqslant a$ .....

Entraînement 25.15 — Dérivée particulaire.

La dérivée particulaire d'un champ scalaire ou vectoriel Ψ s'exprime :

$$\frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\Psi.$$

On s'intéresse au champ de vitesse suivant : $\vec{v}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ 0 \\ 3x - 2z \end{pmatrix} K\exp(-t/\tau)$.

Calculer le vecteur accélération $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ .....

Entraînement 25.16 — Un écoulement particulier.

Le champ de vitesse d'un fluide s'écrit, en coordonnées cylindriques, $\vec{v}(r,\theta) = -\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}$, avec α et β deux constantes. On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ scalaire $\Phi(r,\theta)$ et un champ vectoriel $\vec{A}(r)$ ne dépendant que de r :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi(r,\theta)) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} \quad ; \quad \text{div}\left(\vec{A}(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r(r))}{\partial r} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{A}(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta(r))}{\partial r}\vec{e_z}.$$

a) L'écoulement du fluide est-il incompressible ? .....

b) L'écoulement du fluide est-il irrotationnel ? .....

c) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine $\Phi(1,0,0,t) = 0$.

Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.

.....

d) Calculer l'accélération particulaire $\vec{a_p}$ à l'aide de l'expression de l'accélération convective

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}.$$

.....

Réponses mélangées

non non $2{,}59\times10^{-1}\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}$ $-\dfrac{k}{2}x^2-\dfrac{k}{2}y^2+\phi_0$ (d)

$2{,}59\times10^{2}\,\text{kg}\cdot\text{h}^{-1}$ impossible oui oui $\vec{0}$ (b) oui

$\dfrac{x}{\tau^2}\vec{e_x}$ $-v_0y+\phi_0$ (b) $\beta\ln(r)-\dfrac{\alpha}{r}\theta$ non $\vec{0}$ $\vec{0}$

(b) oui $22\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $-\omega x\vec{e_z}$ oui $\vec{0}$ $\vec{0}$ (c) $\omega\vec{e_z}$

$8{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 0 $\vec{0}$ (c) $\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}$ $\begin{pmatrix}\frac{3z-2x}{\tau}-5xK\exp(-t/\tau)\\0\\\frac{2z-3x}{\tau}-5zK\exp(-t/\tau)\end{pmatrix}K\exp(-t/\tau)$

oui oui ωa^2 oui $-\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}$ $\vec{0}$ $\dfrac{\pi}{2}\rho V_0R^2$

► Réponses et corrigés page 438

Dynamique des fluides

Prérequis

- Dérivée particulaire : $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$.
- Équation de conservation de la masse : $\mathrm{div}(\rho \vec{v}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.
- Équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \eta \Delta(\vec{v}) + \vec{f},$$

  où $\vec{f}$ correspond à l'équivalent volumique d'une force supplémentaire.
- Résultante des forces de pression extérieure sur une surface Σ :

$$\overrightarrow{F_P} = -\iint_{\Sigma} P(\mathrm{M})\, \overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}\, \mathrm{d}S,$$

  où $\overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}$ est le vecteur unitaire à l'élément de surface $\mathrm{d}S$ au point M sur Σ orienté vers l'extérieur à Σ et $P(\mathrm{M})$ la pression extérieure du fluide au point M.

Pour bien commencer

Entraînement 26.1 — Résoudre une équation différentielle.

Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle vérifiée par v en prenant en compte les conditions aux limites et les possibles divergences de v.

a) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = 0$ avec $v(0) = 0$ et $v(a) = v_0$ .....

b) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = K$ avec $v(0) = 0$ et $v(a) = v_0$ .....

c) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = K$ avec $v(R) = 0$ pour $r \in [0, R]$ .....

Entraînement 26.2 — Calculer un débit volumique.

Dans chaque cas, établir l'expression du débit volumique.

a) $D_v = \displaystyle\int_{y=0}^{a}\left(\int_{x=0}^{b} v_0\, \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$, où v_0 est une constante .....

b) $D_v = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} A\left(R^2 - r^2\right) r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r$, où A et R sont des constantes ..

Entraînement 26.3 — Estimer un nombre de Reynolds.

Le nombre de Reynolds Re d'un écoulement est défini par $\mathrm{Re} = VL/\nu$, où V et L sont les distance et vitesse caractéristiques de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Pour l'eau et l'air, on a $\nu_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ et $\nu_{\text{air}} = 1{,}6 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$.

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre de Reynolds et choisir la réponse qui est la plus proche de votre estimation.

a) Un dauphin nageant à $20\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

(a) $2{,}8 \times 10^{-3}$ (c) $2{,}8 \times 10^{10}$
(b) $2{,}8 \times 10^{6}$

b) Une balle de tennis allant à $180\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

(a) $9{,}4 \times 10^{-4}$ (c) $9{,}4 \times 10^{4}$
(b) $9{,}4 \times 10^{7}$

c) Un moucheron tombant à une vitesse constante de $1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

(a) $3{,}1 \times 10^{-1}$ (c) $3{,}1 \times 10^{2}$
(b) $3{,}1 \times 10^{-5}$

Entraînement 26.4 — Estimer le rapport de deux termes.

En raisonnant en terme d'échelles caractéristiques, établir une expression en ordre de grandeur des rapports suivants. Les vitesse et longueur caractéristiques seront notées V et L. Les grandeurs ρ, η et Ω sont des constantes.

Par exemple, en terme d'échelle caractéristique, l'expression $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ *est équivalente à* $\dfrac{V}{T}$*, où* V *est une vitesse caractéristique et* T *un temps caractéristique du problème étudié.*

a) $\dfrac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta(\vec{v})\|}$

b) $\dfrac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\|}{\|\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|}$

c) $\dfrac{\|\eta\Delta(\vec{v})\|}{\|\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|}$

Forces dans les fluides

Entraînement 26.5 — Viscosité dynamique et viscosité cinématique.

On note η la viscosité dynamique d'un fluide visqueux et ν sa viscosité cinématique définie par $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$, où ρ est la masse volumique du fluide.

a) Connaissant l'expression de la force volumique de viscosité au sein d'un fluide newtonien et incompressible $\overrightarrow{f_{\text{vis}}} = \eta\Delta(\vec{v})$, déterminer la dimension d'une viscosité dynamique.

b) En déduire la dimension d'une viscosité cinématique

c) Sachant que pour l'eau, η vaut 10^{-3} usi (unités S.I.), sa viscosité cinématique vaut

(a) $\nu = 10^{3}$ usi (b) $\nu = 1$ usi (c) $\nu = 10^{-3}$ usi (d) $\nu = 10^{-6}$ usi

Entraînement 26.6 — Statique des fluides.

La pression $P(z)$ pour un fluide homogène de masse volumique μ au repos dépend de l'altitude : on a

$$P(z) = P_0 - \mu g z.$$

a) Exprimer l'équivalent volumique $-\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z)$ des forces de pression.

.....

b) Exprimer la résultante des forces de pression exercées sur une surface S de largeur L selon $(\text{O}y)$ et de hauteur h comprise entre $z = 0$ et $z = h$.

On rappelle que cette résultante est définie par $\overrightarrow{F_P} = -\iint_\Sigma P(\text{M})\, \overrightarrow{n_{\text{ext}}}\, \text{d}S$.

.....

Entraînement 26.7 — Gradient de pression.

L'écoulement d'un fluide homogène de masse volumique μ se fait dans une conduite grâce à un gradient constant de pression dans la direction $(\text{O}x)$ tel que $P(x_1) = P_1$ et $P(x_2 = x_1 + L) = P_2$.

a) Exprimer le gradient de pression $\overrightarrow{\text{grad}}\, P(x)$ du fluide .....

b) Exprimer la pression $P(x)$ du fluide selon l'abscisse x .....

c) Calculer la force de pression exercée sur une section S de la conduite située en $x = L$.

.....

Entraînement 26.8 — Viscosité.

Un écoulement incompressible d'un fluide newtonien de viscosité η a comme champ des vitesses

$$\vec{v}(z) = v(z)\vec{e_x}$$

avec $v(z) = Az^2$.

a) Exprimer l'équivalent volumique $\eta\Delta(\vec{v}(z))$ des forces de viscosité.

.....

b) Exprimer la force de viscosité $\overrightarrow{F_{\text{v}}}$ exercée sur une plaque de surface $S = L^2$ à l'altitude $z = h$ par le fluide situé juste au-dessus.

On rappelle que le fluide exerce sur une surface infinitésimale $\text{d}S$ *la force* $\delta\overrightarrow{F_{\text{v}}} = \eta\dfrac{\partial v}{\partial z}\, \text{d}S\overrightarrow{e_x}$.

.....

Entraînement 26.9 — Nombre de Reynolds.

Une bille en acier de masse volumique $\mu_a = 7{,}8 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et de diamètre $d = 2R = 1{,}0\,\text{mm}$ tombe dans un récipient contenant du glycérol, dont la masse volumique est $\mu_g = 1{,}3 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et dont la viscosité est $\eta = 0{,}94\,\text{Pa}\cdot\text{s}$.

a) Calculer le nombre de Reynolds Re, défini par $\text{Re} = \dfrac{\mu_g\,\text{d}v}{\eta}$, sachant que la bille atteint la vitesse limite $v_\ell = 3{,}8\,\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

b) L'écoulement étant laminaire, calculer la norme de la force de traînée $\vec{F_t} = -6\pi\eta R\vec{v}$ maximale.

.....

c) Calculer la norme de la poussée d'Archimède exercée par le fluide sur la bille $\vec{\Pi} = -\mu_f V_{s,i}\,\vec{g}$, avec la masse volumique μ_f du fluide et le volume immergé $V_{s,i}$ de la bille. Le champ de pesanteur a pour valeur $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

.....

d) Même question pour la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ .....

e) Avant d'atteindre un mouvement rectiligne uniforme, la bille est accélérée. En faisant un bilan des forces, donner l'équation différentielle de la vitesse selon l'axe vertical descendant sous la forme

$$\frac{\text{d}v(t)}{\text{d}t} + \frac{v(t)}{\tau} = \left(1 - \frac{\mu_g}{\mu_a}\right)g,$$

en précisant l'expression de τ en fonction de μ_a, R et η

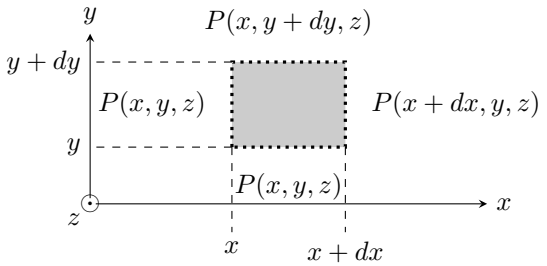
.....

f) Donner l'ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire .....

Entraînement 26.10 — Équivalent volumique des forces de pression.

On cherche la résultante des forces de pression $\text{d}\overrightarrow{F_P}$ que le fluide environnant exerce sur une particule fluide de volume $\text{d}\tau = \text{d}x\,\text{d}y\,\text{d}z$, située entre x et $x + \text{d}x$, y et $y + \text{d}y$, z et $z + \text{d}z$.

La force de pression $\text{d}\vec{F}$ s'exerçant sur un côté de surface $\text{d}S$ de cette particule s'exprime $\text{d}\vec{F} = -P\,\text{d}S\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de l'intérieur du volume vers l'extérieur.



a) Exprimer la force de pression $\text{d}\overrightarrow{F_g}$ s'exerçant sur la paroi latérale gauche de la particule en fonction de $P(x, y, z)$, $\text{d}y$ et $\text{d}z$.

.....

b) Exprimer la force de pression $\text{d}\overrightarrow{F_d}$ s'exerçant sur la paroi latérale droite de la particule en fonction de $P(x + \text{d}x, y, z)$, $\text{d}y$ et $\text{d}z$.

.....

c) En déduire une expression de la résultante $\mathrm{d}F_{Px}$ des forces de pression suivant $\mathrm{O}x$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

d) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Py}$ des forces de pression suivant $\mathrm{O}y$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

e) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Pz}$ des forces de pression suivant $\mathrm{O}z$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

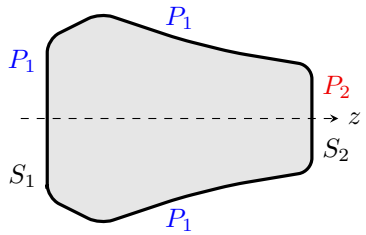
f) En déduire l'expression vectorielle de la force volumique de pression $\overrightarrow{f_P}$ en fonction de P au sein du fluide.

.....

Entraînement 26.11 — Surface fermée soumise à une pression non uniforme.

On cherche la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_P}$ qui s'exerce sur un solide de révolution d'axe $(\mathrm{O}z)$, de surface fermée Σ, constituée de deux sections planes S_1 et S_2 perpendiculaires à $(\mathrm{O}z)$, reliées par une surface latérale S_{lat} de forme quelconque.

La surface latérale S_{lat} comme la section S_1 sont soumises à une pression P_1 tandis que la section S_2 est soumise à la pression P_2.



On rappelle que $\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}\vec{S}_{\text{ext}} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$, où $\mathcal{V}$ est le volume limité par la surface fermée Σ.

a) Que vaudrait la résultante des forces de pression s'exerçant sur Σ si on avait $P_1 = P_2$?

.....

b) La distribution des pressions qui s'exercent sur Σ est équivalente à la superposition d'une distribution uniforme P_1 sur l'ensemble de Σ et d'une pression extérieure P' appliquée sur la partie droite de la seule section S_2, avec :

(a) $P' = P_2$ (b) $P' = P_2 - P_1$ (c) $P' = P_1 + P_2$

.....

c) La résultante des forces de pression qui s'exerce sur le solide de surface fermée Σ vaut :

(a) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_1\vec{e}_z$
(b) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_1\vec{e}_z$
(c) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_2\vec{e}_z$
(d) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_2\vec{e}_z$

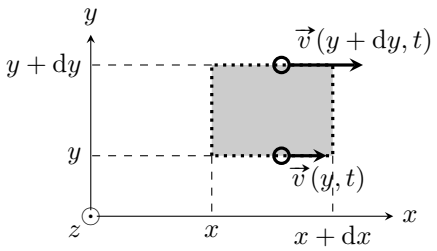
.....

Entraînement 26.12 — Équivalent volumique des forces de viscosité.

Pour un champ des vitesses de la forme

$$\overrightarrow{v}(\mathrm{M},t) = v_x(y,t)\overrightarrow{e_x},$$

une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est soumis à des forces visqueuses $\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{F_2}$ s'exerçant sur ses faces inférieure (à la cote y) et supérieure (à la cote $y+\mathrm{d}y$).



La force visqueuse $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_v$ exercée par une particule de fluide sur celle se trouvant **au-dessus** s'écrit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x},$$

où η est la viscosité dynamique du fluide et $\mathrm{d}S$ la surface de contact.

a) Quel cas parmi les quatre choix suivants est-il celui qui convient ?

(a) $\begin{cases}\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}(y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\\ \mathrm{d}\overrightarrow{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}(y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\\ \mathrm{d}\overrightarrow{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\end{cases}$

(b) $\begin{cases}\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}(y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\\ \mathrm{d}\overrightarrow{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\end{cases}$

(d) $\begin{cases}\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}(y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\\ \mathrm{d}\overrightarrow{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\end{cases}$

.....

b) En déduire l'expression de la résultante $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \mathrm{d}\overrightarrow{F_1} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_2}$ des forces de viscosité sur le volume $\mathrm{d}\tau$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$, η et d'une dérivée partielle de v_x du second ordre.

.....

c) En généralisant le résultat obtenu à la question précédente, quelle est, pour un champ eulérien de vitesses quelconque $\overrightarrow{v}(\mathrm{M},t)$, l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité au sein d'un fluide visqueux newtonien et incompressible ?

(a) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = \eta\Delta(\overrightarrow{v})$

(b) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = -\eta\Delta(\overrightarrow{v})$

(c) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = \eta\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\overrightarrow{v}))$

.....

Autour de l'équation de Navier-Stokes

Entraînement 26.13 — À propos de la dérivée particulaire.

On considère un fluide de masse volumique ρ en écoulement avec un champ eulérien des vitesses $\vec{v}(\mathrm{M},t)$.

On pourra se reporter à l'expression de la dérivée particulaire rappelée en prérequis.

a) Le terme $\rho\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ a la dimension d'une :

(a) accélération massique
(b) accélération volumique
(c) force massique
(d) force volumique

.....

b) Le terme $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est nul pour tout écoulement

(a) uniforme et stationnaire
(b) incompressible et stationnaire
(c) incompressible
(d) uniforme

.....

c) On considère l'écoulement incompressible, stationnaire et homogène d'un fluide dont les lignes de courant sont rectilignes et parallèles. Que vaut $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$?

.....

Entraînement 26.14 — Statique des fluides en référentiel non galiléen.

L'eau, fluide newtonien homogène de viscosité dynamique constante $\eta = 10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$ et de masse volumique $\mu = 1{,}0\times10^{3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, est soumise au champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ et se trouve au repos dans un récipient. On note $(\mathrm{O}z)$ l'axe vertical ascendant.

a) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (rappelée en prérequis).

On notera $\vec{F}_{\mathrm{V,a}}$ la résultante des forces volumiques autres que celles de pression appliquées au fluide.

.....

b) Le récipient contenant l'eau est en translation d'accélération $\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = a\vec{e_x}$ par rapport à un référentiel galiléen. Choisir la bonne réponse.

(a) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} + \mu a\vec{e_x}$
(b) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}$
(c) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu a\vec{e_x}$
(d) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}$

.....

c) Comme précédemment, l'eau est soumise au champ de pesanteur terrestre uniforme $\vec{g}$ mais cette fois-ci, le récipient et son contenu sont en rotation uniforme autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ ascendant à la vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen. Choisir la bonne réponse.

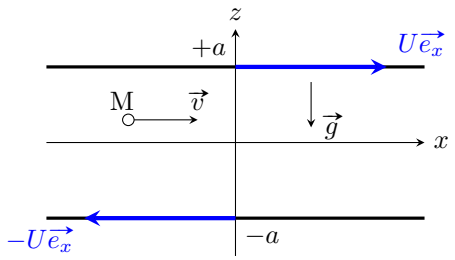
(a) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(b) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} - \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(c) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(d) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu\omega r^2\vec{e_r}$

.....

Entraînement 26.15 — Écoulement de Couette plan.

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η entre deux plaques situées en $z = -a$ et $z = +a$, de dimensions suivant (Ox) et (Oy) supposées infinies.

Les deux plaques sont mobiles suivant $\vec{e_x}$ de vitesses respectives $-U\vec{e_x}$ et $+U\vec{e_x}$. On adopte les conditions aux limites $\vec{v}(a) = U\vec{e_x}$ et $\vec{v}(-a) = -U\vec{e_x}$.



On suppose le champ eulérien des vitesses dans l'écoulement du type $\vec{v}(\mathrm{M}) = v(z)\vec{e_x}$. Le champ de pression sera supposé ne dépendre ici que de z. On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur local.

On pourra se reporter à l'expression de la dérivée particulaire ainsi qu'à l'équation de Navier-Stokes (rappelées en prérequis) avec ici $\vec{f} = \vec{0}$.

Pour un champ vectoriel $\vec{A} = A_x\vec{e_x} + A_y\vec{e_y} + A_z\vec{e_z}$, on rappelle les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ et de $\Delta\vec{A}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix},$$

avec par exemple $\Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$.

a) Calculer l'accélération particulaire $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ de cet écoulement .....

b) Le laplacien vectoriel du champ des vitesses s'écrit pour cet écoulement :

(a) $\Delta(\vec{v}) = \vec{0}$ (b) $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_x}$ (c) $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_z}$

.....

c) Exprimer en fonction de U, a et z la loi $v(z)$ .....

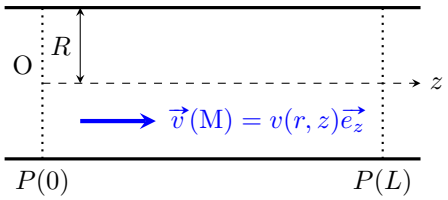
d) Le $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})$ associé à cet écoulement vaut :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \dfrac{U}{a}\vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \dfrac{U}{a}\vec{e_y}$ (d) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = -\dfrac{U}{a}\vec{e_y}$

.....

Entraînement 26.16 — Écoulement de Poiseuille cylindrique.

Un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η s'écoule en régime stationnaire dans une canalisation cylindrique d'axe (Oz), de longueur L et de rayon R. On néglige les effets de la pesanteur.



Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme $\vec{v}(M) = v(r,z)\vec{e_z}$ et $P(M) = P(r,z)$.

On donne pour de tels champs : $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \dfrac{\partial P}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$ et $\text{div}(\vec{v}) = \dfrac{\partial v(r,z)}{\partial z}$.

L'écoulement est régi par l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit ici : $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta\Delta(\vec{v})$.

Du fait de la prise en compte de la viscosité, la vitesse du fluide s'annule sur les parois de la canalisation en $r = R$.

a) Obtenir à partir de l'équation de conservation de la masse (rappelée en prérequis) avec ici $\rho = C^{\text{ste}}$ une équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(r,z)$. En déduire que :

(a) $v(r,z) = C$ avec C une constante
(b) $v(r,z)$ ne dépend que de r
(c) $v(r,z)$ ne dépend que de z
(d) $v(r,z)$ dépend de r et z

.....

On donne pour le champ de vitesses de cet écoulement : $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r,z)}{\partial r}\right)\vec{e_z}$.

b) Le champ de pression est tel que :

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial r} = C^{\text{ste}}$
(b) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ ne dépend que de z
(c) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ ne dépend que de r
(d) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ dépend de r et z

.....

c) Le champ de pression est tel que :

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial z} = C^{\text{ste}}$
(b) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de z
(c) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de r
(d) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ dépend de r et z

.....

d) Le champ des vitesses s'écrit :

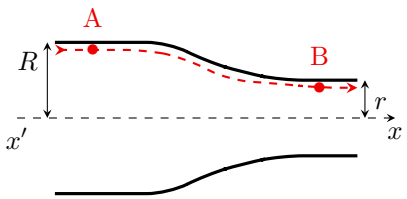
(a) $v(r) = \dfrac{[P(0)-P(L)]}{\eta L}(R^2 - r^2)$
(b) $v(r) = \dfrac{[P(0)-P(L)]}{2\eta L}(R^2 - r^2)$
(c) $v(r) = \dfrac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
(d) $v(r) = \dfrac{[P(0)-P(L)]}{4\eta L}(R^2 - r^2)$

.....

Entraînement 26.17 — Écoulement parfait.

Un liquide non visqueux et de masse volumique μ subit un écoulement dans une conduite de section variable.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



a) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (voir prérequis, avec $\vec{f} = \vec{0}$) sachant que la force de pesanteur agit. Cette équation s'appelle *l'équation d'Euler*.

.....

b) L'écoulement fluide est considéré comme parfait, stationnaire, incompressible et homogène. L'équation d'Euler conduit à la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre A et B.

$$\mu\frac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \mu g R + P_\mathrm{A} = \mu\frac{v_\mathrm{B}^2}{2} + \mu g r + P_\mathrm{B}$$

Simplifier cette expression en exprimant $v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2$ sachant que $P_\mathrm{A} - P_\mathrm{B} = \Delta P - \mu g(R - r)$.

.....

c) L'écoulement étant incompressible, le débit volumique D_V se conserve : $D_V = v_\mathrm{A} S = v_\mathrm{B} s$.

Exprimer le débit volumique en fonction de μ, ΔP, s et S .....

Entraînements supplémentaires

Entraînement 26.18 — Écoulement de Poiseuille plan.

Sous l'effet d'un gradient de pression, un fluide incompressible de masse volumique μ et de viscosité η circule entre deux plans immobiles et horizontaux d'altitude $z = \pm h$. L'écoulement est laminaire en régime permanent et le champ de vitesse est de la forme $\vec{v}(z) = v(z)\vec{e_x}$. Du fait de la symétrie du problème, les grandeurs sont indépendantes de la variable y.

a) Calculer l'accélération d'une particule de fluide (voir l'expression de la dérivée particulaire en prérequis).

.....

b) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (voir prérequis) .....

c) Projeter l'expression précédente sur l'axe (Ox) .....

d) Déterminer le champ de vitesse de l'équation avec le gradient de pression horizontal $A > 0$ constant et sachant que $v(x = 0) = v_0$ et $v(x = \pm h) = 0$. On donne $\eta \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = -A$.

Exprimer $v(z)$ en fonction de v_0, A, h, η et z .....

e) En considérant que la pression ne varie pas avec l'altitude, même question que précédemment pour le champ de pression de l'équation sachant que $P(x = 0) = P_0$. On donne $\dfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = -A$.

Exprimer $P(x)$ en fonction de P_0, v_0, h et x .....

Entraînement 26.19 — Écoulement de Couette plan.

Un fluide incompressible de masse volumique μ et de viscosité η est initialement au repos dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ entre deux plans horizontaux $z = 0$ et $z = h$. Le déplacement du plan supérieur en $z = h$ à la vitesse constante $\vec{v}(h) = v_p\vec{e_x}$ met en mouvement le fluide. Du fait de la symétrie du problème, toutes les grandeurs sont indépendantes de la variable y. Le champ de pression dépend uniquement de la variable z.

a) Le champ de vitesse a la forme $\vec{v}(z,t) = v(z,t)\vec{e_x}$. Simplifier l'équation de Navier-Stokes.

.....

b) Écrire la projection selon l'axe (Ox) de l'équation précédente .....

c) Exprimer en ordre de grandeur en fonction de μ, η et h la durée τ du régime transitoire d'après l'équation précédente.

.....

d) Estimer cette durée (en h/min/s) sur une hauteur $h = 1{,}0\,\mathrm{dm}$ pour l'eau, dont la viscosité cinématique est $\nu = \dfrac{\eta}{\mu} = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

.....

e) Écrire précisément et le plus simplement possible l'équation $\mu \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$ quand le régime stationnaire.

.....

f) Déterminer précisément le profil de vitesse correspondant à l'équation précédente, sachant, comme le fluide est visqueux, on a $v(z = 0) = 0$ et $v(z = h) = v_p$.

.....

g) En déduire la force de viscosité $\vec{F_\mathrm{v}}$ exercée sur le plan supérieur de surface S, qui est définie par la formule $\vec{F_\mathrm{v}} = -\eta \left(\dfrac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} \right)_{z=h} S\vec{e_x}$ .....

Entraînement 26.20 — Forme étendue de la relation de Bernoulli.

On considère l'écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel d'un fluide parfait, uniquement soumis à des forces conservatives (pression et pesanteur), régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}.$$

a) En choisissant l'axe (Oz) vertical ascendant, la quantité $C = P + \dfrac{\rho\vec{v}^2}{2} + \rho g z$, appelée « charge » est :

(a) une constante indépendante du temps, identique en tout point de l'écoulement irrotationnel, stationnaire, incompressible et parfait ;

(b) constante le long de la ligne de courant choisie, mais fonction du temps ;

(c) une constante indépendante du temps ne dépendant que de la ligne de courant choisie.

.....

b) La chute de pression au passage d'un cyclone présentant des vents de 200 km/h vaut en ordre de grandeur (on négligera les effets de la pesanteur et on donne $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) :

(a) $P_{\max} - P_{\min} = 2\,\text{bar}$

(b) $P_{\max} - P_{\min} = 0{,}2\,\text{bar}$

(c) $P_{\max} - P_{\min} = 20\,\text{mbar}$

(d) $P_{\max} - P_{\min} = 2\,\text{mbar}$

.....

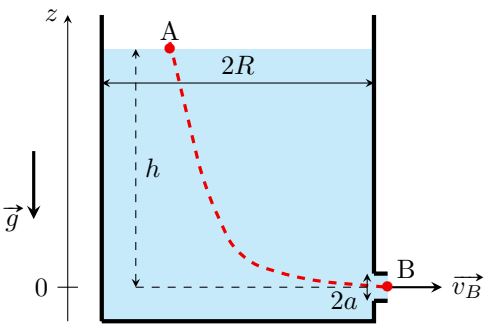
Entraînement 26.21 — Vidange d'un récipient et formule de Torricelli.

On envisage l'écoulement parfait et incompressible d'un liquide de masse volumique ρ contenu dans un récipient cylindrique de rayon R à travers un orifice de rayon a. On note h le dénivelé entre la surface libre du liquide et le trou.

On suppose que $a \ll R$, ce qui permet de considérer que le régime d'écoulement est stationnaire dans le récipient (ou quasi-stationnaire).

La surface libre du liquide ainsi que le jet en sortie sont au contact de l'atmosphère de pression uniforme P_0.

On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur supposé uniforme.



On rappelle la relation simple de Bernoulli applicable sur une ligne de courant pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, où toutes les forces appliquées sont conservatives : $P + \rho g z + \rho\dfrac{v^2}{2} = C^{\text{ste}}$, où (Oz) est la verticale ascendante.

a) En appliquant la relation de Bernoulli à la ligne de courant allant de A à B, établir une relation liant v_A, v_B, g et h.

.....

b) En exploitant la conservation du débit-volume, exprimer v_B en fonction de v_A, R et a.

.....

c) Simplifier l'expression de v_B obtenue en a) compte tenu du fait que $a \ll R$ .....

Entraînement 26.22 — Forme simple de la relation de Bernoulli.

Soit l'écoulement incompressible (de masse volumique ρ) et stationnaire d'un fluide parfait (non visqueux), uniquement soumis à des forces conservatives (pression et champ de pesanteur uniforme), régi par l'équation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}.$$

On rappelle l'identité vectorielle :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}.$$

Enfin, on rappelle que :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{A})$$

.

a) En prenant $(\mathrm{O}z)$ suivant la verticale ascendante, on peut écrire :

(a) $\vec{g} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$ (c) $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$

(b) $\vec{g} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz^2)$ (d) $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz^2)$

.....

b) On fait circuler l'équation d'Euler à un instant donné le long d'une ligne de courant entre deux points A et B, c'est à dire en formant $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{D\vec{v}}{Dt}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$.

En utilisant l'expression de la dérivée particulaire rappelée en prérequis, le calcul conduit à :

(a) $\dfrac{v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2}{2} = \dfrac{P_\mathrm{B} - P_\mathrm{A}}{\rho} - g(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{A})$ (c) $\dfrac{v_\mathrm{A}^2 - v_\mathrm{A}^2}{2} = \dfrac{P_\mathrm{A} - P_\mathrm{A}}{\rho} - g(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{A})$

(b) $\dfrac{v_\mathrm{A}^2 - v_\mathrm{A}^2}{2} = \dfrac{P_\mathrm{A} - P_\mathrm{A}}{\rho} + g(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{A})$

.....

c) Pour un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide parfait, soumis à des forces toutes conservatives, la quantité $P + \dfrac{\rho\vec{v}^2}{2} + \rho g z$, où $(\mathrm{O}z)$ est suivant la verticale ascendante du lieu, est :

(a) une constante indépendante du temps, identique en tout point de l'écoulement vérifiant les hypothèses précédentes ;

(b) constante le long de la ligne de courant choisie, mais fonction du temps ;

(c) une constante indépendante du temps ne dépendant que de la ligne de courant choisie.

.....

Entraînement 26.23 — Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes.

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien visqueux de viscosité dynamique η, et incompressible de masse volumique ρ, régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho\vec{g} + \eta\Delta(\vec{v}),$$

où $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ désigne le champ de pesanteur supposé uniforme. L'axe (Oz) est suivant la verticale ascendante.

Soit T une durée, L une longueur commune sur les trois axes (Ox), (Oy), (Oz) et U une vitesse, trois grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

On définit les variables sans dimension $t^* = \dfrac{t}{T}$, $x^* = \dfrac{x}{L}$ (idem pour y^* et z^*), ainsi que $\vec{v^*} = \dfrac{\vec{v}}{U}$.

On note $\overrightarrow{\text{grad}}^* = L\,\overrightarrow{\text{grad}}$ l'opérateur gradient et $\Delta^* = L^2\,\Delta$ l'opérateur laplacien adimensionnés.

On cherche à réécrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme adimensionnée

$$\mathcal{S}_{\text{tr}}\frac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*} + \left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^*\right)\vec{v^*} = -\overrightarrow{\text{grad}}^*\left(\frac{P}{P^*}\right) - \frac{1}{\mathcal{F}_{\text{r}}}\vec{e_z} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta^*(\vec{v^*}),$$

où $\mathcal{S}_{\text{tr}}$ est appelé nombre de Strouhal, $\mathcal{F}_{\text{r}}$ le nombre de Froude et Re le nombre de Reynolds.

La grandeur P^* a la dimension d'une pression.

a) Réécrire $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*}$, U et T .....

b) Réécrire $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ en fonction de $\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^*\right)\vec{v^*}$, U et L .....

c) Réécrire $\Delta(\vec{v})$ en fonction de $\Delta^*(\vec{v^*})$, U et L .....

d) Exprimer P^* en fonction de ρ et U .....

e) Exprimer le nombre de Strouhal $\mathcal{S}_{\text{tr}}$ en fonction de L, T et U .....

f) Exprimer le nombre de Froude $\mathcal{F}_{\text{r}}$ en fonction de L, g et U .....

g) Exprimer le nombre de Reynolds Re en fonction de η, ρ, L et U .....

Réponses mélangées

$\frac{U}{L^2}\Delta^*(\vec{v^*})$ (d) (c) $3{,}4\times10^{-5}\,\mathrm{N}$ $v(r)=-\frac{KR^2}{4}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ $v(z)=\frac{v_p}{h}z$

$\frac{L}{UT}$ (a) $\frac{\rho VL}{\eta}$ $-P(x+\mathrm{d}x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}$ $\mu\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$

$v(y)=\frac{v_0}{a}y-\frac{K}{2}ay\left(1-\frac{y}{a}\right)$ $\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P+\mu\vec{g}$ $\frac{\mathrm{d}^2v(z)}{\mathrm{d}z^2}=0$

$4{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{N}$ (c) $\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}=\eta\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$ $\frac{\eta}{\rho\Omega L^2}$ $L^2.T^{-1}$ $\vec{0}$ $\frac{V}{\Omega L}$

$2A\eta hL^2\vec{e_x}$ $0{,}5\,\mathrm{ms}$ $5{,}2\times10^{-3}$ ρU^2 $v(y)=\frac{v_0}{a}y$ (c) $\vec{0}$ $\frac{R^2}{a^2}v_\mathrm{A}$

(d) $\frac{P_2-P_1}{L}\vec{e_x}$ $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$ $v_\mathrm{B}^2=v_\mathrm{A}^2+2gh$ $\mu\frac{\partial\vec{v}(z,t)}{\partial t}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(z,t)+\eta\Delta\vec{v}(z,t)+\mu\vec{g}$

$\frac{U^2}{L}\left(\vec{v^*}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*})$ (a) $D_V=v_\mathrm{B}s=Ss\sqrt{\frac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}$ (d)

$\vec{0}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(\mathrm{M},t)+\vec{F}_{\mathrm{V,a}}$ $6{,}7\times10^{-6}\,\mathrm{N}$ $\frac{2\Delta P}{\mu}$ (b) (d) $U\frac{z}{a}$

$\sqrt{2gh}$ 2 h 46 min 40 s $\vec{0}$ (b) $\left[\frac{P_1-P_2}{L}(L-x_1)+P_1\right]S\vec{e_x}$ (a)

(b) $\frac{P_2-P_1}{L}(x-x_1)+P_1$ $-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau$ $-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau$ (a) $D_v=A\pi\frac{R^4}{2}$

$v(z)=v_0\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)$ $\frac{U^2}{gL}$ (b) $\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\tau\,\vec{e_x}$ (c) $P(x)=P_0-\frac{2\eta v_0}{h^2}x$

$\vec{0}$ $\frac{2\mu_\mathrm{a}R^2}{9\eta}$ (c) (d) (c) $P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}$ $\frac{U}{T}\frac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*}$ $-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau$

(a) $\frac{\mu}{\eta}h^2$ $D_v=v_0ab$ (b) $M.L^{-1}.T^{-1}$ $L\left(P_0h-\mu g\frac{h^2}{2}\right)\vec{e_z}$ $-\eta\frac{v_p}{h}S\vec{e_x}$

(c) $2A\eta\vec{e_x}$ $\frac{\rho LU}{\eta}$ $\vec{0}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x,z)+\eta\Delta\vec{v}(z)+\mu\vec{g}$ (d) $\mu g\vec{e_z}$

▶ Réponses et corrigés page 443

Bilans en mécanique des fluides

Prérequis
Débits massique et volumique. Forces pressantes. Moment de force. Puissance d'une force.

Constantes utiles

→ Masse volumique de l'eau liquide dans les conditions standard de pression et température : $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

→ Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Bilans d'énergie

Entraînement 27.1 — Quelle est la bonne formule ?

Les équations suivantes sont-elles homogènes ?

Dans ces expressions, w_i représente un travail indiqué massique, $\mathcal{P}_i$ une puissance indiquée, ΔP une perte de charge en pression et Δh une perte de charge en hauteur.

a) $\left(\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}\right) = \rho w_i$ .....

b) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho}\right) = \mathcal{P}_i$ .....

c) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + g z_s\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + g z_e\right) = -D_\mathrm{m}\Delta P$ .....

d) $\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_s\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_e\right) = -\Delta h$ .....

Entraînement 27.2 — Perte de charge et conversion.

On rappelle la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu_0} + g\Delta z = w_u - g h_\mathrm{pc}.$$

a) On donne $h_\mathrm{pc} = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Sachant que $\mu_0 = 2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, calculer la perte de pression ΔP_pc correspondant à cette perte de charge.

.....

b) La perte de charge précédente est due à la montée du fluide dans un tuyau vertical de hauteur $L = 10\,\mathrm{m}$. Au milieu de ce tuyau se situe une pompe qui fournit un travail massique utile w_u au fluide.

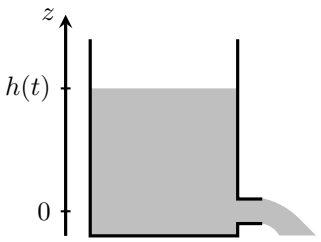
Quelle doit être la valeur de ce travail massique pour qu'il n'y ait ni variation de vitesse ni variation de pression du fluide entre l'entrée et la sortie du tuyau ?

.....

Entraînement 27.3 — Hypothèses sur l'écoulement.

Étudions la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide, s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du réservoir. La hauteur de fluide, comptée à partir de l'orifice de sortie est notée $h(t)$ à l'instant t.

À l'instant initial, elle vaut h_0. On négligera toute perte de charge.



Dire si les caractéristiques ci-dessous conviennent à la situation.

a) Écoulement incompressible ..... ☐

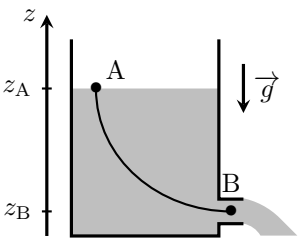
b) Écoulement quasi-stationnaire .. ☐

c) Écoulement parfait ..... ☐

d) Fluide homogène ..... ☐

Entraînement 27.4 — Vidange d'un réservoir.

On étudie la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du réservoir. On négligera toute perte de charge. On considère une ligne de courant passant par les points A et B représentés sur le schéma. La relation de Bernoulli s'écrit sur cette ligne de courant :



$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} + g z_A = \frac{P_B}{\mu} + \frac{v_B^2}{2} + g z_B$$

a) Que peut-on dire des pressions aux points A et B ?

(a) $P_A < P_B$ (c) $P_A = P_B$

(b) $P_A > P_B$ (d) $P_B = P_A + \mu g(z_A - z_B)$

..... ☐

b) Le débit volumique au point A s'écrit :

(a) $D_{v,A} = \mu S v_A$ (b) $D_{v,A} = S v_A$ (c) $D_{v,A} = \dfrac{S v_A}{\mu}$

..... ☐

c) Le débit volumique au point B s'écrit :

(a) $D_{v,B} = \mu s v_B$ (b) $D_{v,B} = s v_B$ (c) $D_{v,B} = \dfrac{s v_B}{\mu}$

..... ☐

d) Le fluide étant incompressible, il y a conservation du débit volumique. Que peut-on en déduire sur les vitesses en A et en B ?

(a) $v_A = v_B$ (b) $v_A \gg v_B$ (c) $v_A \ll v_B$

..... ☐

e) On donne $h(t) = z_A - z_B$, en utilisant la relation de Bernoulli et les résultats précédents, quelle expression de v_B est correcte ?

(a) $v_B = \sqrt{2\dfrac{P_A}{\mu} + 2gh(t)}$ (b) $v_B = \sqrt{2gh(t)}$ (c) $v_B = v_A + \sqrt{2gh(t)}$

..... ☐

Entraînement 27.5 — Simplifier la relation de Bernoulli.

On donne l'expression usuelle de la formule de Bernoulli $\dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = \text{cte}$.

a) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est horizontal ?

.....

b) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est lent ?

.....

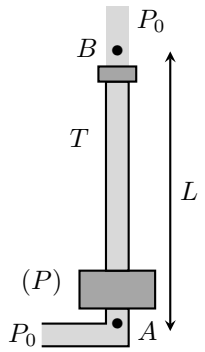
c) On admet qu'elle s'écrit $\dfrac{v^2}{2} = gh$ à la sortie d'une citerne de hauteur $h = 5\,\text{cm}$.

À quelle vitesse v le fluide est-t-il éjecté ?

.....

Entraînement 27.6 — Quelle pompe choisir ?

On étudie une fontaine dont le circuit d'eau est présenté ci-contre. Il comprend une pompe (P) fournissant un travail utile massique w_u, relié à un tube T de longueur $L = 10\,\text{m}$ et de diamètre $D = 10\,\text{mm}$. Lors de son passage dans le tube, le fluide subit une perte de charge régulière correspondant à une perte d'énergie massique $\Delta e_{\text{pcr}} = \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$ où U est la vitesse débitante du fluide dans le tube et $\xi = 0,022$.



On suppose qu'avant la pompe, le fluide est à une pression P_0 et de vitesse négligeable.

On rappelle que le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec S la section de l'écoulement ainsi que l'expression de la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - gh_{\text{pc}}.$$

a) On souhaite une vitesse $U = 7{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer le débit volumique nécessaire D_v en $\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

b) Choisir la bonne façon d'appliquer la relation de Bernoulli généralisée au fluide parcourant ce circuit le long d'une ligne de courant AB, A étant avant la pompe et B après le robinet.

(a) $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\mu g\dfrac{L}{D}U^2$ (c) $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$

(b) $\dfrac{1}{2}U^2 + \dfrac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\mu g\xi\dfrac{L}{D}U^2$ (d) $\dfrac{1}{2}U^2 + \dfrac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$

.....

c) Pour obtenir un bilan de puissance à partir de la relation précédente, il faut la multiplier par :

(a) D_v (b) μD_v (c) μ

.....

d) Quelle puissance la pompe doit-elle fournir pour atteindre le débit volumique souhaité ?

.....

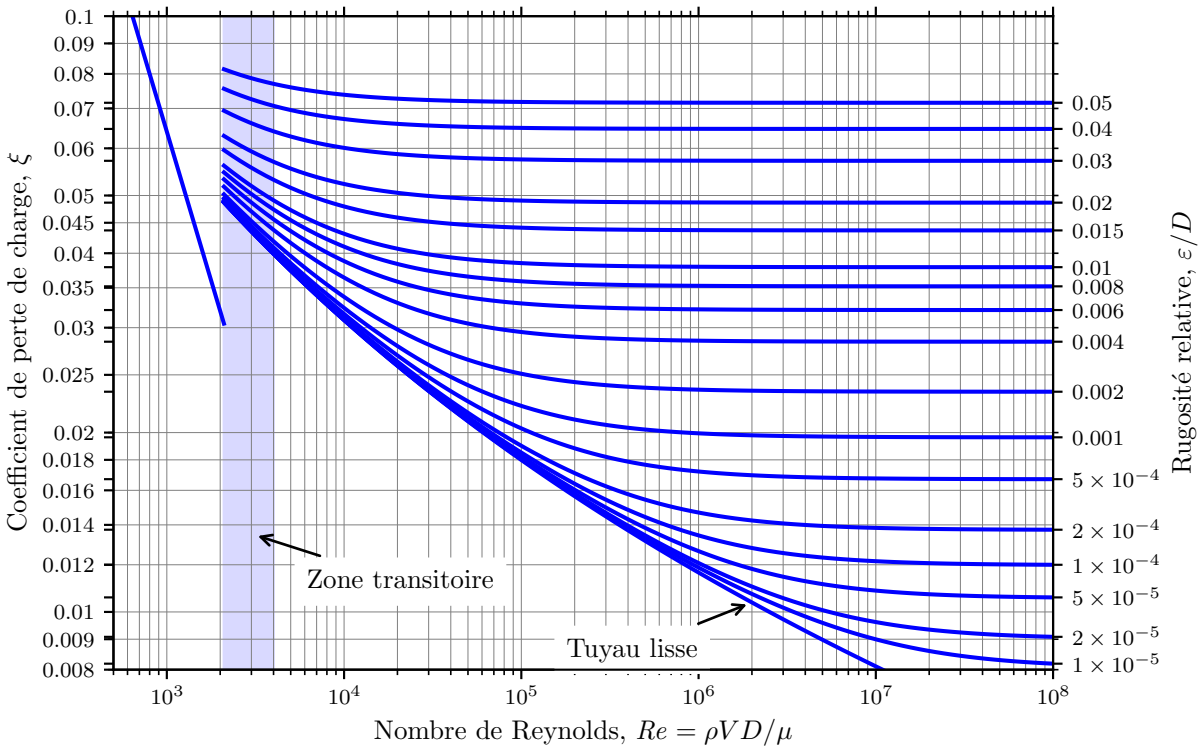
e) Pour atteindre le débit volumique souhaité, nous avons le choix entre plusieurs pompes de différentes puissances $\mathcal{P}_i$. Laquelle choisir ?

(a) $\mathcal{P}_1 = 100\,\text{W}$ (b) $\mathcal{P}_2 = 300\,\text{W}$ (c) $\mathcal{P}_3 = 500\,\text{W}$ (d) $\mathcal{P}_4 = 700\,\text{W}$

.....

Entraînement 27.7 — Lecture d'un diagramme de Moody.

On donne ci-dessous le diagramme de Moody d'un fluide en écoulement de pleine section dans une conduite cylindrique de longueur ℓ et de diamètre D.



a) On donne $\mathrm{Re} = 2 \times 10^4$ le nombre de Reynolds de l'écoulement, $D = 20\,\mathrm{cm}$ le diamètre de la canalisation et $\varepsilon = 4\,\mathrm{mm}$ la rugosité absolue de la conduite.

En déduire, par lecture graphique, le coefficient de perte de charge ξ dans la canalisation.

.....

b) On donne $\rho = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ la masse volumique du fluide.

Calculer la perte de charge $\Delta P = \dfrac{1}{2}\rho U^2 \xi \dfrac{\ell}{D}$ dans la canalisation pour une vitesse débitante $U = 0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et une longueur $\ell = 10\,\mathrm{m}$.

.....

c) Pour un autre écoulement de nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = 8 \times 10^5$ et de coefficient de perte de charge $\xi = 0{,}015$ déterminer la rugosité relative ε/D par lecture graphique.

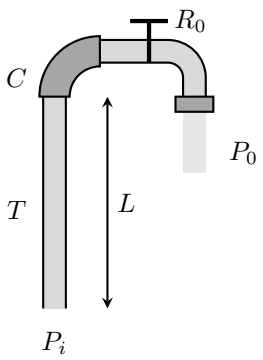
.....

d) En déduire la rugosité absolue ε de la conduite si son diamètre est $D = 30\,\mathrm{cm}$.

.....

Entraînement 27.8 — Pression dans un immeuble.

On étudie le circuit d'eau d'un immeuble décrit ci-dessous. Il comprend un tuyau T de longueur $L = 19\,\text{m}$ permettant d'amener de l'eau jusqu'au dernier étage. Son diamètre est $D = 10\,\text{mm}$. À l'extrémité de ce tube se trouve un coude C permettant l'accès à un robinet R_0.



Au passage dans le coude et dans le robinet, le fluide subit les pertes de charge singulières $\Delta P_C = \frac{1}{2}k_1\mu U_1^2$ et $\Delta P_{R_0} = \frac{1}{2}k_2\mu U_2^2$ correspondant à des pertes de pression. On note U_1 et U_2 les vitesses débitantes respectivement en amont du coude et du robinet. On donne $k_1 = 1{,}3$ et $k_2 = 1{,}5$.

On rappelle que le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec S la section de l'écoulement ainsi que l'expression de la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - \frac{\Delta P_{\text{pc}}}{\mu}.$$

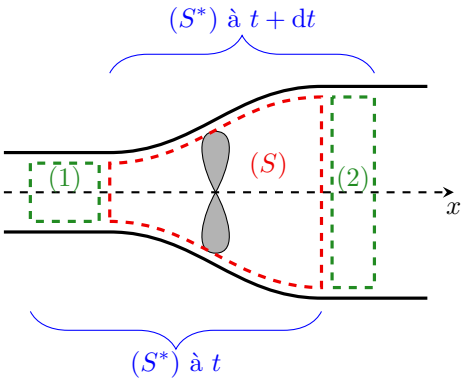
a) Le débit volumique voulu est de $0{,}25\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer les vitesses U_1 et U_2 .....

b) Quelle pression P_i faut-il imposer en amont du circuit d'eau, sachant que $P_0 = 1{,}0\,\text{bar}$?

.....

Entraînement 27.9 — Puissance d'une installation.

Une hélice d'hydrolienne est placée dans un écoulement d'eau unidimensionnel à symétrie cylindrique. On note (S*) le système fermé représenté sur le schéma. Dans la suite, P_1, P_2, S_1 et S_2 représentent les pressions et sections des systèmes (1) et (2). On a, de plus, $P_1 = P_2$.



a) La pression autour du tube de courant est supposée uniforme. Que vaut la résultante des forces pressantes qui s'exercent sur (S*) ?

(a) $\vec{F} = (P_1S_1 - P_2S_2)\vec{u}_x$ (c) $\vec{F} = \vec{0}$

(b) $\vec{F} = (P_2S_2 - P_1S_1)\vec{u}_x$

.....

b) Quelle puissance développe cette force ?

(a) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_1S_1v_1 - P_2S_2v_2$ (b) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_2S_2v_2 - P_1S_1v_1$ (c) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = 0$

.....

c) On note $\mathcal{P}$ la puissance reçue par l'hélice. Quelle puissance est reçue par (S*) ? .....

d) On note D_m le débit massique, l'écoulement étant stationnaire.

Exprimer l'énergie cinétique qui sort de (S*) pendant une durée élémentaire dt.

.....

e) Exprimer l'énergie cinétique qui entre dans (S*) pendant une durée élémentaire dt.

.....

f) Par application du théorème de la puissance cinétique $\dfrac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}$ à (S^*), exprimer $\mathcal{P}$ si l'écoulement est horizontal. *On rappelle que les actions intérieures ne travaillent pas lorsqu'on suppose l'écoulement parfait et incompressible.*

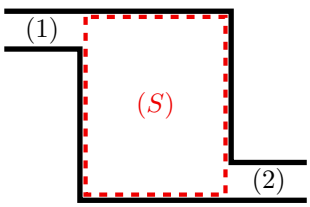
.....

g) On suppose $v_2 \ll v_1$ et on donne $v_1 = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $D_\mathrm{m} = 200\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, calculer $\mathcal{P}$ .....

Bilans de masse

Entraînement 27.10 — Effectuer un bilan de masse sur un système ouvert et fixe.

Soit (S) une surface de contrôle, délimitant un système ouvert et fixe de masse m. Un fluide s'écoule à travers depuis la canalisation d'entrée (1) jusqu'à la canalisation de sortie (2).



a) Exprimer la masse de fluide $\mathrm{d}m_1$ qui entre dans (S) pendant la durée élémentaire $\mathrm{d}t$ à l'aide du débit massique entrant D_{m1}.

.....

b) Exprimer la masse de fluide $\mathrm{d}m_2$ qui sort de (S) pendant la durée élémentaire $\mathrm{d}t$ à l'aide du débit massique sortant D_{m2} .....

c) Exprimer la variation de masse $\mathrm{d}m$ de (S) en fonction de $\mathrm{d}m_1$ et $\mathrm{d}m_2$ .....

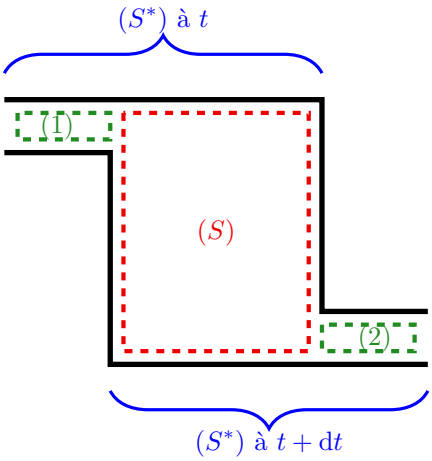
d) En régime stationnaire $\mathrm{d}m = 0$, en déduire la relation entre D_{m1} et D_{m2} .....

Entraînement 27.11 — Effectuer un bilan de masse sur un système fermé et mobile.

On définit le système (S^*) fermé et mobile constitué :

- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_1$ qui y entre, à l'instant t ;
- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_2$ qui en sort, à l'instant $t + \mathrm{d}t$.

On note $m(t)$ la masse de (S) à l'instant t.



a) Exprimer la masse de fluide $m^*(t)$ de (S^*) en fonction de $m(t)$ et $\mathrm{d}m_1$.

.....

b) Exprimer la masse de fluide $m^*(t + \mathrm{d}t)$ de (S^*) en fonction de $m(t + \mathrm{d}t)$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

c) Exprimer la variation de masse $\mathrm{d}m^*$ de (S^*).

.....

d) En régime stationnaire $m(t) = m(t + \mathrm{d}t)$, en déduire la relation entre $\mathrm{d}m_1$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

Bilans de quantité de mouvement

Entraînement 27.12 — Poussée d'une fusée.

On étudie le mouvement d'une fusée de masse $m(t)$ et de vitesse $\vec{v}(t)$ lancée depuis la Terre grâce à l'éjection des gaz issus de la combustion de ses ergols. À l'instant initial, la masse de la fusée est $m(t=0) = m_0$.

La pression de l'air autour de la fusée est supposée uniforme et le coefficient de frottement de l'air sur la fusée est noté λ.

a) Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme. Exprimer le poids de la fusée.

.....

b) Quelle forme prend la force de frottement fluide linéaire qu'elle ressent ?

.....

c) Exprimer la résultante des forces de pression .....

d) Les gaz sont éjectés de la fusée avec un débit massique noté D_m et une vitesse relative par rapport à la fusée notée $\vec{u}$. Exprimer la variation $\mathrm{d}\vec{p}$ de la quantité de mouvement des gaz éjectés dans le référentiel de la fusée entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$

.....

e) Soit $\vec{F_\text{P}}$ la force de poussée subie par la fusée de la part des gaz éjectés.

À partir de l'expression obtenue à la question précédente, déterminer l'expression de $\vec{F_\text{P}}$.

.....

Entraînement 27.13 — Voile solaire.

On considère une sonde spatiale disposant d'une voile réfléchissante et rigide de surface S. Un flux de photons de densité volumique n arrive en incidence normale sur la voile à une célérité c selon le vecteur $\vec{e_x}$.

La quantité de mouvement d'un photon est donnée par $\dfrac{h}{\lambda}$ avec h la constante de Planck et λ la longueur d'onde.

a) Donner l'expression du volume dans lequel sont contenus les photons incidents sur la voile pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la voile .....

b) Exprimer la quantité de mouvement $\vec{p}(t)$ de ces photons incidents.

.....

c) Exprimer la quantité de mouvement $\vec{p}(t + \mathrm{d}t)$ des mêmes photons après avoir heurté la voile.

.....

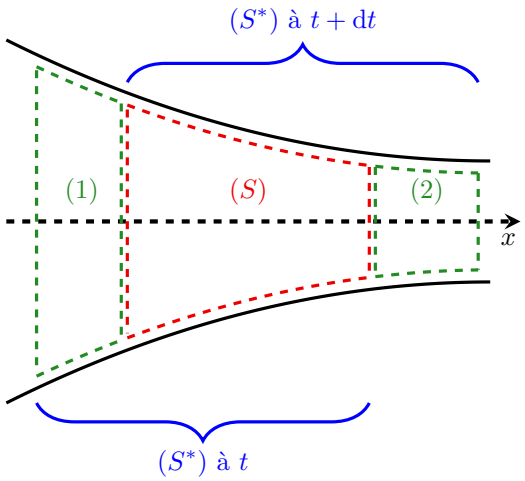
d) Par application du théorème de la quantité de mouvement $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_\text{ext}$, en déduire la force exercée par les photons sur la voile .....

Entraînement 27.14 — Action d'un écoulement sur une canalisation.

On étudie l'écoulement unidimensionnel supposé parfait stationnaire incompressible et homogène, d'un fluide dans une canalisation à symétrie cylindrique.

On note (S*) le système fermé représenté sur le schéma.

On notera P_1, S_1 et v_1 les pression, surface et vitesse en amont et P_2, S_2 et v_2 les pression, surface et vitesse en aval de l'écoulement.



a) Exprimer la force pressante qui s'exerce sur (S*) en amont .....

b) Exprimer la force pressante qui s'exerce sur (S*) en aval .....

c) On note $\vec{F}$ la force exercée par (S*) sur la canalisation. Quelle force exerce la canalisation sur (S*) ?

.....

d) On note D_m le débit massique entrant et sortant de la canalisation. Exprimer la quantité de mouvement qui sort de (S*) pendant une durée élémentaire $\mathrm{d}t$.

.....

e) Exprimer la quantité de mouvement qui entre dans (S*) pendant la même durée élémentaire $\mathrm{d}t$.

.....

f) Par application du théorème de la quantité de mouvement $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}^*}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_\mathrm{ext}$ à (S*), exprimer $\vec{F}$ si l'écoulement est lent et horizontal.

On ne prendra en compte dans cette question que les forces horizontales.

.....

g) La formule de Bernoulli assure que $P_1 = P_2 = P$.

Calculer $F = \|\vec{F}\|$ si $P = 2\,\mathrm{bar}$ et $S_2 = S_1/2 = 10\,\mathrm{cm}^2$ .....

Réponses mélangées

$gz + \dfrac{P}{\mu} = \text{cte}$ oui (b) (c) $\vec{0}$ oui $-\lambda\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ non homogène

$\vec{F}_{\text{photons}\to\text{voile}} = 2\dfrac{h}{\lambda}nSc\vec{e_x}$ homogène $D_{m1} = D_{m2}$ 60 µm $\mathcal{P} = \dfrac{1}{2}D_{\text{m}}(v_1^2 - v_2^2)$

$\text{d}m_2 = D_{m2}\,\text{d}t$ $-P_2S_2\vec{u}_x$ $\vec{F} = (P_1S_1 - P_2S_2)\vec{u}_x$ $\dfrac{1}{2}D_{\text{m}}v_2^2\,\text{d}t$ $\text{d}m = \text{d}m_1 - \text{d}m_2$

$v = 0{,}99\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $m^*(t) = m(t) + \text{d}m_1$ oui $-\vec{F}$ $F = 200\,\text{N}$ (c)

$\dfrac{1}{2}D_{\text{m}}v_1^2\,\text{d}t$ $\text{d}m^* = 0$ $\mathcal{P} = 3{,}6\times10^2\,\text{W}$ $Sc\,\text{d}t$ $D_{\text{m}}\vec{v_2}\,\text{d}t$ $\xi = 0{,}05$

$\vec{p}(t) = \dfrac{h}{\lambda}nSc\,\text{d}t\vec{e_x}$ (c) $\vec{p}(t+\text{d}t) = -\dfrac{h}{\lambda}nSc\,\text{d}t\vec{e_x}$ $\overrightarrow{F_{\text{P}}} = -D_{\text{m}}\vec{u}$ (b) (c)

$\text{d}m_1 = D_{m1}\,\text{d}t$ $D_v = 0{,}55\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$ $m\vec{g}$ 3,0 bar $U_1 = U_2 = 3{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$D_{\text{m}}\vec{v_1}\,\text{d}t$ $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\mu} = \text{cte}$ (c) non homogène (c) (b) 2×10^{-4}

$\mathcal{P} = 100\,\text{W}$ $3{,}1\times10^2\,\text{Pa}$ $5{,}9\times10^4\,\text{Pa}$ $P_1S_1\vec{u}_x$ $1{,}3\times10^2\,\text{J/kg}$ $\text{d}m_1 = \text{d}m_2$

$m^*(t+\text{d}t) = m(t+\text{d}t) + \text{d}m_2$ $-\mathcal{P}$ (b) oui homogène $\overrightarrow{dp} = D_{\text{m}}\vec{u}\,\text{d}t$

▶ Réponses et corrigés page 453

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Opérateurs vectoriels

Réponses

1.1 ..... ⓓ

1.2 a) .... $\left(z+y+\dfrac{yz}{a}\right)\vec{e_x}+\left(x+z+\dfrac{xz}{a}\right)\vec{e_y}+\left(x+y+\dfrac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$

1.2 b) ..... $6x\vec{e_x}+2a\vec{e_y}-2a\vec{e_z}$

1.2 c) ..... $(2xy+z^2)\vec{e_x}+(2yz+x^2)\vec{e_y}+(2xz+y^2)\vec{e_z}$

1.2 d) ..... $2y\vec{e_x}+2x\vec{e_y}+4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$

1.2 e) ..... $16xy\vec{e_x}+\left(8x^2-\dfrac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y}-5b^2\vec{e_z}$

1.3 a) ..... $\left(-\dfrac{2r}{a}-2\theta\right)\vec{e_r}-2\vec{e}_\theta+3\vec{e_z}$

1.3 b) ..... $-\dfrac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r}+\dfrac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$

1.3 c) ..... $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$

1.3 d) ..... $28\dfrac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\dfrac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\dfrac{1}{z}\vec{e_z}$

1.3 e) ..... $-\dfrac{z\sin\theta}{r^2}\vec{e_r}+\dfrac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\dfrac{\sin\theta}{r}\vec{e_z}$

1.4 ..... ⓐ

1.5 a) 16

1.5 b) ..... ⓒ

1.5 c) ..... ⓑ

1.5 d) ..... ⓐ

1.5 e) ..... ⓒ

1.5 f) ..... $2\sqrt{17}$

1.6 a) ..... ⓐ

1.6 b) ..... ⓑ

1.6 c) ..... ⓐ

1.6 d) ..... ⓑ

1.6 e) ..... ⓐ

1.7 a) ..... $6x+2a-2b$

1.7 b) ..... $2x+4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

1.7 c) ..... $16xy-\dfrac{6x^4}{y^2}$

1.7 d) 0

1.7 e) ..... $x(2y-x)$

1.8 a) ..... $-3\dfrac{r}{a}+1$

1.8 b) 0

1.9 ..... ⓑ

1.10 a) 3

1.10 b) 3

1.10 c) ..... ⓑ

1.11 a) ..... $\vec{0}$

1.11 b) ..... $-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x}-2x\vec{e_z}$

1.11 c) ..... $\dfrac{8x^2}{y}(3x-y)\vec{e_z}$

1.11 d) ..... $2\vec{e_y}$

1.11 e) ..... $x^2\vec{e_x}-2xy(\vec{e_y}+\vec{e_z})-x^2\vec{e_z}.$

1.12 a) ..... $-4\theta\vec{e_z}$

1.12 b) ..... $2\vec{e_z}$

1.13 a) ..... ⓑ

1.13 b) ..... $\boxed{0{,}80\,\text{UA/m}}$

1.13 c) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.13 d) ..... $\boxed{2}$

1.14 a) ..... $\boxed{\dfrac{2y}{a}}$

1.14 b) ..... $\boxed{2}$

1.14 c) ..... $\boxed{6-\dfrac{b^2}{z^2}}$

1.15 ..... $\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{2y}{a} \\ 2 \\ 6-\dfrac{b^2}{z^2} \end{pmatrix}}$

1.16 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

1.16 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.16 c) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.16 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.16 e) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.17 a) ..... $\boxed{\vec{e_r}+\dfrac{2a}{r}\vec{e_\theta}+\dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}}$

1.17 b) .... $\boxed{3r^2\begin{pmatrix} \sin^3(\theta-\varphi) \\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \\ -\dfrac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \end{pmatrix}}$

1.17 c) ..... $\boxed{r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ \cos\theta \\ \dfrac{1}{2\varphi} \end{pmatrix}}$

1.17 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r\cos^2\theta}\vec{e_\theta}}$

1.18 a) ..... $\boxed{3+\dfrac{4a\cos\theta}{r}-\dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}}$

1.18 b) ..... $\boxed{4r\sin\theta\sqrt{\varphi}+2r\cos\theta\sqrt{\varphi}+\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}}$

1.18 c) ..... $\boxed{1/\tan(\theta)}$

1.19 a) ..... $\boxed{\dfrac{6b}{r\varphi\tan\theta}\vec{e_r}-\dfrac{6b}{r\varphi}\vec{e_\theta}+\dfrac{2a\theta}{r}\vec{e_\varphi}}$

1.19 b) ..... $\boxed{\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta}-r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}}$

1.19 c) ..... $\boxed{2\vec{e_\varphi}}$

Corrigés

1.1 Calculons les trois composantes du vecteur gradient dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

On a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy.$$

Parmi les solutions proposées, la (c) est donc exclue.

Les solutions (a), (b) et (d) sont possibles (termes de droite corrects) mais les notations des gradients (termes de gauche) ne sont pas tous valables.

La notation $\vec{\nabla}$ comme $\overrightarrow{\text{grad}}$ doit être surmontée d'une flèche pour qualifier la nature vectorielle de l'opérateur gradient, donc les réponses (a) et (b) sont exclues. Précisons que le gradient s'applique à un champ scalaire donc un champ dont la notation ne doit pas être surmontée d'une flèche : deuxième manière d'exclure la réponse (b).

La réponse (d) est l'ultime solution restante, on constate bien qu'elle ne comporte aucune erreur de notation.

.....

1.2 a) Posons $f(x,y,z) = xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z + \frac{yz}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z + \frac{xz}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + x + \frac{xy}{a}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $\left(z + y + \dfrac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + y + \dfrac{xz}{a}\right)\vec{e_y} + \left(x + y + \dfrac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$.

La réponse attendue est bien un vecteur !

.....

1.2 b) Posons $f(x,y,z) = 3x^2 + 2a(y-z) + b^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2a.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$.

.....

1.2 c) Posons $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x + a^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2zx.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y} + (2xz + y^2)\vec{e_z}$.

.....

1.2 d) Posons $f(x,y,z) = 2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$.

.....

1.2 e) Posons $f(x,y,z) = 8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -5b^2.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \dfrac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$.

.....

1.3 a) Posons $f(r,\theta,z) = 3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2r}{a} - 2\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -2r \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\left(\dfrac{2r}{a} + 2\theta\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$.

.....

1.3 b) Posons $f(r,\theta,z) = \dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{5a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\dfrac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \dfrac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$.

.....

1.3 c) Posons $f(r,\theta,z)=\sqrt{r^2-a^2}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=0\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$.

.....

1.3 d) Posons $f(r,\theta,z)=7\left(\dfrac{r}{a}\right)^4\theta+\ln(z/b)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=28\frac{\theta r^3}{a^4},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=7\frac{r^2}{a^4}\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{z}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $28\dfrac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\dfrac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\dfrac{1}{z}\vec{e_z}$.

.....

1.3 e) Posons $f(r,\theta,z)=\dfrac{z}{r}\sin(\theta)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{z\sin\theta}{r^2},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{z\cos\theta}{r}\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\sin\theta}{r}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\dfrac{z\sin\theta}{r^2}\vec{e_r}+\dfrac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\dfrac{\sin\theta}{r}\vec{e_z}$.

.....

1.4 Considérons la notation du gradient (terme de gauche des équations proposées). La réponse (d) est exclue car la notation nabla d'un gradient ne fait pas intervenir le produit scalaire. La réponse (c) est exclue car le couple de variables ne correspond à aucun de ceux proposés par l'énoncé. Considérons donc la formule cartésienne du gradient (terme de droite des équations proposées) pour les deux options restantes. La réponse (b) fait une interversion des coordonnées de dérivation et de celles de direction, elle est donc exclue. La bonne réponse est (a).

.....

1.5 a) On a $g(A)=g(-1,1,2)=(-1-2)^2+(1+1)^2+2^2-1=9+4+4-1=16$.

.....

1.5 b) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_z}$ on obtient la quantité $2z$. Réponse (c).

.....

1.5 c) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_y}$ on obtient la quantité $2y+2$. Réponse (c).

.....

1.5 d) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_x}$ on obtient la quantité $2x-4$. Réponse (a).

.....

1.5 e) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z)) = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z} = (2(x-2))\vec{e_x} + (2y+2)\vec{e_y} + 2z\vec{e_z}.$$

Cette notation est équivalente au vecteur colonne de la réponse (c).

.....

1.5 f) Connaissant les composantes du gradient d'après les réponses précédentes, on peut exprimer la norme du vecteur gradient $\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\|$ en un point quelconque. On a

$$\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\| = \sqrt{(2x-4)^2 + (2y+2)^2 + 4z^2}.$$

On réalise l'application numérique au point $A(-1,1,2)$: on a

$$\left\|\vec{\nabla} g(A)\right\| = \left\|\vec{\nabla} g(-1,1,2)\right\| = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+2)^2 + 4\times 2^2} = \sqrt{36+16+16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

.....

1.6 a) Rappelons l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes : on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Or, ici $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = 2xy\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + a^2\vec{e_z}$, donc par identification : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. Réponse (a).

.....

1.6 b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ donc par intégration par rapport à la variable x il vient $f(x,y,z) = x^2y + \text{Cste}$ avec $\text{Cste} = g(y,z)$ une fonction des coordonnées y et z car $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial x} = 0$. Réponse (b)

.....

1.6 c) On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y}$. Or, d'après l'énoncé, on a

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2.$$

On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$. Réponse (a).

.....

1.6 d) On a $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0$ donc par intégration par rapport à la variable y il vient $g(y,z) = \text{Cste}$ avec $\text{Cste} = h(z)$ une fonction de la seule coordonnée z car $\dfrac{\partial h(z)}{\partial y} = 0$.

On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) = x^2y + h(z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial h}{\partial z}$. Or, on sait d'après l'énoncé que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. On déduit de ces deux équations que l'on a nécéssairement $\dfrac{\partial h}{\partial z} = a^2$ donc $h(z) = a^2z + \text{Cste}$ soit finalement $g = a^2z + \text{Cste}$. Réponse (b).

.....

1.6 e) On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) = x^2y + h(z) = x^2y + a^2z + \text{Cste}$. On a donc $f(0,0,0) = \text{Cste}$, or $f(0,0,0) = 0$ donc $\text{Cste} = 0$. Réponse (a).

.....

1.7 a) Pour éviter les étourderies vous pouvez vérifier que les trois termes de la somme ont bien la même dimension et que cette dimension correspond à la dimension de l'argument de l'opérateur divergence divisée par une longueur.

.....

1.7 b) On a $0 + 2x + 8\dfrac{a^2}{2b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}} = 2x + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$.

1.7 c) On a $8 \times 2xy - \dfrac{6x^4}{y^2} + 0 = 16y - \dfrac{6x^4}{y^2}$.

1.7 d) On a $0 + 0 = 0$.

1.7 e) On a $2xy - x^2 = x(2y - x)$.

1.8 a) On a $-3\dfrac{r}{a} - 2 + 3 = -3\dfrac{r}{a} + 1$.

1.8 b) La composante A_θ ne dépend pas de θ !

1.9 Il faut calculer chacune des divergences au point A.

- Cas (a) : on a $\mathrm{div}\left(x^2\vec{e_x} + y^2\vec{e_y} + z^2\vec{e_z}\right) = 2x + 2y + 2z$ donc la valeur de divergence en A vaut
$$2 \times (-1) + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = -2.$$
- Cas (b) : on a $\mathrm{div}\left(y^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + z^2\vec{e_z}\right) = 2z$ donc la valeur de divergence en A vaut $2 \times 1 = +2$.
- Cas (c) : on a $\mathrm{div}\left(z^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + y^2\vec{e_z}\right) = 0$ donc la valeur de divergence en A vaut 0.
- Cas (d) : on a $\mathrm{div}\left(y^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_z} + z^2\vec{e_y}\right) = 0$ donc la valeur de divergence en A vaut 0.

La valeur de divergence maximale est dans le cas (b).

1.10 a) On a $1 + 1 + 1 = 3$.

1.10 b) On a $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{3r^2}{r^2} = 3$.

1.10 c) On a $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{2r}{r} = 2$. Réponse (b).

1.11 a) On a $(0-0)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = \vec{0}$.

1.11 b) On a $\left(0 - \dfrac{8c^2}{2c}\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\right)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-2x)\vec{e_z} = -4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x} - 2x\vec{e_z}$.

1.11 c) On a $(0-0)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + \left(\dfrac{24x^3}{y} - 8x^2\right)\vec{e_z} = \dfrac{8x^2}{y}(3x - y)\vec{e_z}$.

1.11 d) On a $(0-0)\vec{e_x} + (1-(-1))\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = 2\vec{e_y}$.

1.11 e) On a $(x^2-0)\vec{e_x} + (0-2xy)\vec{e_y} + (-2xy-x^2)\vec{e_z} = x^2\vec{e_x} - 2xy(\vec{e_y} + \vec{e_z}) - x^2\vec{e_z}$.

1.12 a) On a $\left(\dfrac{1}{r} \times (0) - 0\right)\vec{e_r} + (0-0)\vec{e_\theta} + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(-2r^2\theta)}{\partial r} - 0\right)\vec{e_z} = -4\theta\vec{e_z}$.

1.12 b) On a $\left(\frac{1}{r}\times(0)-0\right)\vec{e_r}+(0-0)\vec{e_\theta}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}-0\right)\vec{e_z}=2\vec{e_z}$.

.....

1.13 a) Par définition du potentiel, on a $\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$. Cette quantité étant nulle sur une équipotentielle par définition, le vecteur $\vec{v}$ doit être nécessairement orthogonal au vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ en tout point de l'équipotentielle. Réponse (b).

.....

1.13 b) Au premier ordre on peut écrire que $v(\mathrm{C}) \approx \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta\ell}$. Graphiquement, au niveau du point C, on a :

$$\Delta\Phi = 1{,}60\,\mathrm{UA} - 1{,}20\,\mathrm{UA} = 0{,}40\,\mathrm{UA} \qquad \text{et} \qquad \Delta\ell = AC = 0{,}50\,\mathrm{m} \quad \text{donc} \quad v(\mathrm{C}) \approx 0{,}80\,\mathrm{UA/m}.$$

.....

1.13 c) Le champ demandé est orienté dans le sens du gradient de Φ, c'est-à-dire dans le sens des potentiels croissants. Réponse (a).

.....

1.13 d) Les deux points C et D sont sur une même ligne de champ. En considérant un tube de champ centré sur cette ligne de champ commune et qui s'appuie sur les deux autres lignes de champ de la figure, on peut écrire que : $S_\mathrm{C}v_\mathrm{C} = S_\mathrm{D}v_\mathrm{D}$. Les valeurs de S sont proportionnelles à la distance sur le graphe entre les deux lignes de champs délimitant le tube, donc en mesurant ces distances au niveau des points C et D on a : $\dfrac{S_\mathrm{D}}{S_\mathrm{C}} \approx \dfrac{1{,}6\,\mathrm{cm}}{0{,}8\,\mathrm{cm}} = 2{,}0$. L'intensité du champ $\vec{v}$ est environ 2 fois plus importante en C qu'en D. On retrouve le fait que plus les lignes de champs sont resserrées, plus le champ est intense.

.....

1.14 a) Posons $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y}{a} + bz + c^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit $\dfrac{2y}{a}$.

.....

1.14 b) Posons $f(x,y,z) = y^2 - 5az$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit 2.

.....

1.14 c) Posons $f(x,y,z) = b^2\ln(\frac{z}{a}) + 3x^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{b^2}{z^2}.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit $6 - \dfrac{b^2}{z^2}$.

.....

1.15 Posons $A_x(x,y,z) = \dfrac{x^2y}{a} + bz + c^2$ puis $A_y = y^2 - 5az$ et $A_z = b^2\ln(\frac{z}{a}) + 3x^2$. On calcule les laplaciens scalaires de ces trois fonctions selon la formule : $\Delta(f(x,y,z)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

On obtient $\Delta A_x = \dfrac{2y}{a}$, $\Delta A_y = 2$ et $\Delta A_z = 6 - \dfrac{b^2}{z^2}$. Le laplacien vectoriel s'écrit donc : $\dfrac{2y}{a}\vec{e_x} + 2\vec{e_y} + 6 - \dfrac{b^2}{z^2}\vec{e_z}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme du vecteur colonne proposée en réponse.

.....

1.16 a) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{grad}}\, A$ et non $\text{grad}(A)$!!

.....

1.16 b) L'argument est un vecteur, pensez à choisir la base de projection de façon à faciliter le calcul.

.....

1.16 c) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$ et non $\text{rot}(\vec{A})$!!

.....

1.16 d) Vérifiez l'homogénéité des trois termes : homogénéité de l'argument du laplacien divisée par le carré d'une longueur !

.....

1.16 e) Neuf termes à calculer ! Heureusement souvent beaucoup sont nuls du fait des symétries et invariances...

.....

1.17 a) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{-6b}{\varphi^2}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $1\vec{e_r} + \dfrac{2a}{r}\vec{e_\theta} + \dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}$.

.....

1.17 b) Posons $f(r,\theta,\varphi) = (r\sin(\theta-\varphi))^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^2\sin^3(\theta-\varphi), \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\sin\theta.$$

Donc, le vecteur gradient de f s'écrit bien sous la forme du vecteur colonne proposée en réponse.

.....

1.17 c) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{r\sin\theta}{2\varphi}.$$

Donc, le vecteur gradient de f s'écrit bien sous la forme du vecteur colonne proposée en réponse.

.....

1.17 d) La seule dérivée partielle non nulle est celle par rapport à la coordonnée θ. On peut soit utiliser la dérivation de la fonction tangente soit développer grâce à l'identité $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

.....

1.18 a) On calcule $3\dfrac{r^2}{r^2} + \dfrac{1}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{-6a}{\varphi^2} = 3 + \dfrac{2\cos\theta}{r} - \dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}$.

.....

1.18 b) On calcule $\dfrac{4r^3}{r^2}\sin\theta\sqrt{\varphi} + \dfrac{1}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta r^2\sqrt{\varphi} + \dfrac{1}{r\sin\theta}r^2\sin\theta\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi}} = 4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}$.

.....

1.18 c) La composante A_θ ne dépend que de r.

.....

1.19 a) On calcule $\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{6b}{\varphi}\cos\theta - 0\right)\vec{e_r} + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \dfrac{1}{r}\dfrac{6b}{\varphi}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}(2a\theta - 0)\vec{e_\varphi}$.

.....

1.19 b) On a

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\vec{e_r}\big)\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}) - \frac{1}{r}\times 0\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(0 - \frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\right)\vec{e_\varphi}\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\vec{e_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\vec{e_\varphi}\\
&= \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}.
\end{aligned}$$

1.19 c) On calcule $\frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \frac{1}{r}\times 0\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) - 0\right)\vec{e_\varphi} = 2\vec{e_\varphi}$.

Fiche n° 2. Changements de référentiel

Réponses

2.1 a) ..... (b)

2.1 b) ..... (a)

2.1 c) ..... (d)

2.2 a) ..... Vrai

2.2 b) ..... Faux

2.2 c) ..... Faux

2.3 a) ..... (a)

2.3 b) ..... (b)

2.3 c) ..... (b)

2.3 d) ..... (b)

2.4 a) ..... (c)

2.4 b) ..... (b)

2.4 c) ..... (a)

2.4 d) ..... (d)

2.4 e) ..... $-\omega^2 r\vec{e_r}$

2.4 f) ..... $2\omega\dot{r}\vec{e_\theta}$

2.4 g) ..... $\ddot{r}\vec{e_r}$

2.5 a) ..... (a)

2.5 b) ..... (a) et (b)

2.5 c) ..... (d)

2.5 d) ..... (c)

2.5 e) ..... (c)

2.5 f) ..... (c)

2.6 a) ..... $\vec{0}$

2.6 b) ..... $m\omega_0^2\ell\vec{e_r}$

2.6 c) ..... $\dfrac{m\omega_0^2\ell\vec{e_r}}{2}$

2.7 ..... (c)

2.8 a) ..... $2m\omega_0 v_1\vec{e_x}$

2.8 b) .... $2m\omega_0(v_2\vec{e_y} - v_1\vec{e_z})$

2.8 c) ..... $-2m\omega_0 v_1\vec{e_\theta}$

2.8 d) ..... $2m\omega_0 v_1\vec{e_r}$

2.9 a) ..... (c)

2.9 b) ..... (c)

2.9 c) ..... $-2m\Omega\dot{z}\cos\lambda\vec{e_x}$

2.10 a) ..... (c)

2.10 b) ..... (b)

2.10 c) ..... $3{,}8\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

2.11 a) 0,5

2.11 b) ..... (b)

2.11 c) ..... $-mg\vec{e_y}$

2.11 d) ..... $T\sin(\theta_e)\vec{e_x} + T\cos(\theta_e)\vec{e_y}$

2.11 e) ..... $-ma\vec{e_x}$

2.11 f) ..... (d)

2.11 g) ..... (b)

2.11 h) ..... 27°

2.12 a) ..... (b)

2.12 b) ..... (c)

2.12 c) ..... $\sqrt{\dfrac{\mu g}{d}}$

2.12 d) ..... $10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

2.13 a) ..... T^{-2}

2.13 b) ..... (b)

2.13 c) ..... (a)

2.13 d) ..... $\dfrac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$

2.13 e) ..... (c)

Corrigés

2.1 a) Cette trajectoire est appelée cycloïde.

.....

2.1 b) Le centre de la roue est immobile dans le référentiel du vélo, et le point V a une trajectoire circulaire autour de l'axe (fixe) de la roue.

.....

2.1 c) La valve V du vélo appartient au solide de référence de ce référentiel : il est donc fixe dans ce référentiel.

.....

2.2 a) Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen, donc il est lui-même galiléen.

.....

2.2 b) Le référentiel $\mathcal{R}_2$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen (il est en rotation !), donc il n'est pas galiléen.

.....

2.2 c) Le référentiel $\mathcal{R}_3$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen (il est accéléré !), donc il n'est pas galiléen.

.....

2.3 a) $\mathcal{R}_t$ est un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen), donc il est lui-même galiléen. $\mathcal{R}_p$ est immobile par rapport à $\mathcal{R}_t$ donc $\mathcal{R}_p$ est aussi galiléen. Réponse (a).

.....

2.3 b) Le référentiel $\mathcal{R}_t$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) ; donc il n'est pas galiléen. $\mathcal{R}_p$ est immobile par rapport à $\mathcal{R}_t$ donc $\mathcal{R}_p$ n'est pas galiléen.

.....

2.3 c) Le référentiel $\mathcal{R}_t$ est en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen), donc il n'est pas galiléen. Le référentiel $\mathcal{R}_p$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_t$ qui est non galiléen ; donc $\mathcal{R}_p$ n'est pas galiléen.

.....

2.3 d) Le référentiel $\mathcal{R}_t$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen), donc il n'est pas galiléen. Le référentiel $\mathcal{R}_p$ est en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_t$ qui est non galiléen. Il sera *a priori* non galiléen aussi sauf si la vitesse de marche compense exactement le déplacement du train, ce qui paraît peu probable...

.....

2.4 b) Le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$, il n'est donc pas galiléen.

.....

2.4 c) On rappelle qu'une accélération est homogène à une distance divisée par un temps au carré (comme le montre la formule $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}$) ; donc, on a $[a] = L.T^{-2}$.

On constate que seule la réponse (a) est constituée de deux termes homogènes à une accélération.

.....

2.4 d) Par analyse dimensionnelle, on constate que seule la réponse (d) est constituée d'un terme homogène à une accélération.

.....

2.4 e) On a $\vec{a_e} = \vec{\Omega} \wedge (\Omega\vec{e_z} \wedge r\vec{e_r}) = \Omega\vec{e_z} \wedge \omega r\vec{e_\theta}$ soit $\vec{a_e} = -\omega^2 r\vec{e_r}$.

.....

2.4 f) La vitesse $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$ vaut $\dot{r}\vec{e_r}$. Ainsi, l'accélération de Coriolis vaut : $\vec{a_C} = 2\omega\dot{r}\vec{e_\theta}$

.....

2.4 g) En utilisant l'expression de $\vec{a}_{\mathcal{R}}(\mathrm{M})$ issue des questions c et d, et la loi de composition des accélérations, on trouve $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(\mathrm{M}) = \ddot{r}\vec{e_r}$.

.....

2.5 a) Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en rotation dans $\mathcal{R}_t$. *A priori*, il faut prendre en compte la force d'inertie centrifuge et à la force d'inertie de Coriolis. Cependant, la vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ est nulle, donc la force de Coriolis est nulle : réponse (a).

.....

2.5 b) Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en rotation dans $\mathcal{R}_t$. *A priori*, il faut prendre en compte la force d'inertie centrifuge et à la force d'inertie de Coriolis : réponses (a), (b).

.....

2.5 c) Le référentiel $\mathcal{R}_2$ est en translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_t$: c'est donc un référentiel galiléen. Aucune force d'inertie n'est à prendre en compte : réponse (d).

.....

2.5 d) Le référentiel $\mathcal{R}_3$ est en translation rectiligne non uniforme dans $\mathcal{R}_t$: il non galiléen.

.....

2.5 e) Le référentiel $\mathcal{R}_3$ est en translation rectiligne non uniforme dans $\mathcal{R}_t$: il est non galiléen.

.....

2.5 f) Le référentiel $\mathcal{R}_4$ est en translation rectiligne non uniforme dans $\mathcal{R}_t$: il est non galiléen.

.....

2.6 a) Si le point M est placé sur l'axe de rotation, la distance HM est nulle.

.....

2.6 b) Comme le point M est placé dans le plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ (ou dans le plan $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$), la distance HM vaut ℓ. Ainsi, on a $\overrightarrow{f_{ie}} = m\omega_0^2 \ell \vec{e_r}$.

.....

2.6 c) Dans cette situation, on a $HM = \ell \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{f_{ie}} = m\omega_0^2 \ell \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_r} = \frac{m\omega_0^2 \ell \vec{e_r}}{2}$.

.....

2.7 On a $\overrightarrow{f_{iC}} = -2m\Omega_0 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}v_1\\0\\0\end{pmatrix} = -2m\Omega_0 v_1 \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 2m\Omega_0 v_1 \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

.....

2.8 a) Comme $\vec{e_z} \wedge \vec{e_y} = -\vec{e_x}$, alors l'expression de la force de Coriolis est $\overrightarrow{f_{iC}} = 2m\omega_0 v_1 \vec{e_x}$.

.....

2.8 b) On a $\overrightarrow{f_{iC}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M) = -2m(\omega_0 v_1 \vec{e_x} \wedge \vec{e_y} + \omega_0 v_1 \vec{e_x} \wedge \vec{e_z})$ ainsi $\overrightarrow{f_{iC}} = 2m\omega_0(v_2 \vec{e_y} - v_1 \vec{e_z})$.

.....

2.8 c) Comme $\vec{e_z} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta}$, alors l'expression de la force de Coriolis est $\overrightarrow{f_{iC}} = -2m\omega_0 v_1 \vec{e_\theta}$.

.....

2.8 d) Le produit vectoriel $\vec{e_z} \wedge \vec{e_z} = \vec{0}$, il faut donc se concentrer sur $\vec{e_z} \wedge \vec{e_\theta} = -\vec{e_r}$ donc $\overrightarrow{f_{iC}} = 2m\omega_0 v_1 \vec{e_r}$.

.....

2.9 a) La période de rotation de la Terre sur elle-même est de $T = 24\,\text{h} = 86\,400\,\text{s}$; sa vitesse angulaire autour de l'axe (O, Z) est donc $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

.....

2.9 b) L'angle entre le vecteur $\vec{\Omega}$ et l'axe (Ay) est la latitude λ. Par conséquent, la projection fait apparaître un $\cos\lambda$ sur $\vec{e_y}$ et un $\sin\lambda$ sur $\vec{e_z}$. La projection sur $\vec{e_x}$ est nulle car $\vec{\Omega} \perp \vec{e_x}$. C'est donc la réponse (c).

.....

2.9 c) Le produit vectoriel $\Omega\begin{pmatrix}0\\ \cos\lambda\\ \sin\lambda\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{z}\end{pmatrix}$ amène $-2m\Omega\cos\lambda\dot{z}\vec{e_x}$.

.....

2.10 a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ est nécessairement dirigé radialement, donc suivant le vecteur $\vec{e_r}$: réponse (c).

.....

2.10 b) Pour commencer, le $\cos\alpha$ n'a pas de dimension. Seul le rapport $\frac{g}{\ell}$ est homogène à un temps à la puissance -2, comme doit l'être ω^2. C'est donc la réponse (b).

.....

2.11 a) On a $f_{\mathrm{ie}} = 0{,}025\,\mathrm{N}$ et $P = 0{,}05\,\mathrm{N}$, ainsi le rapport entre les deux normes vaut 0,5.

.....

2.11 b) Le rapport des normes des forces vaut 0,5 ; les deux forces sont du même ordre de grandeur.

.....

2.11 f) L'utilisation du principe fondamental dans un référentiel non galiléen comme $\mathcal{R}_1$ nécessite l'utilisation des forces d'inertie (d'entrainement ici). La réponse (d) est pour laquelle la force d'entrainement $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = -m\vec{a_{\mathrm{e}}}$ est correctement utilisée.

.....

2.11 g) Le nombre $\tan(\theta_{\mathrm{e}})$ est sans dimension. Seul le rapport de a sur g est aussi adimensionné : réponse (b).

.....

2.12 a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est bien colinéaire et dans le même sens que $\vec{e_r}$. C'est donc la réponse (b).

.....

2.12 b) Le palet est expulsé radialement par la force centrifuge (dirigée suivant $+\vec{e_r}$). C'est donc la réponse (c).

.....

2.12 c) Dans le cas limite, les deux forces radiales se compensent : $\mu mg = m\omega_{\max}^2 d$, soit $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$.

.....

2.13 a) La dimension est identique à celle de l'autre terme de la différence, soit T^{-2}.

.....

2.13 b) C'est le signe de $\frac{k}{m} - \omega^2$ qui indique la solution. Ici ce terme est négatif. Ce n'est donc pas l'équation de l'oscillateur harmonique ! La solution diverge : (b).

.....

2.13 c) C'est le signe de $\frac{k}{m} - \omega^2$ qui indique la solution. Ici ce terme est positif. C'est l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti ! C'est la réponse (a).

.....

2.13 d) Comme $\omega^2 < \frac{k}{m}$, la solution est du type oscillateur harmonique : $x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. L'application de $x(0) = 0$ implique que $A = 0$.

Ainsi, $\dot{x}(t) = B\Omega\cos(\Omega t)$ et la condition $\dot{x}(0) = v_0$ impliquent que $B\Omega = v_0$.

Finalement, $x(t) = \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$.

.....

2.13 e) La solution correspondant à $\omega^2 > \frac{k}{m}$ est de la forme $x(t) = A\cosh(\Omega t + \varphi)$. C'est une solution divergente ; le seul graphique qui représente une solution divergente est le (c).

.....

Fiche n° 3. Électrostatique

Réponses

3.1 a) $\boxed{R\,\mathrm{d}\theta}$

3.1 b) $\boxed{2\pi R}$

3.1 c) $\boxed{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$

3.1 d) $\boxed{\pi R^2}$

3.1 e) $\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

3.2 a) $\boxed{\lambda_0 \ell}$

3.2 b) $\boxed{2\pi^2 q_0}$

3.3 a) $\boxed{+1\,000 \times e}$

3.3 b) $\boxed{L \times \ell}$

3.3 c) $\boxed{2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}}$

3.4 a) $\boxed{(\mathrm{O}, \vec{e_x} + \vec{e_y}, \vec{e_z}),\ (\mathrm{O}, \vec{e_x} - \vec{e_y}, \vec{e_z}) \text{ et } (\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})}$

3.4 b) $\boxed{(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_z}) \text{ et } (\mathrm{O}, \vec{e_y}, \vec{e_z})}$

3.5 a) $\boxed{6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}}$

3.5 b) $\boxed{3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}}$

3.5 c) $\boxed{7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2}}$

3.5 d) $\boxed{6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}$

3.6 a) $\boxed{\text{b}}$

3.6 b) $\boxed{\text{c}}$

3.6 c) $\boxed{0}$

3.7 a) $\boxed{\text{b}}$

3.7 b) $\boxed{\text{b}}$

3.7 c) $\boxed{\text{d}}$

3.7 d) $\boxed{\text{b et c}}$

3.8 a) $\boxed{-2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}}$

3.8 b) $\boxed{5\vec{e_y}}$

3.8 c) $\boxed{\text{b et c}}$

3.9 a) $\boxed{\vec{e_y}}$

3.9 b) $\boxed{\vec{e_z}}$

3.9 c) $\boxed{\text{d}}$

3.10 $\boxed{\text{b et d}}$

3.11 a) $\boxed{\text{c et d}}$

3.11 b) $\boxed{\text{a et d}}$

3.12 $\boxed{\text{c}}$

3.13 a) $\boxed{\text{d}}$

3.13 b) $\boxed{\text{c}}$

3.13 c) $\boxed{\text{b}}$

3.13 d) $\boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 + R^2}}\right)}$

3.13 e) $\boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

3.13 f) $\boxed{\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}}$

3.14 a) $\boxed{\text{a et f}}$

3.14 b) $\boxed{0}$

3.15 a) $\boxed{\text{d}}$

3.15 b) $\boxed{\text{c}}$

3.15 c) $\boxed{\underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1 - \cos\alpha)}$

3.15 d) $\boxed{1{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{V \cdot m}}$

3.16 a) ..... $\boxed{4\pi r^2 E(r)}$

3.16 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

3.16 c) ..... $\boxed{q \text{ et } 0}$

3.17 a) ..... $\boxed{\text{nulle}}$

3.17 b) ..... $\boxed{\text{négative}}$

3.17 c) ..... $\boxed{\text{nulle}}$

3.17 d) ..... $\boxed{\text{positive}}$

3.18 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

3.18 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

3.19 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

3.19 b) ..... $\boxed{V(a)}$

3.19 c) ..... $\boxed{E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1})}$

3.20 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

3.20 b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r}\left(1+\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)}$

3.20 c) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r}\left(1-\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)}$

3.20 d) ..... $\boxed{\dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

3.21 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

3.21 b) ..... $\boxed{\text{positif}}$

3.21 c) ..... $\boxed{1\times10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}.}$

3.21 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

3.22 a) ..... $\boxed{Q=4\rho_0\mathcal{A}H/3,\ \rho_\mathrm{m}=2\rho_0/3}$

3.22 b) ..... $\boxed{Q=\rho_0\pi R^2H/2,\ \rho_\mathrm{m}=\rho_0/2}$

3.22 c) ..... $\boxed{Q=\rho_0 4\pi R^3,\ \rho_\mathrm{m}=0}$

3.23 ..... $\boxed{\text{a}}$

3.24 ..... $\boxed{0}$

3.25 ..... $\boxed{\text{a}}$

3.26 a) ..... $\boxed{\text{d}}$

3.26 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

3.27 a) ..... $\boxed{\text{Courbe } 3}$

3.27 b) ..... $\boxed{\text{Courbe } 1}$

3.27 c) ..... $\boxed{\text{Courbe } 2}$

3.28 ..... $\boxed{\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{h}{R(R+h)}}$

Corrigés

3.1 a) Comme r et z sont constants, $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}z$ sont nuls ; ainsi $\mathrm{d}\mathcal{C}=R\,\mathrm{d}\theta$.

.....

3.1 b) On a $\mathcal{C}=\displaystyle\int_0^{2\pi}R\,\mathrm{d}\theta=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=R[\theta]_0^{2\pi}=2\pi R.$

.....

3.1 d) On a $\mathcal{S}=\displaystyle\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^R r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R[\theta]_0^{2\pi}=\frac{R^2}{2}\times2\pi=\pi R^2.$

.....

3.1 e) On a

$$\mathcal{V}=\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^R\times\big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi}\times\big[\varphi\big]_0^{2\pi}=\frac{R^3}{3}\times\big(-(-1-1)\big)\times2\pi=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

.....

3.2 a) On a $Q = \displaystyle\int_0^\ell \lambda_0 \,\mathrm{d}x = \lambda_0 \int_0^\ell \mathrm{d}x = \lambda_0 \big[x\big]_0^\ell = \lambda_0 \ell$.

.....

3.2 b) On a $Q = \displaystyle\int_0^{2\pi} \lambda(\theta) a \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} q_0 \frac{\theta}{a} a \,\mathrm{d}\theta = q_0 \int_0^{2\pi} \theta \,\mathrm{d}\theta = q_0 \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 q_0$.

.....

3.3 a) Chaque électron porte la charge (négative) $-e$. En arrachant N électrons de la feuille, celle-ci se charge positivement : on a $Q = +N \times e$, avec $N = 1\,000$.

.....

3.3 b) La feuille est modélisée par un rectangle d'aire $S = L \times \ell$.

.....

3.3 c) Il suffit de faire l'application numérique : $\sigma = 2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

.....

3.5 a) On a $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

3.5 b) La densité volumique de charge est uniforme donc la charge totale est donnée par

$$Q = \rho_0 V = 3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C},$$

en écriture scientifique, et en ne gardant que deux chiffres significatifs.

.....

3.5 c) On a $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2}$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

3.5 d) La densité surfacique de charge étant uniforme, $Q = \sigma \mathcal{A} = 6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$, en écriture scientifique, et en ne gardant qu'un chiffre significatif (autant que la donnée qui possède le moins de chiffres significatifs).

.....

3.6 a) L'élément de surface $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ est la multiplication du déplacement élémentaire $R\,\mathrm{d}\theta$ le long de la circonférence d'un cercle de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}z)$ du tube et du déplacement élémentaire $\mathrm{d}z$ le long de l'axe $(\mathrm{O}z)$.

.....

3.6 b) On a $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z$.

.....

3.6 c) On a $Q = \sigma_0 RH \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$. Le tube n'est globalement pas chargé. Ce résultat était attendu puisque la densité surfacique de charge est $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$ (les charges positives et négatives se répartissent de manière égale sur sa surface).

.....

3.7 d) Le cylindre étant désormais infini, la distribution devient invariante par translation suivant $(\mathrm{O}z)$.

.....

3.8 a) Le principe de superposition assure que le champ électrostatique total en M_1 est la somme des champs produits par les deux sources.

.....

3.8 c) Le point M_3 est le symétrique du point M_1 par rapport au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, le vecteur-champ en M_3 est le symétrique du vecteur-champ en M_1 par rapport au plan $\mathcal{P}$. Enfin, le point M_2 appartient à ce plan de symétrie donc le vecteur-champ au point M_2 appartient également à ce plan de symétrie.

.....

3.9 a) La projection du vecteur $\vec{e_y}$ est nulle sur le plan (Π_1), donc $\vec{e_y}$ est normal à ce plan.

.....

3.9 b) La projection du vecteur $\vec{e_z}$ est nulle sur le plan (Π_2), donc $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

.....

3.9 c) En un point M d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan. Par exemple, si le point M est sur l'axe (Ox), appartenant au plan (Π_2), le champ électrostatique est suivant l'axe (Oz) : $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_z}$.

.....

3.10 Le plan $(M, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est un plan de symétrie donc $\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{e_x} + E_y(x,y,z)\vec{e_y}$. Enfin, l'invariance par translation selon $\vec{e_z}$ permet d'affirmer que les composantes E_x et E_y, et donc la norme $\left\|\vec{E}\right\|$, de $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas de z.

.....

3.13 a) En repérage cylindrique, le déplacement élémentaire est $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$. Sur le disque, z est fixé (à 0) donc l'aire s'obtient en multipliant les deux composantes non nulles du vecteur-déplacement élémentaire $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

.....

3.13 b) Par relation de Chasles, on a $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{e_z} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})\cdot\vec{e_z} = r\vec{e_r}\cdot\vec{e_z} + z\vec{e_z}\cdot\vec{e_z} = 0 + z$.

.....

3.13 c) On a $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ donc $PM = \sqrt{\overrightarrow{PM}^2} = \sqrt{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PM}} = \sqrt{z^2+r^2}$.

.....

3.13 d) En séparant les variables et en effectuant le changement de variable $u = r^2$ (d'où $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$), il vient :

$$E_z = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_{u=0}^{u=R^2}(u+z^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[-2(u+z^2)^{-1/2}\right]_{u=0}^{u=R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}\right).$$

.....

3.13 e) On a $\sqrt{1+R^2/z^2} \xrightarrow[R/z\to+\infty]{} \infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}} \xrightarrow[R/z\to\infty]{} 0$. Ainsi, $E_z \xrightarrow[R/z\to\infty]{} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

.....

3.13 f) Le développement limité fourni permet d'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \underset{R/z\to 0}{=} 1 - \frac{R^2}{2z^2} \quad \text{d'où} \quad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2}\right] = \frac{\overbrace{\pi R^2\sigma}^{Q_0}}{4\pi\varepsilon_0 z^2},$$

ce qui correspond bien au champ créé par une charge ponctuelle de charge Q_0 et distante de z du point d'observation.

.....

3.15 a) L'aire d'un élément de surface d'une sphère de rayon r est $\mathrm{d}S = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Ici, le rayon de la calotte est R donc la variable r est fixée à R. En conclusion, $\mathrm{d}S = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

.....

3.15 b) Pour rappel, la colatitude θ est définie sur $[0,\pi]$ quand la longitude φ est décrite sur $[0,2\pi]$.
Pour décrire/paramétriser la calotte, on peut procéder de la sorte : on considère un point $M(R,\theta,\varphi)$ sur la calotte, et on lui fait faire un tour complet autour de l'axe (Oz) : φ a parcouru l'intervalle $[0,2\pi]$ en décrivant un cercle. Ensuite, la calotte peut être vue comme un « accolage » de cercles de rayon allant de $R\sin\alpha$ à 0 (le cercle de rayon nul étant confondu avec un point de l'axe (Oz)). En d'autres termes, cela implique que $\theta \in [\pi-\alpha,\pi]$.
Ainsi, pour totalement parcourir la calotte, il faut $\varphi \in [0,2\pi]$ et $\theta \in [\pi-\alpha,\pi]$. Il vient

$$\phi = \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r.$$

.....

3.15 c) Le champ $\vec{E}$ est celui sur la calotte sphérique, soit en $r = R$. Ainsi, on a

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times R^2 \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \qquad \text{donc} \qquad \phi = \underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1-\cos\alpha).$$

3.15 d) Pour $\alpha = \pi$ et $q = e$, on a $\phi = \dfrac{e}{\varepsilon_0}$. Donc, après calcul, $\phi = 1{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}$.

3.16 a) On a $\phi(\vec{E}) = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$.

3.16 b) Le théorème de Gauss assure que $\phi(\vec{E}) = Q/\varepsilon_0$ donc $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E}) = \varepsilon_0 4\pi r^2 E(r) = q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$.

3.18 a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

3.18 b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

3.19 a) Le segment AB a une pente constante $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2a-0}{2a-a} = 2$. Or, cette dernière correspond à $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ainsi, $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$.

3.19 b) Pour $x > 0$, le champ $\vec{E}$ est orienté suivant $+\vec{e_x}$. Il s'agit donc du sens des potentiels décroissants. Comme $2a > a$, $V(2a) < V(a)$. $V(a)$ est donc le potentiel le plus élevé.

3.19 c) Le champ étant porté par $\vec{e_x}$, on a $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = E_x dx$. On a alors

$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_a^{2a} E_0\left(1-\mathrm{e}^{-x/a}\right)dx = E_0\left[x + a\mathrm{e}^{-x/a}\right]_a^{2a} = E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}).$$

3.20 a) On a $\mathrm{AM}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}} = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$.

3.20 b) On a $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 - \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$. On utilise ensuite l'approximation $(1+\varepsilon)^\alpha = 1+\alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε autour de 0. À l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

3.20 c) De manière similaire, $\mathrm{BM}^2 = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 + \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$ et à l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

3.20 d) On a $V(\mathrm{M}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{AM}} - \dfrac{1}{\mathrm{BM}}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r} - 1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right) = \dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

3.21 a) Les lignes de champ électrostatique sont orientées vers les charges négatives.

3.21 b) Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, le champ électrostatique pointe vers les valeurs de potentiel décroissantes, d'où le signe $+$.

3.21 c) En appelant A_{100} et A_{200} les projetés respectifs de A sur les équipotentielles de 100 V et 200 V, alors la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$ (car ici $\vec{E}(\text{A})$ est selon $\vec{e_z}$) permet d'approximer la norme du champ en A :

$$E(\text{A}) = \frac{V(\text{A}_{200}) - V(\text{A}_{100})}{z_{\text{A}_{200}} - z_{\text{A}_{100}}} = \frac{200 - 100}{2{,}5\,\text{division} \times 40\,\text{cm}\cdot\text{division}^{-1}} = 1 \times 10^2\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

.....

3.21 d) Du fait de la verticalité de l'individu par rapport à l'horizontalité du sol, les équipotentielles sont davantage resserrées en B qu'en A ; ainsi, le champ électrostatique est plus intense en B qu'en A : c'est l'effet de pointe.

.....

3.22 a) Sachant que $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}S \int_{z=-H}^{z=H} \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right) \mathrm{d}z = \rho_0 \mathcal{A}\left[z - \frac{z^3}{3H^2}\right]_{-H}^{H} = 4\rho_0 \mathcal{A} H/3\,.$$

Le volume du pavé est $2H\mathcal{A}$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = 2\rho_0/3$.

.....

3.22 b) Sachant que $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \int_{r=0}^{r=R} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{z=0}^{z=H} \mathrm{d}z = \rho_0 \left[\frac{r}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R \big[\theta\big]_0^{2\pi} \big[z\big]_0^H = \rho_0 \pi R^2 H/2.$$

Le volume du cylindre est $\pi R^2 H$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = \rho_0/2$.

.....

3.22 c) Sachant que $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 R^2 \int_{r=0}^{r=+\infty} \mathrm{e}^{-r/R}\,\mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi = \rho_0 R^2 \big[-R\mathrm{e}^{-r/R}\big]_0^{+\infty} \big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \rho_0 4\pi R^3.$$

Le volume de l'espace étant infini mais la charge totale finie, la charge volumique moyenne est nulle : $\rho_\text{m} = 0$.

.....

3.24 On a $\text{div}\,\vec{E}_1 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\frac{\alpha}{r})}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial 0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial 0}{\partial z} = 0 + 0 + 0.$

.....

3.26 a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

.....

3.26 b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

.....

3.27 a) Le potentiel s'annule en $r = r_0$, est positif pour $r < r_0$ et négatif pour $r > r_0$.

.....

3.27 b)

- Pour $0 \leqslant r \leqslant R$, l'expression fournie est celle d'un polynôme de degré 2 en r dont la représentation graphique est une parabole. Ici, le coefficient devant r^2 est négatif donc la parabole est orientée vers les valeurs négatives.
- Pour $r \geqslant R$, l'expression fournie est une fonction inverse dont la représentation graphique est une branche d'hyperbole.

Les deux expressions prennent la même valeur en $r = R$: la fonction est continue.

.....

3.27 c) L'équation fournie est celle d'une droite décroissante dont l'ordonnée à l'origine est non nulle : le potentiel décroît de manière affine. Seule la courbe (2) correspond à un tel cas.

.....

3.28 Sachant que $\mathrm{d}\tau = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{r=R}^{r=R+h}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\Big[-\frac{1}{r}\Big]_R^{R+h}\big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi}\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{h}{R(R+h)}.$$

.....

Fiche n° 4. Magnétostatique

Réponses

4.1 a) ..... ⓐ et ⓓ

4.1 b) ..... ⓓ

4.1 c) ..... ⓐ

4.2 ..... $2j_0 S\dfrac{b}{a}$

4.3 ..... $j_{s,0}\ell$

4.4 a) ..... ⓓ

4.4 b) ..... $4\pi R^2 j_r(R)$

4.5 ..... ⓑ et ⓒ

4.6 a) ..... ⓐ, ⓒ et ⓓ

4.6 b) ..... ⓑ, ⓒ et ⓓ

4.6 c) ..... ⓐ, ⓒ et ⓓ

4.7 a) ..... $4d\ell j_0$

4.7 b) ..... ⓐ et ⓒ

4.7 c) ..... ⓑ

4.8 a) ..... $-\mu_0 n_2 I_2 \vec{e_y}$

4.8 b) ..... ⓓ

4.9 ..... ⓓ

4.10 ..... ②

4.11 a) ..... ②

4.11 b) ..... ⓑ

4.12 a) ..... $4Bd$

4.12 b) ..... $-2Bd$

4.12 c) ..... $\dfrac{7\pi}{2}Bd$

4.13 a) I

4.13 b) 0

4.13 c) ..... $-I$

4.13 d) ..... $4I$

4.14 a) ..... ⓐ et ⓔ

4.14 b) 0

4.15 a) 0

4.15 b) ..... $-Bax$

4.15 c) ..... $-Ba^2$

4.16 a) ..... ⓑ

4.16 b) ..... $\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

4.16 c) ..... $\dfrac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R+a/2}{R-a/2}\right)$

4.17 a) ..... $1\times10^1\,\mathrm{T}$

4.17 b) ..... $4\times10^2\,\mathrm{Wb}$

4.17 c) ..... $3\times10^2\,\mathrm{Wb}$

4.18 a) ..... ⓒ

4.18 b) ..... $\dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$

4.19 ..... ⓓ

4.20 a) ..... mB_{ext}

4.20 b) ..... $\dfrac{mB_{\mathrm{ext}}}{Mg}$

4.21 a) ..... $-\vec{e_z}$

4.21 b) ..... $+\vec{e_z}$

4.21 c) ..... $+\vec{e_z}$

4.21 d) ..... $+\vec{e_z}$

4.22 a) ..... $\boxed{-\dfrac{\mu_0 Im}{2\pi r^2}\vec{e_r}}$

4.22 b) ..... Ⓑ

4.23 ..... Ⓒ

4.24 ..... Ⓐ

4.25 a) ..... Ⓓ

4.25 b) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2\vec{e_z}}_{\vec{S}}}$

4.25 c) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}}$

4.25 d) ..... Ⓑ

4.26 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

4.26 b) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

4.26 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

4.26 d) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

Corrigés

4.1 a) L'intensité du courant s'exprime en fonction des densités surfacique et volumique de courant grâce aux relations $I = \iint \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ et $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$.

.....

4.1 b) On note j la norme du vecteur $\vec{j}$. On a $I = \iint \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ donc $\mathrm{I} = [j]\times\mathrm{L}^2$ et donc $[j] = \mathrm{I}\cdot\mathrm{L}^{-2}$.

.....

4.1 c) On note j_s la norme du vecteur $\vec{j_\mathrm{s}}$. On a $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ donc $\mathrm{I} = [j_\mathrm{s}]\times\mathrm{L}$ et donc $[j_\mathrm{s}] = \mathrm{I}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

.....

4.2 On a $I = \iint \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint j_0\vec{e_z}\cdot\mathrm{d}S\vec{e_z} = \int_0^a j_0\dfrac{b}{r}2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi j_0 b\times a$, soit $I = 2j_0 S\dfrac{b}{a}$, avec $S = \pi a^2$.

.....

4.3 On a $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^\ell j_{\mathrm{s},0}\vec{e_\theta}\cdot\mathrm{d}z\vec{e_\theta} = \int_0^\ell j_{\mathrm{s},0}\,\mathrm{d}z = j_{\mathrm{s},0}\ell$.

.....

4.4 a) Le courant de particules chargées est radial : le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$ est radial, c'est-à-dire porté par $\vec{e_r}$: $\vec{j} = j_r(r,\theta,\varphi)$. Aussi, l'émission est isotrope donc il y a invariance de la distribution de courant électrique par rotation autour du point O : la composante j_r n'est une fonction que de r. Il vient : $\vec{j} = j_r(r)\vec{e_r}$.

.....

4.4 b) L'intensité du courant électrique traversant une surface élémentaire de vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{e_r}$ est $\mathrm{d}I_r = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = j_r(r)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Cette grandeur est uniforme sur une sphère de rayon R (de surface $4\pi R^2$) donc $I_R = 4\pi R^2 j_r(R)$.

.....

4.5 Les plans $(x\mathrm{O}y)$ et $(x\mathrm{O}z)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution car les courants de la distribution sont répartis de manière strictement opposée de part et d'autre de chacun de ces plans. Par ailleurs, la longueur du solénoïde n'intervient pas dans l'étude des symétries d'une distribution, mais doit être considérée lors d'une étude de ses invariances.

.....

4.6 a) En tout point M du plan $(x\mathrm{O}y)$, plan d'antisymétrie pour la distribution, le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour le point O et les différents points P_i. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B_x(\mathrm{M})\vec{e_x} + B_y(\mathrm{M})\vec{e_y}$. Par ailleurs, le vecteur $\vec{e_z}$ est bien normal au plan $(x\mathrm{O}y)$.

.....

4.6 b) Le vecteur $\vec{e_x}$ est bien normal au plan $(y\mathrm{O}z)$. En tout point M du plan $(y\mathrm{O}z)$, plan de symétrie pour la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan, donc est selon $\pm\vec{e_x}$. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B_x(\mathrm{M})\vec{e_x}$. Les différents points P_i n'appartiennent pas à ce plan, donc rien ne peut en être déduit sur le champ en ces points.

.....

4.6 c) Il faut bien préciser que c'est en tout point M du plan $(x\mathrm{O}z)$, plan de symétrie pour la distribution, que le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan. C'est bien le cas pour le point O mais pas pour les différents points P_i (qui n'appartiennent pas à ce plan). Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B(\mathrm{M})\vec{e_y}$.

Le point O appartient aux plans de symétrie $(x\mathrm{O}z)$ et $(y\mathrm{O}z)$ donc le champ en ce point doit être perpendiculaire à ces deux plans : il est nécessairement nul.

Puisque le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution, en tout point de ce plan le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour les différents points P_i. Il est alors possible d'écrire :

$$\vec{B}(\mathrm{P}_i) = B_x(\mathrm{P}_i)\vec{e_x} + B_y(\mathrm{P}_i)\vec{e_y}.$$

De plus, puisque le plan $(y\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie pour la distribution, c'est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique. Tout cela permet alors d'écrire : $B_y(\mathrm{P}_2) = -B_y(\mathrm{P}_1)$ et $B_x(\mathrm{P}_2) = B_x(\mathrm{P}_1)$, mais pas $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\vec{B}(\mathrm{P}_1)$! En bref, il est aussi possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\mathrm{sym}\big(\vec{B}(\mathrm{P}_1)\big)$, où « sym » représente l'opération de symétrie par rapport au plan $(y\mathrm{O}z)$.

.....

4.7 a) On a $I = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S j_0\vec{e_x}\cdot\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x} = j_0 \times 2\ell \times 2d = 4j_0\ell d$.

.....

4.7 b) Le vecteur densité volumique de courant est $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$ et j_0 est constant donc la distribution est invariante par translation suivant $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$. La couche étant finie, elle n'est pas invariante par translation suivant $(\mathrm{O}z)$, et encore moins par rotation autour de cet axe, le vecteur $\vec{j}$ étant porté par $\vec{e_x}$.

.....

4.7 c) La distribution est invariante par translation suivant les axes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$, donc la composante B_y du champ ne dépend que de z.

.....

4.8 a) En tenant compte du sens du courant, on a $\vec{B_2}(\mathrm{O}) = -\mu_0 n_2 I_2\vec{e_y}$, où n_2 est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (2).

.....

4.8 b) D'après le théorème de superposition, on a $\vec{B}(\mathrm{O}) = \vec{B_1}(\mathrm{O}) + \vec{B_2}(\mathrm{O})$ donc $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1\vec{e_x} - n_2 I_2\vec{e_y})$.

.....

4.9 Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ alors le produit qvB est homogène à une force. Si l'égalité $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable alors $qv \times B = qv \times \dfrac{mv}{qR} = \dfrac{mv^2}{R}$ serait homogène à une force. Or, mv^2 est homogène à une énergie puisque l'énergie cinétique s'exprime comme $\dfrac{mv^2}{2}$. De plus, d'après l'expression du travail élémentaire $\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ d'une force $\vec{F}$, une énergie divisée par une longueur correspond à une force. Finalement, le rapport $\dfrac{mv^2}{R}$ est donc bien homogène à une force et la relation $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable du point de vue de l'analyse dimensionnelle. Bien sûr, d'autres raisonnements sont possibles en se basant sur d'autres relations !

.....

4.10 Le champ magnétique est linéaire pour $0 < r < a$ et hyperbolique pour $r > a$.

.....

4.11 a) Sachant que $B_y = kx \neq 0$ pour tout M(x, y, z) alors le vecteur champ magnétostatique ne peut pas être constamment parallèle à $\overrightarrow{e_x}$, ce qui élimine la carte de champ (3). En prenant les points de l'espace où $x = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\vec{B}(\mathrm{M}) = ky\overrightarrow{e_x}$: les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Parmi les cartes de champ (1), (2) et (4) restantes, seule la (2) possède cette propriété.

Autre méthode possible : En prenant les points de l'espace où $y = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\vec{B}(\mathrm{M}) = kx\overrightarrow{e_y}$: les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Seule la carte de champ (2) possède cette propriété.

.....

4.11 b) Le flux magnétostatique est conservatif donc le resserrement des lignes de champ constaté de M à N permet d'affirmer que le champ magnétostatique est plus intense au point N qu'au point M.

.....

4.12 a) Le calcul de la circulation du champ magnétostatique de A à C se décompose en deux.

- D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).
- D'autre part, sur [BC] on a
$$\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 4Bd \text{ (chemin parallèle aux lignes de champ).}$$

.....

4.12 b) D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -8Bd$. Seule la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sur la ligne de champ doit être prise en compte. Le signe moins provient du sens de $\vec{B}$ par rapport à celui de la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. D'autre part sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 6Bd$.

.....

4.12 c) D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{7\pi d}{2}B$. Le chemin [AB] est un demi-cercle de longueur $\dfrac{7\pi d}{2}$. D'autre part sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).

.....

4.13 a) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +I$.

.....

4.13 b) Le contour n'enlace pas le fil donc $I_{\mathrm{enl}} = 0$, quels que soient l'orientation du contour et le sens de I.

.....

4.13 c) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = -I$.

.....

4.13 d) Le fil est positionné de façon telle que le courant passe quatre fois « à l'intérieur » du contour. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +4I$.

.....

4.14 a) Le produit scalaire $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est positif lorsque le champ $\vec{B}$ et le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (donné par l'orientation de la surface) pointent globalement dans la même direction (ils forment ainsi un angle aigu, c'est-à-dire compris entre 0 et 90°).

Pour le cas (a), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le haut. De même, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} > 0$, soit $\phi > 0$.

Pour le cas (b), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le bas. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

Pour le cas (c), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le haut. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

Pour le cas (e), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le bas. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} > 0$, soit $\phi > 0$.

Pour le cas (f), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le haut. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

.....

4.14 b) Pour le cas (d), le champ $\vec{B}$ est horizontal. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical. Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$, soit $\phi = 0$. Aucune ligne de champ ne passe à travers la surface orientée, donc le flux est nécessairement nul.

.....

4.15 a) À ce sens de parcours de la spire est associé le vecteur normal $\vec{n}$ opposé au champ magnétostatique. D'où $\phi(\vec{B}) = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = -\iint_{\Sigma} B \, \mathrm{d}S$ en notant Σ l'intersection entre le plan de la spire et la zone de champ.

Pour $x < 0$ on a donc $\phi(\vec{B}) = 0$.

.....

4.15 b) Le champ $\vec{B}$ est uniforme donc on a $\phi(\vec{B}) = -B\Sigma = -Bax$.

.....

4.15 c) Ici, on a $\phi(\vec{B}) = -B\Sigma = -Ba^2$.

.....

4.16 a) Les N spires du tore traversent la surface délimitée par le cercle de centre O et de rayon $R - \dfrac{a}{2} < r < R + \dfrac{a}{2}$. Le courant enlacé vaut donc $I_{\text{enl}} = NI$.

.....

4.16 b) Sur le contour fermé choisi, r et $B(r)$ sont constants. Il vient :

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint B(r)\vec{e_\theta} \cdot r \, \mathrm{d}\theta \vec{e_\theta} = 2\pi r B(r).$$

D'après le théorème d'Ampère, on a $2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enl}}$ et donc $B(r) = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$.

.....

4.16 c) On a $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \displaystyle\int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \, \mathrm{d}r \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi} \ln\left(\frac{R + a/2}{R - a/2}\right)$.

.....

4.17 a) On a $B = \mu_0 \mu_\mathrm{r} \dfrac{N}{\ell} I$. Donc, $B = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}} \times 4\,000 \times \dfrac{1\,000}{10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} \times 200 \times 10^{-3}\,\mathrm{A} \approx 1 \times 10^1\,\mathrm{T}$.

.....

4.17 b) On a $\phi = NBS$. Donc, $\phi = 1000 \times 1 \times 10^1\,\mathrm{T} \times (20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 4 \times 10^2\,\mathrm{Wb}$.

.....

4.17 c) Le champ magnétostatique est un champ à flux conservatif. Or, le circuit magnétique joue le rôle d'un tube de champ, donc la « loi des nœuds magnétique » appliquée à la jonction qui surmonte (S_1) donne : $\phi = \phi_1 + \phi_2$, soit $\phi_1 = \phi - \phi_2 = \phi - \dfrac{1}{4}\phi = \dfrac{3}{4}\phi$. Donc, $\phi_1 = \dfrac{3}{4} \times 4 \times 10^2\,\mathrm{Wb} = 3 \times 10^2\,\mathrm{Wb}$.

.....

4.18 a) Pour une boucle de courant plane, de surface S et parcourue par un courant d'intensité I (ce qui permet de définir le vecteur surface $\vec{S}$), le moment magnétique est défini par la relation $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$. Pour une spire de rayon R et d'axe (Oz), le vecteur surface a alors pour expression $\vec{S} = S\vec{e_z} = \pi R^2\vec{e_z}$, donc $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I\vec{e_z}$.

.....

4.18 b) Dans le cadre de l'approximation dipolaire : $z \gg R$ donc $R^2 + z^2 = z^2$. Le champ magnétostatique s'écrit alors : $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2z^3}\vec{e_z}$ ou encore $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$.

.....

4.19 Des valeurs particulières de θ, telles $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$, et l'étude de l'orientation du champ magnétostatique pour ces angles, permettent de conclure que $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$.

.....

4.20 a) Le moment du couple magnétique s'exprime comme $\Gamma_z = +mB_{\text{ext}}$ à l'équilibre, car $\vec{m}$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ sont orthogonaux.

.....

4.20 b) À l'équilibre, le théorème du moment cinétique donne : $0 = mB_{\text{ext}} - dMg$, soit $d = \dfrac{mB_{\text{ext}}}{Mg}$.

.....

4.21 a) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $-\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.21 b) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.21 c) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.21 d) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.22 a) Lorsque le dipôle est aligné sur le champ (même direction et même sens) : $\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}} = m\left\|\overrightarrow{B_{\text{ext}}}\right\|$, soit $\vec{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r}\right) = -\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}$.

.....

4.22 b) La force $\vec{F}$ est dirigée dans la direction et le sens du gradient de la norme du champ magnétostatique. Le dipôle est donc attiré vers les régions de champ plus intense. On peut aussi remarquer que le dipôle a tendance à se déplacer de manière à minimiser son énergie potentielle.

.....

4.23 La circulation du champ magnétostatique le long d'un cercle de rayon R au sein duquel passe par son centre une ligne infinie parcourue par un courant électrique stationnaire est $2\pi RB$. Le théorème d'Ampère appliqué au cercle permet d'écrire $2\pi RB = \mu_0 I$: la circulation du champ magnétostatique est homogène au produit d'une intensité électrique par une perméabilité magnétique (du vide). Ainsi, seule l'expression $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ est valide.

.....

4.24 Le flux magnétique traversant un solénoïde comportant N spires de section S est $\phi = NBS$. Or, l'inductance propre L permet d'exprimer le flux en fonction de l'intensité : $\phi = LI$. Il vient : $B = \dfrac{LI}{NS}$.

.....

4.25 a) En un point de l'orbite circulaire, la charge $-e$ de l'électron passe à chaque période de révolution T, d'où le débit de charge $I = -e/T$.

.....

4.25 b) La norme du vecteur surface $\vec{S}$ est l'aire du disque de rayon r et de centre O : $\left\|\vec{S}\right\| = \pi r^2$. De plus, le vecteur surface $\vec{S}$ est orienté par la règle de la main droite, selon le sens du vecteur vitesse de l'électron (c'est aussi le sens choisi algébriquement pour l'intensité I). Il vient : $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \vec{e_z}}_{\vec{S}}$.

.....

4.25 c) Par comparaison des expressions $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\vec{S}$ et $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_\mathrm{e}}{T}\vec{S}$, il vient : $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$.

.....

4.25 d) On a $\|\vec{m}\| = \underbrace{|\gamma|}_{+\frac{e}{2m_\mathrm{e}}}\underbrace{\|\vec{\sigma}\|}_{n\hbar}$, soit $\|\vec{m}\| = n\underbrace{\dfrac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}}}_{\mu_\mathrm{B}}$. Donc,

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times\frac{6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2\pi}}{2\times9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 9{,}28\times10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}.$$

Attention : la réponse (a) n'est pas correcte car $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$, donc $\mu_\mathrm{B} = -\hbar\gamma$, et non pas $\mu_\mathrm{B} = +\hbar\gamma$. Par ailleurs, la réponse (c) n'est pas correcte car l'unité indiquée correspond à une énergie, et non pas à un moment magnétique !

.....

4.26 a) Le flux propre est $\Phi_\mathrm{p} = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} B\vec{e_\theta}\cdot\ell\,\mathrm{d}r\vec{e_\theta} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ell\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

.....

4.26 b) L'inductance propre par unité de longueur : $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\mathrm{p}}{\ell I} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

4.26 c) La composante du champ ne dépendant que de r, on peut découper le volume en portions d'espace comprises entre 2 cylindres, le premier de rayon r, le deuxième de rayon $r+\mathrm{d}r$, tous les deux de hauteur ℓ. Le volume élémentaire vaut alors : $\mathrm{d}\tau = 2\pi\ell r\,\mathrm{d}r$. L'énergie magnétique correspondant à une portion de longueur ℓ du câble est alors :

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{\ell}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

.....

4.26 d) L'inductance propre par unité de longueur est $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\mathrm{m}}{\ell I^2} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

Fiche n° 5. Équations de Maxwell

Réponses

5.1 a) ..... ⓓ

5.1 b) ..... $I \cdot T$

5.1 c) ..... $\dfrac{M}{I \cdot T^2}$

5.1 d) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

5.1 e) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

5.2 a) ..... ⓑ

5.2 b) ..... ⓒ

5.2 c) ..... $1{,}1 \times 10^{12}$

5.2 d) ..... $1{,}1 \times 10^{1}$

5.2 e) ..... $1{,}1 \times 10^{-8}$

5.3 a) .... $E_0 \cos[\omega t - kx]\vec{e_y} + E_0 \sin[\omega t - kx]\vec{e_z}$

5.3 b) ..... $-E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_x}$ $+\mathrm{i}E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_y}$

5.4 a) ..... Nulle

5.4 b) ..... Positive

5.4 c) ..... Négative

5.4 d) ..... Negative

5.4 e) ..... Nulle

5.4 f) ..... Positive

5.5 a) ..... Nulle

5.5 b) ..... Positive

5.5 c) ..... Négative

5.5 d) ..... Nulle

5.5 e) ..... Positive

5.5 f) ..... Négative

5.6 a) ..... $\mu_0 \ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \, \mathrm{div}\, \vec{E}}{\partial t}$

5.6 b) ..... $\mu_0 \ \mathrm{div}\ \vec{j} + \mu_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

5.6 c) ..... ⓑ

5.7 a) ..... m

5.7 b) 0

5.7 c) ..... Oui

5.7 d) ..... ⓓ

5.7 e) ..... $\vec{0}$

5.8 a) ..... $r\omega\vec{e_\theta}$

5.8 b) ..... $-\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$

5.8 c) ..... $2\omega\vec{e_z}$

5.8 d) ..... $r\omega$

5.8 e) ..... $\dfrac{a^2}{r}\omega$

5.9 a) ..... $3a - 5br^2$

5.9 b) ..... ⓑ

5.9 c) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

5.9 d) ..... ⓒ

5.9 e) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

5.10 a) ..... oui

5.10 b) ..... non

5.10 c) ..... oui

5.11 a) ..... $E_0 \dfrac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

5.11 b) .... $E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

5.11 c) ..... $-\dfrac{2E_0}{k^2r^3} \displaystyle\int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}t$

5.12 a) ..... $\boxed{B_0 \dfrac{k}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e_x}}$

5.12 b) ..... $\boxed{\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cosh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t) \vec{e_x}}$

5.12 c) ..... $\boxed{\dfrac{c^3 B_0}{k^2 \omega r^3} \cos(\omega t) \vec{e_z}}$

5.13 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

5.13 b) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2} \vec{e_\theta}}$

5.13 c) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r} \vec{e_\theta}}$

5.13 d) ..... $\boxed{\text{d}}$

5.13 e) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2} \vec{e_\theta}}$

5.13 f) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r} \vec{e_\theta}}$

5.14 a) .... $\boxed{\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e_z}}$

5.14 b) .... $\boxed{-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cosh(\beta z) \sinh(\beta z) \exp(-2\alpha t) \vec{e_x}}$

5.15 a) ..... $\boxed{\begin{array}{r} -\dfrac{E_{0y}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\, \vec{e_x} \\ +\dfrac{E_{0x}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\, \vec{e_y} \end{array}}$

5.15 b) ..... $\boxed{\dfrac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\, c} \vec{e_z}}$

5.15 c) ..... $\boxed{\begin{array}{r} E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\, \vec{e_x} \\ +E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\, \vec{e_y} \end{array}}$

5.15 d) ..... $\boxed{\begin{array}{r} \dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\, \vec{e_y} \\ -E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\Big) \end{array}}$

5.15 e) ..... $\boxed{\begin{array}{r} \dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\, \vec{e_y} \\ -E_{0y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\Big) \end{array}}$

5.15 f) ..... $\boxed{\dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c} \vec{e_z}}$

5.15 g) ..... $\boxed{\text{a}}$

5.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}}$

5.16 b) ..... $\boxed{-\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \vec{e_r}}$

5.16 c) ..... $\boxed{-\dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}$

5.16 d) ..... $\boxed{\text{c}}$

5.16 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

Corrigés

5.1 a) Les trois premières équations correspondent aux équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. La dernière est une formulation de l'équation de conservation de la charge, qui n'est pas une des équations de Maxwell mais une conséquence de deux d'entre elles.

.....

5.1 b) La définition de l'intensité du courant électrique est : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc $\dim(q) = I \cdot T$.

.....

5.1 c) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a

$$\dim(\vec{B}) = \frac{\dim(\vec{F})}{\dim(q)\dim(\vec{v})} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T \cdot L \cdot T^{-1}} = \frac{M}{I \cdot T^2}.$$

.....

5.1 d) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a $\dim(\vec{E}) = \dfrac{\dim(\vec{F})}{\dim(q)} = \dfrac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = \dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$.

.....

5.1 e) Par analyse dimensionnelle de l'équation de Maxwell-Faraday, on a

$$\dim(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \frac{\dim(\vec{E})}{L} = \frac{\dim(\vec{B})}{T} \qquad \text{donc} \qquad \dim(\vec{E}) = \frac{\dim(\vec{B})\cdot L}{T} = \frac{M\cdot I^{-1}\cdot T^{-2}\cdot L}{T} = \frac{M\cdot L}{I\cdot T^3}.$$

.....

5.2 a) On a $\left\|\vec{j}_{\text{cond}}\right\| = \|\sigma E_0\cos(\omega t+\varphi)\| < \|\sigma E_0\|$ et $\left\|\vec{j}_{\text{dépl}}\right\| = \|-\varepsilon_0\omega E_0\sin(\omega t+\varphi)\| < \|\varepsilon_0\omega E_0\|$. Donc,

$$\alpha \text{ a pour ordre de grandeur } \frac{\sigma E_0}{\varepsilon_0\omega E_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}.$$

.....

5.2 b) On a $\alpha \gg 1 \iff f \ll \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} = \dfrac{1\times10^{7}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{2\pi\times 8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}} = 1{,}8\times10^{17}\,\mathrm{Hz}.$

.....

5.2 c) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times10^{7}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times10^{6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times10^{12} \gg 1.$

.....

5.2 d) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times10^{-4}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times10^{6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times10^{1}$, dont l'ordre de grandeur est 1.

.....

5.2 e) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times10^{-13}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times10^{6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times10^{-8} \ll 1.$

.....

5.3 a) On a

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_1 &= E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_z}\\ &= E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_z}.\end{aligned}$$

Donc, $\vec{E}_1 = \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}_1) = E_0\cos[\omega t-kx]\vec{e_y} + E_0\sin[\omega t-kx]\vec{e_z}$.

.....

5.5 a) On peut estimer le rotationnel selon un axe en observant si le champ de vecteurs « tourne » dans le sens direct ou indirect. Si le champ de vecteurs ne « tourne » pas autour d'un axe alors le rotationnel est nul. Si le champ de vecteurs semble « tourner » dans le sens direct alors le rotationnel est positif, dans le cas contraire, il est négatif.

.....

5.6 a) Avec la relation de Maxwell-Ampère et le théorème de Schwarz, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mathrm{div}\left(\mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}.$$

.....

5.6 b) Avec la relation de Maxwell-Gauss, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial(\frac{\rho}{\varepsilon_0})}{\partial t} = \mu_0\left(\mathrm{div}\ \vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right).$$

.....

5.6 c) Comme $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = 0$, on obtient : $\mathrm{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

.....

5.7 a) En utilisant l'homogénéité, on voit que a est une longueur, en mètres (m).

.....

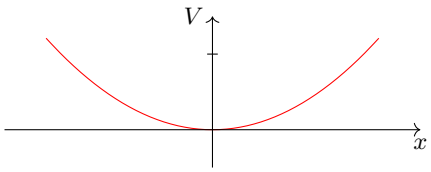
5.7 b) On a $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \dfrac{V_0}{a^2}(2+4-6) = 0.$

.....

5.7 c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est vérifiée en prenant $\rho = 0$ car l'énoncé impose un espace vide de charges.

.....

5.7 d) On a $V(x,0,0) = \dfrac{V_0}{a^2}x^2$: c'est une parabole.
En voici l'allure :



.....

5.7 e) Le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z} = 2\frac{V_0}{a^2}(-x\vec{e_x} - 2y\vec{e_y} + 3z\vec{e_z}).$$

En O, origine du repère, ce champ est nul.

.....

5.8 a) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) = r\omega\vec{e_\theta}$.

.....

5.8 b) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) = -\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$.

.....

5.8 c) En coordonnées cartésiennes, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\omega\vec{e_z}$.

.....

5.8 d) L'expression $\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\text{d}l}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})}$ s'écrit, avec $\vec{\text{d}\ell} = r\,\text{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})} = r\,\text{d}r\,\text{d}\theta\vec{e_z}$, d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^r 4\omega\pi r\,\text{d}r$, soit $v = r\omega$.

.....

5.8 e) L'expression $\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\text{d}l}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})}$ s'écrit, avec $\vec{\text{d}\ell} = r\,\text{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})} = r\,\text{d}r\,\text{d}\theta\vec{e_z}$, d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^a 4\omega\pi r\,\text{d}r + \int_a^r 0 \times \pi r\,\text{d}r$, soit $v = \dfrac{a^2}{r}\omega$.

.....

5.9 a) On a $\text{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} = \dfrac{1}{r^2}(3ar^2 - 5br^4) = 3a - 5br^2$.

.....

5.9 c) On a

$$\begin{aligned}\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\text{d}S} &= \iiint_{\text{boule}} \text{div}\,\vec{A}\,\text{d}\tau \\ &= \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}(3a - 5br^2)r^2\sin(\varphi)\,\text{d}r\,\text{d}\theta\,\text{d}\varphi \\ &= \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi} \times \left[ar^3 - br^5\right]_0^R \\ &= 4\pi R^3(a - bR^2).\end{aligned}$$

.....

5.9 e) On a

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\text{d}S} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}(aR - bR^3)R^2 sin(\varphi)\,\text{d}\theta\,\text{d}\varphi = 4\pi R^3(a - bR^2).$$

On retrouve bien le résultat de la question c).

.....

5.10 a) Il faut vérifier que les équations de Maxwell sont respectées les unes après les autres. On a :

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = E_0 k\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$

  $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 k\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$
- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\ &= -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e_y} = -\frac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_0\omega\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ donc $\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\dfrac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

5.10 b) On a

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = -E_0 k\sin(\omega t + ky).$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide n'est pas respectée donc ce champ électromagnétique ne peut pas exister.

.....

5.10 c) On a

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
-

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y}\\ &= E_2 k\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - E_1 k\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_2 k\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} + E_1 k\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}$

- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e_y}\\ &= -\frac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + \frac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_1\omega\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \omega E_2\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$ donc

$\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\dfrac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \dfrac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

5.11 a) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0 k\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})\,\text{d}t = -E_0 k\vec{e_y}\int \sin(\omega t - kx + \varphi)\,\text{d}t = E_0\frac{k}{\omega}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y} + \overrightarrow{\text{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{Cste}} = \vec{0}$.

.....

5.11 b) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})\,\text{d}t = -E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_y}\int \exp(-\alpha t)\,\text{d}t = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y} + \overrightarrow{\text{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{Cste}} = \vec{0}$.

.....

5.11 c) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_z(r,t)\vec{e_z}$ avec

$$E_x(z,t) = \frac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t).$$

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial E_z}{\partial r}\vec{e_\theta} = \frac{2E_0}{k^2r^3}\cos(\omega t)\vec{e_\theta}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})\,\text{d}t = -\frac{2E_0}{k^2r^3}\int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\text{d}t.$$

Comme $\vec{e_\theta}$ est un vecteur dont l'orientation dépend du temps (base cylindrique), on ne peut développer plus le calcul car on ne connaît pas l'évolution temporelle de l'angle θ.

.....

5.12 a) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0\sin(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = B_0 k\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère vide de courant ($\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})\,\text{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{e_x}\int \cos(\omega t - kz + \varphi)\,\text{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x} + \overrightarrow{\text{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{Cste}} = \vec{0}$.

.....

5.12 b) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = -B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_x}\int \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x} + \overrightarrow{\mathrm{Cste}}.\end{aligned}$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{Cste}} = \vec{0}$.

Ce champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ est le même que celui de la question b) de l'entraînement précédent, en posant $E_0 = \dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

.....

5.12 c) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_\theta(r,t)\vec{e_\theta}$ avec $B_\theta(r,t) = \dfrac{cB_0}{(kr)^2}\sin(\omega t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \frac{1}{r}\frac{\partial r B_\theta}{\partial r}\vec{e_z} = -\frac{cB_0}{k^2r^3}\sin(\omega t)\vec{e_z}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{cB_0}{\varepsilon_0\mu_0k^2r^3}\vec{e_z}\int \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{c^3B_0}{k^2\omega r^3}\cos(\omega t)\vec{e_z} + \overrightarrow{\mathrm{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{Cste}} = \vec{0}$. Contrairement aux cas précédents, on ne retrouve pas le champ de la question c) de l'entraînement précédent : ces champs électromagnétiques $(\vec{E},\vec{B})$ ne sont pas solutions d'une seule équation de Maxwell et pas de l'ensemble (équation de propagation !) donc il ne s'agit pas de champs électromagnétiques qui se propagent.

.....

5.13 a) Le solénoïde étant invariant par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation le long du même axe, la norme du champ électrique ne dépend que de r.

.....

5.13 b) L'équation de Maxwell-Faraday est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. On calcule d'abord le rotationnel de $\vec{E}$. Le champ magnétique étant porté par (Oz), il reste : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r E_\theta}{\partial r}\vec{e_z}$.

On calcule la dérivée du champ magnétique par rapport au temps pour $r < R$: $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}$.

Enfin, on a $rE_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r^2}{2}$ donc $E_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}$.

.....

5.13 c) Le champ magnétique étant nul à l'extérieur du solénoïde, on a :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_\theta = \frac{C}{r}$$

avec C une constante. Il reste à déterminer cette constante. Par continuité du champ électrique en $r = R$, on a

$$\frac{C}{R} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R}{2} \qquad \text{donc} \qquad C = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{2}.$$

Ainsi, on a $\vec{E} = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$.

.....

5.13 d) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

Nous sommes donc amenés à calculer la circulation de $\vec{E}$ sur le contour délimitant la surface Σ que l'on va choisir et à calculer le flux de $\vec{B}$ à travers cette même surface.

Pour que le calcul de la circulation soit simple, il faut trouver une surface dont le contour ne dépend pas de r, ainsi le champ électrique sera constant sur ce contour.

Pour que le calcul du flux soit simple, il faut dans un premier temps trouver une surface dont la surface élémentaire ne s'exprime pas en fonction des variables de B : B étant constant ici, la question ne se pose pas. Dans un deuxième temps, on choisit une surface telle que $\vec{B}$ et le vecteur normal à la surface soient colinéaires afin que le produit scalaire se calcule facilement : on choisit une surface perpendiculaire à $\vec{e_z}$.

On souhaite donc une surface de rayon constant r, perpendiculaire à $\vec{e_z}$, il s'agit donc d'un disque de rayon r et d'axe (Oz).

.....

5.13 e) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

On choisit comme surface Σ, le disque de rayon r et donc comme contour Γ le cercle de rayon r. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \pi r^2\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2}\vec{e_\theta}$.

.....

5.13 f) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\,\mathrm{d}\ell = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

On choisit comme surface Σ, le disque de rayon r et donc comme contour Γ le cercle de rayon r. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\,\mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \pi R^2\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$.

.....

5.14 a) On a

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}\wedge B_0\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y} = \frac{E_0B_0}{\mu_0}\cos(\omega t - kz + \varphi)\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

5.14 b) On a

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}E_0\cosh(\beta z)\exp(-\alpha t)\vec{e_z}\wedge B_0\sinh(\beta z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y} = -\frac{E_0B_0}{\mu_0}\cosh(\beta z)\sinh(\beta z)\exp(-2\alpha t)\vec{e_x}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

5.15 a) Pour une onde plane progressive, on a la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e_z}\wedge\vec{E}}{c} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix}-E_y\\E_x\\0\end{vmatrix}.$$

On en déduit : $\vec{B} = -\frac{E_{0y}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} + \frac{E_{0x}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}$.

.....

5.15 b) Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0\,c}\left|\begin{matrix}E_x\\E_y\\0\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}-E_y\\E_x\\0\end{matrix}\right. = \frac{1}{\mu_0\,c}\left|\begin{matrix}0\\0\\E_x^2+E_y^2\end{matrix}\right. = \frac{E_x^2+E_y^2}{\mu_0\,c}\,\vec{e_z}.$$

.....

5.15 c) En notation complexe, avec $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{k}$ le vecteur d'onde, le champ électrique peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0\,\exp\bigl[\mathrm{i}\bigl(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\bigr)\bigr] = \underline{\vec{E}}_0\,\exp[\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t)]$$

avec $\underline{\vec{E}_0} = E_{0x}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi_1}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi_2}\,\vec{e_y}$; $\underline{\vec{E}_0}$ est l'amplitude complexe du champ électrique.

.....

5.15 d) L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}$ donne : $\mathrm{i}\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = +\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\vec{B}}$. Donc,

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}} = \frac{\vec{e_z}}{c}\wedge\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}\bigr) = \frac{1}{c}\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\bigr).$$

.....

5.15 e) On en déduit le conjugué : $\underline{\vec{B}}^* = \dfrac{1}{c}\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\bigr)$.

.....

5.15 f) Le produit vectoriel $\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*$ vaut :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^* &= \bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}\bigr)\wedge\left(\frac{1}{c}\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\bigr)\right)\\ &= \frac{E_{0x}^2}{c}\vec{e_z} + \frac{E_{0y}^2}{c}\vec{e_z} = \frac{\bigl(E_{0x}^2+E_{0y}^2\bigr)\vec{e_z}}{c}.\end{aligned}$$

On en déduit le vecteur complexe $\dfrac{1}{2\,\mu_0}\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^* = \dfrac{E_{0x}^2+E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\,\vec{e_z}$.

.....

5.15 g) Avec $\langle\cos^2\rangle = \dfrac{1}{2}$, la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ vaut :

$$\bigl\langle\vec{\Pi}\bigr\rangle = \left\langle\frac{\bigl(E_{0x}\,\cos(k\,z-\omega\,t+\psi_1)\bigr)^2 + \bigl(E_{0y}\,\cos(k\,z-\omega\,t+\psi_2)\bigr)^2}{\mu_0\,c}\,\vec{e_z}\right\rangle = \frac{E_{0x}^2+E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\,\vec{e_z}.$$

La valeur moyenne du vecteur $\left\langle\dfrac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0}\right\rangle$ est identique : on peut donc choisir l'une ou l'autre des deux méthodes.

.....

5.16 a) On intègre la densité volumique d'énergie électromagnétique dans tout le volume $\mathcal{V}$ séparant les deux armatures :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}}\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\mathcal{V}}\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}LS = \frac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

.....

5.16 b) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z}\cdot\frac{\mu_0}{2S}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}R\vec{e_\theta}}{\mu_0} = -\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2}Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}$.

.....

5.16 c) On cherche le flux sortant du vecteur de Poynting à travers la surface Σ du cylindre de rayon R et de hauteur L formé par les deux armatures du condensateur soit

$$\oiint_{\Sigma}\vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{R}{2\varepsilon_0 S^2}Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\times 2\pi RL = -\frac{L\pi R^2}{\varepsilon_0 S^2}Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{\varepsilon_0 S}Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

.....

5.16 d) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{LQ(t)^2}{2\varepsilon_0 S}\right)}{\partial t} = \dfrac{L}{2\varepsilon_0 S} 2Q(t)\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\phi.$

.....

5.16 e) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0.$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, qui dit $\oiint_\Sigma \vec{\Pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_\mathcal{V} \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau$ et en utilisant que $\mathcal{E} = \iiint_\mathcal{V} e\,\mathrm{d}\tau$, on obtient :

$$\iiint_\mathcal{V} \frac{\partial e}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau + \iiint_\mathcal{V} \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = 0,$$

ce qui correspond au théorème de Poynting en l'absence de courant de conduction.

.....

Fiche n° 6. Induction

Réponses

6.1 a) $\boxed{\vec{e_z}}$

6.1 b) $\boxed{-\vec{e_z}}$

6.1 c) $\boxed{\vec{e_y}}$

6.1 d) $\boxed{\vec{e_y}}$

6.1 e) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

6.1 f) $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

6.2 a) $\boxed{\text{d}}$

6.2 b) $\boxed{\text{aucune}}$

6.2 c) $\boxed{\text{b}}$

6.2 d) $\boxed{\text{a}}$

6.3 a) $\boxed{\text{oui}}$

6.3 b) $\boxed{\text{oui}}$

6.3 c) $\boxed{\text{non}}$

6.3 d) $\boxed{\text{non}}$

6.3 e) $\boxed{\text{oui}}$

6.3 f) $\boxed{\text{non}}$

6.4 a) $\boxed{0}$

6.4 b) $\boxed{-Bx_\text{c}\ell}$

6.4 c) $\boxed{-B\ell^2}$

6.4 d) $\boxed{-B(a-(x_\text{c}-\ell))\ell}$

6.4 e) $\boxed{0}$

6.4 f) $\boxed{-Bv\ell}$

6.4 g) $\boxed{0}$

6.4 h) $\boxed{Bv\ell}$

6.5 a) $\boxed{\pi R^2 B_\text{m}\cos(\omega t)}$

6.5 b) $\boxed{\pi a^2 B_\text{m}\cos(\omega t)}$

6.5 c) $\boxed{\text{d}S = r\,\text{d}\theta\,\text{d}r}$

6.5 d) $\boxed{2\pi B_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right)}$

6.5 e) $\boxed{2\pi B_0\frac{a^2}{6}}$

6.6 a) $\boxed{B\pi R^2\cos(\omega t)}$

6.6 b) $\boxed{0}$

6.6 c) $\boxed{-\frac{B\pi R^2}{2}}$

6.6 d) $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2}$

6.6 e) $\boxed{B\pi R^2}$

6.7 a) $\boxed{\text{a}}$

6.7 b) $\boxed{\text{a}}$

6.7 c) $\boxed{\frac{\mu_0 N I a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

6.7 d) $\boxed{\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

6.8 a) $\boxed{\text{c}}$

6.8 b) $\boxed{B_0\omega\sin(\omega t)\frac{r}{2}}$

6.9 a) $\boxed{\text{c}}$

6.9 b) $\boxed{\text{a}}$

6.10 a) $\boxed{\text{c}}$

6.10 b) $\boxed{\frac{-\alpha B\underline{I}}{h+\text{j}(m\omega-\frac{k}{\omega})}}$

6.10 c) $\boxed{\text{c}}$

6.11 a) $\boxed{-Ri^2}$

6.11 b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv}$

6.11 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

6.12 a) ..... $\boxed{-iaB\vec{e_y}}$

6.12 b) ..... $\boxed{ibB\vec{e_x}}$

6.12 c) ..... $\boxed{iaB\vec{e_y}}$

6.12 d) ..... $\boxed{-ibB\vec{e_x}}$

6.12 e) ..... $\boxed{\vec{0}}$

6.13 a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

6.13 b) ..... $\boxed{-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}}$

6.13 c) ..... $\boxed{i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}}$

6.14 a) ..... $\boxed{S\vec{e_y}}$

6.14 b) ..... $\boxed{-IBS\vec{e_z}}$

6.14 c) ..... $\boxed{\vec{0}}$

6.14 d) ..... $\boxed{IBS\vec{e_x}}$

6.14 e) ..... $\boxed{\text{c}}$

6.14 f) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.14 g) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.15 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mR}v = 0}$

6.15 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

6.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\dfrac{B\ell E}{mr}}$

6.16 b) ..... $\boxed{-\dfrac{E}{B\ell}}$

6.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i(t) = 0}$

6.17 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

6.17 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

6.17 d) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.18 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.18 b) ..... $\boxed{E - Ba\dot{x} - Ri}$

6.18 c) ..... $\boxed{-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

6.18 d) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0}$

6.18 e) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

6.18 f) ..... $\boxed{L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

6.19 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.19 b) ..... $\boxed{x_0 + \dfrac{e}{Ba}\left(t + \tau\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} - \tau\right)}$

6.20 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.20 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.21 a) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.21 b) ..... $\boxed{-iB2\pi RN\vec{e_z}}$

6.22 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

6.22 b) ..... $\boxed{-S\vec{e_z}}$

6.22 c) ..... $\boxed{-B\dfrac{t}{\tau}S}$

6.22 d) ..... $\boxed{\dfrac{BS}{\tau}}$

6.22 e) ..... $\boxed{300\,\mathrm{mV}}$

6.22 f) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.22 g) ..... $\boxed{S\vec{e_z}}$

6.22 h) ..... $\boxed{\dfrac{BSt}{\tau}}$

6.22 i) ..... $\boxed{-\dfrac{BS}{\tau}}$

6.22 j) ..... $\boxed{300\,\text{mV}}$

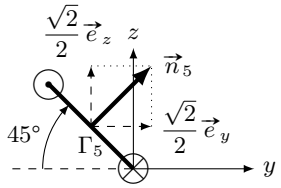
6.23 a) ..... $\boxed{Ei - Ri^2}$

6.23 b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2}$

6.23 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

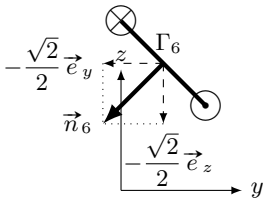
Corrigés

6.1 e)



.....

6.1 f)



.....

6.3 a) Il y a trois façons de modifier un flux : modifier la surface, modifier le champ, changer l'angle entre le vecteur normal à la surface et le champ. Ici, comme $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$ à $t = 0$, les deux vecteurs sont colinéaires. Comme le cadre tourne autour d'un de ses côtés , l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$ va varier au cours du temps.

.....

6.3 b) La surface où le champ est non nul augmente au cours du temps tant que le cadre n'est pas entièrement dans la zone où règne le champ.

.....

6.3 c) Le produit scalaire entre $\vec{B}(t)$ et $\vec{n}$ est nul.

.....

6.3 d) Ni la surface, ni l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ ne varie.

.....

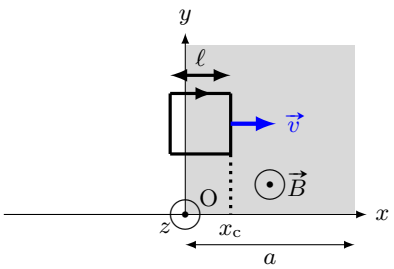
6.3 e) La surface varie.

.....

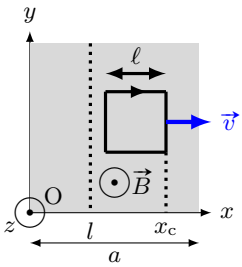
6.3 f) Il ne faut pas confondre les termes « uniforme » (ne varie pas dans l'espace) et « constant » (ne varie pas dans le temps).

.....

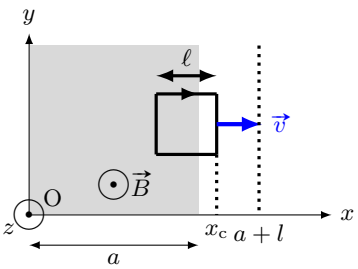
6.4 b)



6.4 c)



6.4 d)



6.5 a) On a $\Phi = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

6.5 b) On a $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

6.5 d) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(r-\frac{r^2}{a}\right)\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right].$

6.5 e) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(r-\frac{r^2}{a}\right)\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \frac{a^2}{6}.$

6.6 a) L'angle entre la normale à la spire et le champ magnétique $\vec{B}$ étant ωt, le calcul du flux s'écrit

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}S = \iint_S B\cos(\omega t)\,\mathrm{d}S = B\cos(\omega t)\iint_S \mathrm{d}S = B\pi R^2\cos(\omega t).$$

6.7 d) Le flux propre à travers les N spires sera $\dfrac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right) = LI$.

.....

6.8 b) On a $\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0 r\omega\sin(\omega t)$. Donc, $E = \displaystyle\int_{r'=0}^{r} B_0 r'\omega\sin(\omega t)\,\mathrm{d}r' = B_0\omega\sin(\omega t)\int_{r'=0}^{r} r'\,\mathrm{d}r'$.

.....

6.9 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension. Or $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a pour dimension $\dfrac{\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}}$, donc $\dfrac{a^2B^2v}{Rm}$ a pour dimension $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. On déduit la dimension de $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ en divisant $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$ par la dimension de la vitesse $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$. Donc $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ a pour dimension T^{-1}.

.....

6.11 a) On a $e\times i = Ri\times i$ donc $-Bav\times i = Ri^2$ donc $Bavi = -Ri^2$.

.....

6.11 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times v = f\times v + f_\mathrm{L}\times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f\times v + Bai\times v$ donc $Bavi = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv$.

.....

6.11 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$; on a donc

$$-Ri^2 = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv \qquad \text{donc} \qquad fv = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}.$$

.....

6.12 e) Dans le cas d'un champ uniforme (égal à la même valeur en tout point de l'espace), la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé est nulle.

.....

6.13 a) Le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ sont tous deux portés par $\vec{e_x}$. Le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\wedge\vec{B}$ étant nul, on a $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = \vec{0}$.

.....

6.13 b) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{RS}}\wedge\vec{B}$. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge(B\vec{e_y}) = -i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}.$$

.....

6.13 c) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\wedge\vec{B}$. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} - \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge(B\vec{e_y}) = i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}.$$

.....

6.14 a) D'après la règle de la main droite, le sens circulation du courant d'intensité I impose que $\vec{S} = S\vec{e_y}$.

.....

6.14 b) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_x} = -IBS\vec{e_z}$.

.....

6.14 c) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_y} = \vec{0}$.

.....

6.14 d) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_z} = IBS\vec{e_x}$.

.....

6.14 e) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_3}$ est orienté selon les $x > 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

.....

6.14 f) Aucun couple calculé plus tôt n'est orienté selon $\overrightarrow{e_y}$, il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oy).

.....

6.14 g) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_1}$ est orienté selon les $z < 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Oz) dans le sens indirect. Il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct.

.....

6.15 a) L'équation électrique permet d'établir que $i(t) = \dfrac{B\ell v}{R}$. En injectant cette relation dans l'équation mécanique, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = 0.$$

.....

6.15 b) La résolution de l'équation différentielle sur v donne $v(t) = A\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$. À l'instant $t = 0$, on a$v(t = 0) = v_0$, donc $A\exp(0) = v_0$ et donc $A = v_0$. Ainsi, on a $v(t) = v_0\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$.

.....

6.16 a) On isole $i(t)$ dans l'équation électrique pour obtenir $i = \dfrac{B\ell v(t)}{r} + \dfrac{E}{r}$. En injectant ce résultat dans l'équation mécanique, on obtient

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2\ell^2}{r}v(t) - \frac{B\ell E}{r} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\frac{B\ell E}{mr}.$$

.....

6.16 b) La vitesse limite v_{lim} correspond à la vitesse atteinte en régime permanent soit quand $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc $\dfrac{B^2\ell^2}{r}v_{\text{lim}} = -\dfrac{B\ell E}{r}$. On en déduit $v_{\text{lim}} = -\dfrac{E}{B\ell}$.

.....

6.17 a) À partir de l'équation électrique, on a $v = \dfrac{1}{B\ell}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t)\right)$, qu'on injecte dans l'équation mécanique.

On obtient $\dfrac{m}{B\ell}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri\right) = -B\ell i$, et ainsi $\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i = 0$.

.....

6.17 c) On calcule son discriminant $\Delta = \dfrac{r^2}{L^2} - 4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} = \dfrac{1}{0,25} - 4\times\dfrac{1\times10^{-2}}{0,01\times0,5} = 4 - 4\times2 = -4$.

.....

6.17 d) Le discriminant étant négatif, les racines complexes sont

$$\rho_{1/2} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{B^2\ell^2}{mL} - \frac{r^2}{L^2}} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\omega$$

avec $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} - \dfrac{r^2}{L^2}}$. On obtient $i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))$.

.....

6.18 a) Avec la règle de main droite, en utilisant l'orientation du contour, on oriente la surface pour le calcul du flux (suivant $-\overrightarrow{e_z}$). La source de tension induite de fém e a une polarité (sa flèche tension) dans le même sens que l'orientation du contour.

.....

6.18 b) D'après la loi des mailles, on a $E + e = u + Ri$, donc $E - Ba\dot{x} = u + Ri$, et donc $u = E - Ba\dot{x} - Ri$.

.....

6.18 c) D'après la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - Ba\dot{x} - Ri) = -Ba\ddot{x} - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Comme $\ddot{x} = \dfrac{Ba}{m}i$, on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

.....

6.18 d) Le dipôle 1 est un fil, sa tension u est donc nulle, ainsi $-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, ou $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0$.

.....

6.18 e) Le dipôle 2 est un condensateur traversé par un courant d'intensité $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C}$. D'où

$$\frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

.....

6.18 f) Le dipôle 4 est une association série d'une bobine et d'un condensateur. La tension à ses bornes est donc $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$ avec u_C la tension aux bornes du condensateur. Donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i}{C}$. D'où

$$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

.....

6.19 a) L'argument $-\dfrac{t}{\tau}$ de l'exponentielle doit être sans dimension. Donc τ a la même dimension que t, soit T.

.....

6.20 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension.

On pouvait aussi exploiter le fait que $\left[\dfrac{R}{L}\right] = \mathrm{T}^{-1}$ *et* $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

.....

6.21 b) On a $\vec{F_\mathrm{L}} = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi N} iR\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} \wedge (B\vec{e_r}) = -iRB\int_{\theta=0}^{2\pi N} d\theta\vec{e_z} = -iB2\pi RN\vec{e_z}$.

.....

6.22 a) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_ind, soit horaire, donc elle est orientée dans le même sens que E.

.....

6.22 b) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $-\vec{e_z}$, S étant positif, il vient que $\vec{S} = -S\vec{e_z}$.

.....

6.22 c) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\vec{e_z}\cdot(-S\vec{e_z}) = -B\dfrac{t}{\tau}S$.

.....

6.22 d) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(-BtS)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{BS}{\tau}$.

.....

6.22 e) D'après la loi des mailles $u = E + e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où

$$u = 2{,}00\times10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}}\times500\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

6.22 f) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_{ind}, soit anti-horaire, donc elle est orientée dans le sens opposé à E.

.....

6.22 g) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $\vec{e_z}$, S étant positif, il vient que $\vec{S} = S\vec{e_z}$.

.....

6.22 h) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\vec{e_z} \cdot S\vec{e_z} = \dfrac{BSt}{\tau}$.

.....

6.22 i) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(BtS)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{BS}{\tau}$.

.....

6.22 j) D'après la loi des mailles $u = E - e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où

$$u = 2{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}} \times 500 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

6.23 a) On a $E \times i + e \times i = Ri \times i$ donc $Ei - Bav \times i = Ri^2$ et donc $Bavi = Ei - Ri^2$.

.....

6.23 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \times v = f_{\mathrm{L}} \times v - kx \times v - \alpha v \times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Bai \times v - kxv - \alpha v^2$. Finalement, on a

$$Bavi = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2.$$

.....

6.23 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$.

On a donc $Ei - Ri^2 = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2$ et donc

$$Ei = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2 + Ri^2 = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}}.$$

.....

Fiche n° 7. Ondes électromagnétiques I

Réponses

7.1 a) $\boxed{3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$

7.1 b) $\boxed{5 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}}$

7.1 c) $\boxed{1 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}}$

7.1 d) $\boxed{1 \times 10^{-20}\,\mathrm{s}}$

7.2 a) $\boxed{\dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}}$

7.2 b) $\boxed{1 \times 10^{-5}\,\mathrm{W}}$

7.2 c) $\boxed{\text{Ampoule classique}}$

7.3 a) $\boxed{B_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0 \langle P \rangle}{cS}}}$

7.3 b) $\boxed{\text{b}}$

7.4 a) $\boxed{-\omega E_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.4 b) $\boxed{kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.4 c) $\boxed{\vec{0}}$

7.4 d) $\boxed{-k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.4 e) $\boxed{-\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 a) $\boxed{-\omega B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 b) $\boxed{kB_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 c) $\boxed{\dfrac{\pi}{a} B_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 d) $\boxed{-\omega^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 e) $\boxed{-k^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 f) $\boxed{-\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.6 a) $\boxed{0}$

7.6 b) $\boxed{-kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_y}}$

7.6 c) $\boxed{k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.7 a) $\boxed{E_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(-\dfrac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha \sin(\omega t - kz)\right)}$

7.7 b) $\boxed{E_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(\dfrac{\pi}{a}\alpha \cos(\omega t - kz) - k \sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}}$

7.7 c) $\boxed{-E_0 \cos(\omega t - kz)\left(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) + \alpha \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\right)\vec{e_x}}$

7.8 a) $\boxed{\text{c}}$

7.8 b) $\boxed{-\vec{\Delta}\vec{E}}$

7.8 c) $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$

7.9 a) $\boxed{\text{signal n}^\text{o}\,1}$

7.9 b) $\boxed{\text{signal n}^\text{o}\,2}$

7.9 c) $\boxed{\text{signal n}^\text{o}\,3}$

7.10 a) $\boxed{\text{Progressive}}$

7.10 b) $\boxed{\text{Stationnaire, donc non progressive et harmonique}}$

7.10 c) $\boxed{\text{Progressive et harmonique}}$

7.11 $\boxed{\text{a}}$

7.12 a) $\boxed{-(\alpha^2 + k^2)\vec{E}}$

7.12 b) $\boxed{-\omega^2 \vec{E}}$

7.12 c) $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}$

7.12 d) $\boxed{\text{Oui}}$

7.13 a) $\boxed{\dfrac{ak}{r} \sin(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}}$

7.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}}$

7.13 c) ..... $\boxed{\text{(a), (c) et (e)}}$

7.14 a) ..... $\boxed{z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}}$

7.14 b) ..... $\boxed{x = qa}$

7.15 a) ..... $\boxed{\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}}$

7.15 b) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_x\underline{E}_x}$

7.15 c) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\vec{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\vec{e_z}}$

7.15 d) ..... $\boxed{-k^2\underline{\vec{E}}}$

7.15 e) ..... $\boxed{\text{(d)}}$

7.15 f) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

7.15 g) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

7.15 h) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

7.16 a) ..... $\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

7.16 b) ..... $\boxed{v_\mathrm{g} = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

7.17 a) ..... $\boxed{\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}}$

7.17 b) ..... $\boxed{\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)}$

7.18 a) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}}$

7.18 b) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)}$

7.18 c) ..... $\boxed{4\pi\varepsilon_0 c a^2 \cos^2(\omega t - kr)}$

7.19 a) ..... $\boxed{\dfrac{E_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}\right]}$

7.19 b) ..... $\boxed{\dfrac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\tfrac{\pi x}{a}\right)\left[\dfrac{1}{c}\sin\left(\tfrac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\tfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right]}$

7.19 c) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}}$

7.20 a) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

7.20 b) ..... $\boxed{\text{(f)}}$

7.20 c) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

7.20 d) ..... $\boxed{\text{(d)}}$

7.20 e) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

7.20 f) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

7.20 g) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

7.20 h) ..... $\boxed{\text{(d)}}$

Corrigés

7.2 a) La puissance rayonnée par le LASER a alors pour expression $P = \iint \vec{\Pi}\cdot\overrightarrow{dS} = \Pi S$. Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_z}\wedge\vec{e_y} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_x}.$$

En moyenne, puisque $\langle\cos^2\rangle = \dfrac{1}{2}$, on a alors : $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$.

.....

7.2 b) Numériquement, on a $\langle P\rangle = \dfrac{1\times10^2\,\mathrm{V^2\cdot m^{-1}}\cdot 1\times10^{-6}\,\mathrm{mm^2}}{2(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})} = \dfrac{10^{-4}}{750}\mathrm{W} = 1\times10^{-5}\,\mathrm{W}.$

.....

7.2 c) Contrairement à ce que l'on pourrait penser, c'est l'ampoule classique à filament qui est la plus puissante.

.....

7.3 a) La puissance moyenne de l'onde s'exprime en fonction de la norme de B_0 :

$$\langle P\rangle = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} = \frac{cB_0^2 S}{2\mu_0} \qquad \text{donc} \qquad B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}.$$

.....

7.3 b) Numériquement, on a $B_0 = \sqrt{\dfrac{2(4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(1\,\mathrm{W})}{1\,\mathrm{m^2}\cdot 3\times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}} = 1\times 10^{-8}\,\mathrm{T}$. Le champ terrestre est plus intense que le champ de l'onde radiofréquence.

.....

7.6 a) L'unique composante de $\vec{E}$, ici suivant $\vec{e_z}$, ne dépend pas de z, donc

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

.....

7.6 b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$, ce qui donne

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = (0-0)\vec{e_x} + \left(0 - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = -kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}.$$

.....

7.6 c) On a $\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z}$. Ici, comme $E_y = E_x = 0$, il reste donc

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_z\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + 0 + 0\right)\vec{e_z}.$$

Enfin, comme on a $\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = (-k)^2 E_0\cos(\omega t - kx) = k^2 E_0\cos(\omega t - kx)$, on a $\vec{\Delta}\vec{E} = k^2 E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z} = k^2\vec{E}$.

.....

7.7 a) On a

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\pi}{a}E_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + k\alpha E_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\\ &= E_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(-\frac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha\sin(\omega t - kz)\right).\end{aligned}$$

.....

7.7 b) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}.\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles, on trouve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\pi}{a}\alpha E_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + kE_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}\\ &= E_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(\frac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t - kz) + k\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}\end{aligned}$$

.....

7.7 c) On a $\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z}$. Ici, $E_x = 0$, il reste donc

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}\vec{E} &= \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} \\ &= \left(0 + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(0 + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z}.\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ &= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ \text{et}\quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ &= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz),\end{aligned}$$

on obtient $\vec{\Delta}\vec{E} = -E_0\cos(\omega t - kz)\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \alpha\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right)\vec{e_x}$.

.....

7.8 a) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. En lui appliquant le rotationnel, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

où l'on a utilisé l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide. Ainsi, $\alpha = -\mu_0\varepsilon_0$.

.....

7.8 b) Grâce à la formule du double rotationnel, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$. Or, d'après l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide, on a $\text{div}\,\vec{E} = 0$. Donc, $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\vec{\Delta}\vec{E}$.

.....

7.8 c) Les deux formules obtenues précédemment donnent :

$$-\vec{\Delta}\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0 \quad \text{d'où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}.$$

.....

7.12 a) Le champ électrique n'a qu'une composante selon $\vec{e_y}$ qui dépend de x et de z.

Ainsi, le laplacien vectoriel s'écrit :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\vec{e_y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\vec{e_y} = E_0\cos(\alpha z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} + E_0\sin(\omega t - kx)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z))\vec{e_y}$$

avec $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx)) = -k^2\sin(\omega t - kx)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z)) = -\alpha^2\cos(\alpha z)$. Ainsi, $\Delta\vec{E} = (-k^2 - \alpha^2)\vec{E} = -(k^2 + \alpha^2)\vec{E}$.

.....

7.12 b) On a : $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = E_0\cos(\alpha z)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} = -\omega^2 E_0\cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y} = -\omega^2\vec{E}$.

.....

7.12 c) On utilise l'équation de d'Alembert avec les deux termes calculés précédemment, on obtient :

$$-(\alpha^2 + k^2)\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \quad \text{soit} \quad \alpha^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{d'où} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2.$$

.....

7.12 d) La relation de dispersion précédente se réécrit : $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\omega^2 c^2}{\omega^2 - c^2\alpha^2}$ d'où $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c\alpha}{\omega}\right)^2}}$.

La vitesse de phase v_φ dépend ici de la pulsation ω : il y a donc dispersion.

.....

7.13 a) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

7.13 b) Avec Maxwell-Faraday, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Donc, $\vec{B} = \dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

7.13 c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ donc le champ est transverse électromagnétique et forme un trièdre direct.

.....

7.14 a) Pour que $\cos(\omega t - kz) = 0$, il faut que $\omega t - kz = (2p+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et donc que $z = \dfrac{\omega}{k}t - (2p+1)\dfrac{\pi}{2k}$. Or, dans le vide $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ d'où $z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}$. La structure est analogue à une onde progressive selon z.

.....

7.14 b) Pour que $\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) = 0$, il faut que $\dfrac{\pi x}{a} = q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et donc que $x = qa$. Ces plans sont indépendants du temps comme une onde stationnaire selon x.

.....

7.15 a) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 b) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante E_x sur l'axe x. On a donc

$$\text{div}\,\underline{\vec{E}} = \frac{\partial\underline{E}_0\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]}{\partial x} = -\mathrm{j}k_x\underline{E}_x.$$

.....

7.15 c) Seule composante E_x de $\vec{E}$ est non nulle. Donc, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\overrightarrow{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\overrightarrow{e_z}$.

.....

7.15 d) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante E_x sur l'axe x. Donc,

$$\begin{aligned}\Delta\underline{\vec{E}} &= \Delta(\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)])\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x}\\ &= [(-\mathrm{j}k_x)^2 + (-\mathrm{j}k_y)^2 + (-\mathrm{j}k_z)^2]\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)]\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x} = -k^2\underline{\vec{E}}.\end{aligned}$$

.....

7.15 e) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 f) On a $\text{div}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 g) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 h) On a $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$.

.....

7.16 a) On divise la relation de dispersion par ω^2 : on obtient $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{c^2}$ donc $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

.....

7.16 b) On différentie la relation de dispersion donnée : on a $\mathrm{d}(k^2) = \mathrm{d}\left(\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{c^2}\right)$, donc $2k\,\mathrm{d}k = \dfrac{2\omega}{c^2}\,\mathrm{d}\omega$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi}$. On en déduit ainsi, grâce à la vitesse de phase trouvée précédemment : $v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$.

.....

7.17 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t-ky)\vec{e_z}\wedge\vec{e_x} = \varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t-ky)\vec{e_y}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.17 b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\cos^2(\omega t-ky) + \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t-ky) = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t-ky)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.18 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{a^2}{\mu_0 c r^2}\cos^2(\omega t-kr)\vec{e_\theta}\wedge\vec{e_\varphi} = \dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)\vec{e_r}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.18 b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{2r^2}\cos^2(\omega t-kr) + \dfrac{a^2}{2\mu_0 c^2 r^2}\cos^2(\omega t-kr) = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.18 c) On calcule la puissance rayonnée, avec $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r}$:

$$\begin{aligned} P &= \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)\vec{e}_r\cdot r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r} = \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2 \iint \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

La double intégrale donne 4π, donc l'expression de la puissance est :

$$P = 4\pi\frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2 = 4\pi\varepsilon_0 c a^2\cos^2(\omega t-kr).$$

.....

7.19 a) Avec l'équation de Maxwell-Faraday, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = -kE_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-kz)\vec{e_x} + \frac{\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\vec{e_z} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

donc $\vec{B} = -\dfrac{k}{\omega}E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a\omega}E_0\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-kz)\vec{e_z}$.

.....

7.19 b) On a

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_y\vec{e_y}}{\mu_0}\wedge(B_x\vec{e_x}+B_z\vec{e_z}) = -\frac{E_y B_x}{\mu_0}\vec{e_z} + \frac{E_y B_z}{\mu_0}\vec{e_x} \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0}\left[\frac{1}{c}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t-kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\sin(\omega t-kz)\vec{e_x}\right] \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t-kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\sin(\omega t-kz)\vec{e_x}\right]. \end{aligned}$$

.....

7.19 c) On a $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.20 a) L'onde associée à $\overrightarrow{E_1}$ est rectiligne se propageant selon $+z$.

.....

7.20 b) L'onde associée à $\underline{\vec{E}_2}$ est circulaire droite se propageant selon $-z$.

.....

7.20 c) L'onde associée à $\underline{\vec{E}_3}$ est circulaire gauche se propageant selon $+z$.

.....

7.20 d) L'onde associée à $\underline{\vec{E}_4}$ est circulaire gauche se propageant selon $-z$.

.....

7.20 e) On a $\underline{\vec{E}_1}\left(t=\frac{T}{3},z=0\right)=\begin{cases}E_0\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\vec{e_x}\\ E_0\sin\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\vec{e_y}\end{cases}=E_0\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\begin{cases}\cos\alpha\vec{e_x}\\ \sin\alpha\vec{e_y}\end{cases}=-\frac{E_0}{2}\begin{cases}\cos\alpha\vec{e_x}\\ \sin\alpha\vec{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$ et la norme est réduite de moitié d'où le cas (c).

.....

7.20 f) On a $\underline{\vec{E}_2}\left(t=\frac{T}{2},z=0\right)=\begin{cases}E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\vec{e_x}\\ E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\vec{e_y}\end{cases}=\begin{cases}E_0\cos(\pi+\alpha)\vec{e_x}\\ E_0\sin(\pi+\alpha)\vec{e_y}\end{cases}=\begin{cases}-E_0\cos(\alpha)\vec{e_x}\\ -E_0\sin(\alpha)\vec{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$ d'où le cas (a).

.....

7.20 g) On a

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}_3}\left(t=\frac{T}{4},z=0\right)&=E_0\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\right](\vec{e_x}-\mathrm{j}\vec{e_y})=E_0\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right)\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\vec{e_x}-\mathrm{j}\vec{e_y})\\&=E_0\,\mathrm{j}\,\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\vec{e_x}-\mathrm{j}\vec{e_y})=E_0[\cos(\alpha)+\mathrm{j}\sin(\alpha)]\,(\mathrm{j}\vec{e_x}+\vec{e_y})\\&=\begin{cases}-E_0\sin(\alpha)\vec{e_x}\\ E_0\cos(\alpha)\vec{e_y}.\end{cases}\end{aligned}$$

Le champ est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'angle initial d'où le cas (b).

.....

7.20 h) On a $\underline{\vec{E}_4}\left(t=\frac{T}{4},z=0\right)=\begin{cases}E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\vec{e_x}\\ -E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}-\alpha\right)\vec{e_y}\end{cases}=\begin{cases}E_0\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\vec{e_x}\\ -E_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\vec{e_y}\end{cases}=\begin{cases}-E_0\sin(\alpha)\vec{e_x}\\ -E_0\cos(\alpha)\vec{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur fait un angle α avec le vecteur $-\vec{e_y}$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$ avec $\vec{e_x}$ d'où le cas (d).

.....

Fiche n° 8. Ondes électromagnétiques II

Réponses

8.1 a) ..... oui

8.1 b) ..... non

8.1 c) ..... oui

8.2 a) ..... $\underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$

8.2 b) ..... $\underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$

8.2 c) ..... $\underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$

8.3 a) ..... $\underline{\rho}\left(\dfrac{\alpha}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$

8.3 b) ..... $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$

8.4 a) ..... $\pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$

8.4 b) ..... $\pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$

8.4 c) ..... $\pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

8.4 d) ..... $\pm\dfrac{\omega}{c}$

8.5 a) ..... $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

8.5 b) ..... $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$

8.6 a) ..... $\dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$

8.6 b) ..... $\dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$

8.6 c) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1+n^2\right)\cos^2(\omega t - kz)$

8.6 d) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1+n^2\right)$

8.7 a) ..... $\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$

8.7 b) ..... $\dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$

8.8 ..... $\dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathrm{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$

8.9 ..... $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

8.10 a) ..... $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

8.10 b) ..... $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

8.10 c) ..... $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

8.11 a) ..... non

8.11 b) ..... non

8.11 c) ..... non

8.11 d) ..... oui

8.12 a) ..... oui

8.12 b) ..... oui

8.12 c) ..... oui

8.12 c) ..... oui

8.12 d) ..... oui

8.13 a) ..... (c)

8.13 b) ..... (a)

8.13 c) ..... (b)

8.14 a) ..... 1 et 4

8.14 b) ..... 1 et 2

8.14 c) ..... 1 et 3

8.15 a) ..... $\boxed{\begin{cases} r+1 = t \\ n_1 - r n_1 = t n_2 \end{cases}}$

8.15 b) ..... $\boxed{\begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}}$

8.16 a) ..... $\boxed{2\,\text{m et } 4\,\text{m}}$

8.16 b) ..... $\boxed{\frac{1}{3} \text{ et } \frac{4}{3}}$

8.16 c) ..... $\boxed{\frac{1}{2}}$

8.16 d) ..... $\boxed{\frac{1}{9} \text{ et } \frac{8}{9}}$

8.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathsf{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)}$

8.17 b) ..... $\boxed{\begin{array}{c} -\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathsf{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right) \\ \dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathsf{Re}\left(\vec{\underline{k}}_2\right) \end{array}}$

8.17 c) ..... $\boxed{|\underline{r}|^2 \text{ et } |\underline{t}|^2\,\mathsf{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)}$

Corrigés

8.1 a) La première équation indique que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être orthogonaux. Les deux équations suivantes indiquent que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux et de même pour $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

.....

8.1 b) Les trois vecteurs doivent être orthogonaux et le sens de $\vec{c}$ doit respecter la règle de la main droite, ce qui n'est pas le cas ici.

.....

8.1 c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être colinéaires et orthogonaux à $\vec{c}$.

.....

8.2 a) On a $\dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial z^2} = -\underline{k}^2\vec{\underline{E}}$.

.....

8.2 b) On peut écrire $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial t^3} = -\mathrm{i}\omega^3\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial z^3} = -\mathrm{i}\underline{k}^3\vec{\underline{E}}$.

.....

8.2 c) On a $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{\underline{E}}$.

.....

8.3 a) En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge devient, en tenant compte de la loi d'Ohm locale, s'écrit $\mathrm{i}\,\omega\underline{\rho} + \underline{\alpha}\,\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}} = 0$. Avec l'équation de Maxwell-Gauss, on a $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$.

.....

8.3 b) En injectant l'expression de la conductivité complexe, l'équation de précédente devient :

$$\underline{\rho}\left(\frac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega\,\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0\,\omega^2}\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0.$$

.....

8.4 a) Si $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{\omega} = \mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{c^2}\,\omega = \mathrm{i}\,\alpha_0\,\mu_0\,\omega.$$

En utilisant $\mathrm{i} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}$, on en déduit $\underline{k} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha_0\,\mu_0\,\omega} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$.

.....

8.4 b) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right].$$

Il vient ainsi $\underline{k} = \pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{-1 + \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

.....

8.4 c) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

.....

8.4 d) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\omega}{c}$.

.....

8.5 a) Si $\omega > \omega_p$, alors $\underline{k}^2 > 0$: le nombre d'onde est réel. On a $k'' = 0$ et $k' = \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

Le champ en notation réelle a pour expression : $\vec{E} = E_0\,\cos\bigl(\omega\,t - k'\,z\bigr)\,\vec{e_x}$. L'onde est progressive et sa vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

.....

8.5 b) La vitesse de groupe est définie par $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$. En dérivant la relation de dispersion, on obtient :

$$v_g = c^2\,\frac{|k'|}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

.....

8.6 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

.....

8.6 b) On peut écrire $\bigl\langle\vec{\Pi}\bigr\rangle = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\bigl\langle\cos^2(\omega t - kz)\bigr\rangle\vec{e_z} = \dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$.

.....

8.6 c) On a $w_{EM} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \left(\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \dfrac{n^2 E_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\cos^2(\omega t - kz) = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\bigl(1 + n^2\bigr)\cos^2(\omega t - kz)$.

.....

8.6 d) On peut écrire $\langle w_{EM}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\big(1+n^2\big)\big\langle\cos^2(\omega t - kz)\big\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\big(1+n^2\big)$.

8.7 a) On a

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_x}$$

donc $\big\langle\vec{\Pi}\big\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$.

8.7 b) On peut écrire $\langle p_J\rangle = \big\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\big\rangle = \big\langle\gamma|\vec{E}|^2\big\rangle = \gamma E_0^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left\langle\cos^2\left(\omega t - \dfrac{x}{\delta}\right)\right\rangle = \dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$.

8.8 On a $\big\langle\vec{\Pi}\big\rangle = \dfrac{1}{2\mu_0}\,\mathsf{Re}\left(\underline{E}_0^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_x}\wedge\dfrac{n\underline{E}_0}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_y}\right) = \dfrac{1}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(|\underline{E}_0|^2\,\underline{n}\vec{e_z}) = \dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$.

8.9 Le laplacien $\Delta\underline{\vec{E}}$ se réduit ici à $\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à z vaut $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à t vaut $-\omega^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle $\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ vaut $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}}$.
Il vient ainsi : $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}} + \dfrac{1}{c^2}\,\omega^2\,\underline{\vec{E}} = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}}$. En posant $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,c^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ et avec $\underline{\vec{E}}$ non nul, on obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

8.10 a) Les équations de Maxwell s'écrivent $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

8.10 c) On exprime le rotationnel $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$. On peut alors écrire

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\gamma\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Donc, $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

8.11 a) On a $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z} \neq 0$.

8.11 b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \neq -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

8.11 c) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

8.11 d) On a $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0$.

8.12 a) On a $\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial\underline{E}}{\partial x} = 0$.

8.12 b) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$ et $-\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$.

8.12 c) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x}$.

8.12 d) On a $\text{div}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial y} = 0$.

8.13 a) On a $\underline{k}^2$ est complexe donc $\underline{k} = k + \mathrm{i}k''$.

8.13 b) On a $\underline{k}^2 > 0$ donc $\underline{k}$ est réel et $\underline{k} = k'$.

8.13 c) On a $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k}$ est un imaginaire pur et $\underline{k} = \mathrm{i}k''$.

8.14 a) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de x et de t.

8.14 b) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de t et décroît exponentiellement avec x.

8.14 c) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de t. Elle décroît exponentiellement avec x mais en présentant des oscillations.

8.15 a) La continuité du champ électrique impose

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}_t(0,t) \quad \text{donc} \quad E_0\cos(\omega t) + rE_0\cos(\omega t) = tE_0\cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad 1 + r = t.$$

La continuité du champ magnétique impose

$$\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t) = \vec{B}_t(0,t) \quad \text{donc} \quad \frac{n_1E_0}{c}\cos(\omega t) - \frac{n_1rE_0}{c}\cos(\omega t) = \frac{n_2tE_0}{c}\cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad n_1 - rn_1 = tn_2.$$

8.15 b) On déduit de la question précédente

$$n_1 - rn_1 = tn_2 = n_2 + rn_2 \quad \text{donc} \quad n_1 - n_2 = r(n_1 + n_2) \quad \text{donc} \quad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

et

$$t = 1 + r = \frac{n_1 + n_2 + n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

8.16 a) Dans le vide, $\lambda_1 = 2\,\text{m}$ et dans le plasma, $\lambda_2 = 4\,\text{m}$.

8.16 b) On lite sur la figure $r = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{1}{3}$ et $t = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{4}{3}$.

8.16 c) On peut écrire

$$r = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad 3 - 3n_2 = 1 + n_2 \quad \text{donc} \quad 2 = 4n_2 \quad \text{donc} \quad n_2 = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi écrire

$$t = \frac{2}{1 + n_2} = \frac{4}{3} \quad \text{donc} \quad 6 = 4 + 4n_2 \quad \text{donc} \quad n_2 = \frac{1}{2}.$$

8.16 d) On écrit $R = |r|^2 = \dfrac{1}{9}$ et $T = |t|^2 n_2 = \dfrac{16}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{9}$.

.....

8.17 a) On a

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}}) = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}\left[\underline{\vec{E}}^* \wedge \left(\frac{\underline{\vec{k}}_1 \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right)\right] = \frac{1}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\big[(\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{E}})\underline{\vec{k}}_1 - (\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{k}}_1)\underline{\vec{E}}\big].$$

On en déduit $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\big(\underline{\vec{k}}_1\big)$.

.....

8.17 b) On écrit $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\big(\underline{\vec{k}}_1\big)$ et $\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\big(\underline{\vec{k}}_2\big)$.

.....

8.17 c) On a $R = |\underline{r}|^2$ et $T = |\underline{t}|^2 \mathsf{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$.

.....

Fiche n° 9. Modèle scalaire de la lumière

Réponses

9.1 a) $\boxed{n_{\text{air}} \times h}$

9.1 b) $\boxed{n_{\text{eau}} \times H}$

9.1 c) $\boxed{n_{\text{air}} \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

9.1 d) $\boxed{1 \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

9.2 a) $\boxed{n \times e}$

9.2 b) $\boxed{1 \times (\text{AA}' - e)}$

9.2 c) $\boxed{\text{AA}' + (n-1)e}$

9.3 a) $\boxed{\text{AB}\sin(\alpha)}$

9.3 b) $\boxed{-\text{AB}\sin(\alpha)}$

9.4 a) $\boxed{\text{Convergente}}$

9.4 b) $\boxed{\text{Convergente}}$

9.4 c) $\boxed{\text{Divergente}}$

9.4 d) $\boxed{\text{Convergente}}$

9.5 a) $\boxed{\text{(a) et (c)}}$

9.5 b) $\boxed{\text{(c)}}$

9.6 a) $\boxed{\text{(b) et (c)}}$

9.6 b) $\boxed{\text{(b)}}$

9.6 c) $\boxed{n_1 a \sin\alpha}$

9.6 d) $\boxed{\text{(a)}}$

9.6 e) $\boxed{n_2 a \sin\beta}$

9.6 f) $\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$

9.7 a) $\boxed{\text{(a) et (b)}}$

9.7 b) $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\left(\text{SA}'\right) + d + e\right)}$

9.7 c) $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\left((\text{SA}) + d + ne\right)}$

9.7 d) $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e}$

9.8 a) $\boxed{\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin\theta_1}}$

9.8 b) $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin\theta_1} + \pi}$

9.8 c) $\boxed{2e\tan\theta_2}$

9.8 d) $\boxed{\frac{h}{2} - e\tan\theta_2}$

9.8 e) $\boxed{\text{(b)}}$

9.8 f) $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos\theta_2}\right)}$

9.8 g) $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi}$

9.8 h) $\boxed{\text{(a)}}$

9.9 a) $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)}$

9.9 b) $\boxed{\frac{e}{\cos\theta_2}}$

9.9 c) $\boxed{\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

9.9 d) $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2))}$

9.9 e) $\boxed{\text{(c)}}$

9.9 f) $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}$

9.10 a) $\boxed{2\pi}$

9.10 b) $\boxed{\pi}$

9.10 c) $\boxed{\frac{e}{\cos\theta_2}}$

9.10 d) $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos\theta_2} - \pi}$

9.11 a) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{11}\,\text{Hz}}$

9.11 b) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{7}\,\text{Hz}}$

9.11 c) ..... $\boxed{\tau_\text{c} = 45 \times 10^{3}\,\text{ps}}$

9.11 d) ..... $\boxed{\text{②, ① puis ③}}$

9.12 a) ..... $\boxed{K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\dfrac{\tau}{T}\right)}$

9.12 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

9.12 c) ..... $\boxed{100\,\text{GHz}}$

9.12 d) ..... $\boxed{\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)\right)}$

9.12 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

9.12 f) ..... $\boxed{\text{non}}$

9.13 a) ..... $\boxed{1{,}00 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

9.13 b) ..... $\boxed{7{,}50 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

9.13 c) ..... $\boxed{6{,}67 \times 10^{-9}\,\text{W}}$

9.13 d) ..... $\boxed{2 \times 10^{-17}\,\text{J}}$

9.13 e) ..... $\boxed{3{,}38 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

9.13 f) ..... $\boxed{3{,}33 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

9.13 g) ..... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

9.1 a) L'air a pour indice optique n_air. Du point S au point I, le rayon lumineux parcourt la distance h.

9.1 b) L'eau a pour indice optique n_eau. Du point I au point F, le rayon lumineux parcourt la distance H.

9.1 c) Les chemins optiques se somment : $(\text{SF}) = (\text{SI}) + (\text{IF}) = n_\text{air} \times h + n_\text{eau} \times H$.

9.1 d) L'indice optique du vide est égal à 1.

9.2 a) Entre les points B et C, le rayon confondu avec l'axe optique parcourt la distance géométrique e.

9.2 b) L'indice optique du vide est égal à 1. De plus, à la distance totale AA', il faut retrancher l'épaisseur e de la lentille pour obtenir la distance géométrique parcourue par le rayon lumineux dans l'air.

9.2 c) Les chemins optiques se somment : $(\text{AA}') = n \times e + 1 \times (\text{AA}' - e) = \text{AA}' + (n-1)e$. Cette expression est valable quel que soit le rayon issu de A et arrivant en A' puisque les points A et A' sont conjugués !

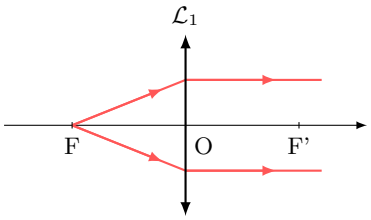
9.3 a) En décomposant le chemin optique de la source S jusqu'au point A, la différence de chemin optique demandée s'écrit : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{SH}) + (\text{HA}) - (\text{SB})$. Par ailleurs, le plan passant par H et B étant une surface d'onde issu de S, il vient : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{HA})$. Dans l'air, cela donne : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = \text{HA} = \text{AB}\sin(\alpha)$.

9.3 b) Il y a égalité des chemins optiques : $(\text{SAS}') = (\text{SBS}')$, c'est-à-dire $(\text{SA}) + (\text{AS}') = (\text{SB}) + (\text{BS}')$.

On en déduit : $(\text{AS}') - (\text{BS}') = (\text{SB}) - (\text{SA}) = -\text{AB}\sin(\alpha)$.

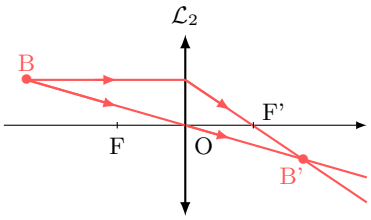
9.4 a)

En vertu du théorème de Malus, les rayons en aval de la lentille sont parallèles à l'axe optique. En amont, les surfaces d'ondes sont des cercles concentriques centrés sur un point (lui aussi en amont), qui est donc le conjugué d'une image à l'infini sur l'axe optique, à savoir le foyer principal objet. Ainsi, $\mathcal{L}_1$ est convergente.



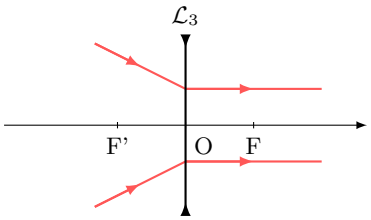
9.4 b)

Les surfaces d'onde permettent de voir qu'il y a conjugaison entre un objet réel et une image réelle (de même taille, et renversée) : $\mathcal{L}_2$ est donc nécessairement convergente.



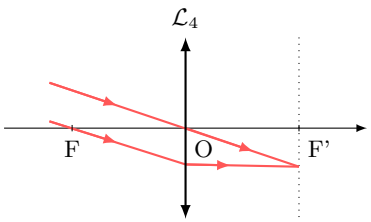
9.4 c)

Les surfaces d'onde incidentes sont des cercles concentriques centrés sur un point en aval de la lentille. De plus, en vertu du théorème de Malus, les rayons émergents sont parallèles à l'axe optique. Le point en question est donc le foyer objet de la lentille, situé après son centre optique : $\mathcal{L}_3$ est donc divergente.



9.4 d)

En vertu du théorème de Malus, les rayons incidents, parallèles entre eux, proviennent d'un objet à l'infini, qui est conjugué par la lentille d'un point hors de l'axe optique : il s'agit d'un foyer image secondaire, situé après le centre optique. $\mathcal{L}_4$ est donc convergente.



9.5 a) Les rayons incidents étant parallèles à l'axe optique, d'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont perpendiculaires à l'axe optique.

9.5 b) Tout se passe comme si F' était une source ponctuelle émettant une onde sphérique : les surfaces d'onde sont donc des cercles concentriques centrés sur F'.

9.6 a) Le point H_1 est le projeté orthogonal de I_2 : d'après le théorème de Malus, ils se situent donc sur la même surface d'onde. De même, H_2 et I_1 appartiennent à un même front d'onde issu de M_∞ (principe du retour inverse de la lumière).

9.6 b) On voit sur le schéma que $i_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$ d'où directement $\alpha = i_1$.

9.6 c) Dans le triangle $H_1I_1I_2$, on a $\sin\alpha = \dfrac{H_1I_1}{a}$. De plus, $(H_1I_1) = n_1H_1I_1$, d'où $(H_1I_1) = n_1 a \sin\alpha$.

9.6 d) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\beta + \dfrac{\pi}{2} + \left(\dfrac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi$ d'où $\beta = i_2$.

.....

9.6 e) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\sin\beta = \dfrac{I_2H_2}{a}$. De plus, $(I_2H_2) = n_2 I_2H_2$, d'où $(I_2H_2) = n_2 a \sin\beta$.

.....

9.6 f) Les chemins optiques (H_1I_1) et (I_2H_2) étant identiques, on retrouve la loi de la réfraction de Snell-Descartes : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

.....

9.7 a) L'indice de la lame étant différent de celui de l'air, C et C′ ne sont pas sur la même surface d'onde.

.....

9.7 b) On a $\phi(C') = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(SC') = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(SA') + \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(A'B') + \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(B'C') = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(\left(SA'\right) + d + e)$.

.....

9.7 c) On a $\phi(C) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(SC) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(SA) + \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(AB) + \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(BC) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}((SA) + d + ne)$.

.....

9.7 d) Les points A et A′ appartenant à la même surface d'onde, les chemins optiques (SA) et $\left(SA'\right)$ sont égaux donc le déphasage est $\Delta\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$.

.....

9.8 a) D'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, au niveau du point d'incidence A, l'angle réfléchi est égal à l'angle incident en valeur absolu. Le triangle SAM est donc un triangle isocèle qu'on peut subdiviser en deux triangles rectangles. Ainsi, en se plaçant dans celui d'hypoténuse SA et de côté $h/2$, le chemin optique (SA) est tel que

$$(SA) = n_{air} \times SA = 1 \times \frac{h}{2\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1}$$

donc la phase $\phi_1(A) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{2\sin\theta_1} = \dfrac{\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin\theta_1}$.

.....

9.8 b) Le chemin optique (AM) est égal au chemin optique (SA), ainsi $(SM) = 2\times(SA)$. Donc, avec le déphasage induit par la réflexion, la phase est telle que $\phi_1(M) = 2 \times \phi_1(A) + \pi = \dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{2\sin\theta_1} + \pi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin\theta_1} + \pi$.

.....

9.8 c) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, on constate que

$$\tan\theta_2 = \frac{BD/2}{e} \qquad \text{donc} \qquad BD = 2e\tan\theta_2.$$

.....

9.8 d) La distance EB est telle que $EB = \dfrac{h - BD}{2} = \dfrac{h}{2} - e\tan\theta_2$.

.....

9.8 e) En se plaçant dans le triangle rectangle SEB, le chemin optique (SB) est tel que

$$(SB) = n_{air} \times SB = 1 \times \frac{EB}{\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e\tan\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e\sin\theta_2}{\cos\theta_2\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e}{n\cos\theta_2}$$

donc la phase $\phi_2(B) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} - \dfrac{e}{n\cos\theta_2}\right)$.

.....

9.8 f) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, le chemin optique (BC) est tel que

$$(\mathrm{BC}) = n \times \mathrm{BC} = \frac{ne}{\cos\theta_2}.$$

Le chemin optique (SC) est donc tel que

$$(\mathrm{SC}) = (\mathrm{SB}) + (\mathrm{BC}) = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e}{n\cos\theta_2} + \frac{ne}{\cos\theta_2} = \frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos\theta_2}.$$

Le chemin optique (SM) est égal au double de (SC). Ainsi la phase est $\phi_2(\mathrm{M}) = \dfrac{4\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{e}{\cos\theta_2}\right)$.

.....

9.8 g) On a

$$\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M}) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos\theta_2}\right) - \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin\theta_1} - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi.$$

.....

9.8 h) On a

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2}} - \pi.$$

Or, d'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, il vient que

$$\Delta\phi = \left(n - \frac{1}{n}\right) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} - \pi.$$

.....

9.9 a) Les chemins optiques (SI_1) et (SH_1), ainsi que $(\mathrm{I}_2\mathrm{N})$ et $(\mathrm{H}_2\mathrm{M})$ sont égaux, on peut donc écrire

$$\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((\mathrm{SM}) - (\mathrm{SN})) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 - \mathrm{H}_1\mathrm{H}_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(ne + d - e) - \frac{2\pi}{\lambda_0}d = \frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1).$$

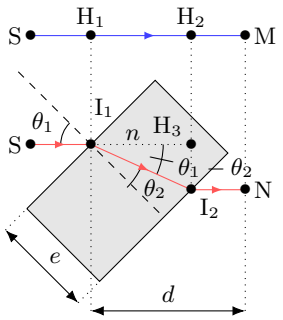
.....

9.9 b) Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$, on a $\cos\theta_2 = \dfrac{e}{\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2}$.

.....

9.9 c) On identifie un triangle rectangle $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{H}_3$ d'hypoténuse $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$ avec un angle $\theta_1 - \theta_2$ de côté adjacent $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2$. Il vient que $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2 = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Cas 2



.....

9.9 d) Les chemins optiques (SI_1) et (SH_1), ainsi que (I_2N) et (H_2M) sont égaux, on peut donc écrire

$$\Delta\phi = \phi(N) - \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((SM) - (SN)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - H_1H_2).$$

En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - I_1I_2\cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

.....

9.9 e) En utilisant l'identité trigonométrique, il vient que $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$. De plus, la loi de Snell-Descartes de la réfraction nous permet d'écrire $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + n\sin^2\theta_2$. Enfin, en utilisant l'identité trigonométrique $1 = \sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2$, il vient que

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + n - n\cos^2\theta_2.$$

.....

9.9 f) En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\big(n - \cos\theta_1\cos\theta_2 - n + \cos^2\theta_2\big)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\big(-\cos\theta_1\cos\theta_2 + n\cos^2\theta_2\big).\end{aligned}$$

Donc, $\Delta\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$.

.....

9.10 a) Le rayon est d'abord réfléchi par la lame semi-réfléchissante. L'indice de réfraction de la lame est supérieur à celui de l'air, il y a donc un déphasage de π. Puis, le rayon est réfléchi par le miroir et est donc, de nouveau, déphasé de π.

.....

9.10 b) Le rayon passe une première fois dans la lame, puis est réfléchi par M_2 : le rayon est déphasé de π. Il traverse une deuxième fois la lame et est réfléchi une seconde fois par la lame. Dans ce cas, le milieu de propagation du rayon incident est le plus réfringent : il n'y a pas de déphasage supplémentaire.

.....

9.10 c) On considère le triangle rectangle d'hypoténuse I_1I_2 et on utilise la relation trigonométrique $\cos\theta_2 = \dfrac{e}{I_2I_2}$.

.....

9.10 d) Le rayon réfléchi par M_1 traverse la lame entre I_1 et I_3 avant la réflexion par M_1. Le rayon réfléchi par M_2 traverse la lame entre I_1 et I_2 avant la réflexion par M_2, puis entre I_2 et I_1 après la réflexion par M_2, puis entre I_1 et I_3. En tenant compte du déphasage dû au réflexion, et comme $I_1I_2 = I_1I_3$, il vient que

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(3nI_1I_2) + \pi - \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 + 2\pi) = \frac{4\pi}{\lambda_0}nI_1I_2 - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos\theta_2} - \pi.$$

.....

9.11 a) Attention à la conversion des picosecondes en secondes : on a $1\,\text{ps} = 1\times10^{-12}\,\text{s}$.

.....

9.11 b) Attention à la conversion des microsecondes en secondes : on a $1\,\mu\text{s} = 1\times10^{-6}\,\text{s}$.

.....

9.11 c) La relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$ se réécrit $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{1}{\tau_c f}$, soit $\tau_c = \dfrac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$. Ainsi, on a :

$$\tau_c = \frac{\big(820\times10^{-9}\,\text{m}\big)^2}{3\times10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\times50\times10^{-9}\,\text{m}} = 45\times10^{-15}\,\text{s} = 45\times10^3\,\text{ps}.$$

.....

9.11 d) Une source possède une cohérence temporelle d'autant plus forte que le temps de cohérence est long (trains d'onde avec une durée importante). Parmi les trois sources, c'est le laser qui possède la meilleure cohérence temporelle. La source de lumière blanche munie du filtre possède la moins bonne cohérence temporelle.

.....

9.12 a) La tension u_1 vérifie

$$u_1 = K_1\langle s(t)\rangle = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau S_0\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1 S_0}{\tau}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^\tau$$
$$= K_1 S_0 \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega\tau) = K_1 S_0 \frac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right).$$

.....

9.12 b) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(2\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de u_1 est $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$.

.....

9.12 c) La valeur maximale du signal u_1 est $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$. Ce signal est exploitable lorsque

$$K_1 S_0 \frac{T}{2\pi\tau} \geqslant \frac{K_1 S_0}{2\pi\times 100} \qquad \text{soit} \qquad T \geqslant \frac{\tau}{100} \qquad \text{soit} \qquad f \leqslant \frac{100}{\tau}.$$

Ainsi la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A est $f = \dfrac{100}{1\times 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 1\times 10^{11}\,\mathrm{Hz} = 100\,\mathrm{GHz}$.

.....

9.12 d) La tension u_2 vérifie

$$u_2 = K_2\left\langle s^2(t)\right\rangle = \frac{K_2}{\tau}\int_0^\tau s^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2 S_0^2}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\int_0^\tau \mathrm{d}t + \int_0^\tau \cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{\tau}{T}\right)\right).$$

.....

9.12 e) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de u_2 est $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$.

.....

9.12 f) La valeur maximale du signal u_2 est $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$. Ce signal est exploitable lorsque

$$\frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\right) \geqslant \frac{K_2 S_0^2}{2} \qquad \text{soit} \qquad K_2 S_0^2 \frac{T}{8\pi\tau} \geqslant 0 \qquad \text{soit} \qquad f < +\infty.$$

Ainsi, théoriquement, il n'y a pas de limite à la fréquence du signal exploitable par le capteur B.

.....

9.13 a) On a $\mathcal{P}_{\min\,1} = \dfrac{I_{\mathrm{obs}\,1}}{s_1} = \dfrac{3\times 10^{-11}\,\mathrm{A}}{0{,}3\,\mathrm{A\cdot W^{-1}}} = 1{,}00\times 10^{-10}\,\mathrm{W}$.

.....

9.13 d) On a $E_{\min\,1} = \mathcal{P}_{\min\,1}\times\tau = 1{,}00\times 10^{-10}\,\mathrm{W}\times 2{,}00\times 10^{-7}\,\mathrm{s} = 2{,}00\times 10^{-17}\,\mathrm{J}$.

.....

9.13 g) Le nombre minimal de photons reçus par une photodiode $N_{\min}$ vérifie $N_{\min} = \dfrac{E_{\min}}{h\nu} = \dfrac{E_{\min}\lambda_0}{hc}$.

Ainsi, on a $N_{\min\,1} = 47$, $N_{\min\,2} = 935$ et $N_{\min\,3} = 1\,104$.

.....

Fiche n° 10. Interférences à deux ondes

Réponses

10.1 a) .. $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}}$

10.1 b) ..... $\boxed{\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}}$

10.1 c) ..... $\boxed{\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}}$

10.1 d) ..... $\boxed{\sin(a)\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2}}$

10.2 a) ..... $\boxed{\cos(\omega t - kx)}$

10.2 b) ..... $\boxed{-\sin(\omega t - kx)}$

10.2 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

10.3 a) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_1}}$

10.3 b) ..... $\boxed{0}$

10.3 c) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_2}}$

10.3 d) ..... $\boxed{0}$

10.3 e) ..... $\boxed{\dfrac{\pi}{\omega_1}}$

10.3 f) ..... $\boxed{\dfrac{S_1^2}{2}}$

10.3 g) ..... $\boxed{\dfrac{\pi}{\omega_2}}$

10.3 h) ..... $\boxed{\dfrac{S_2^2}{2}}$

10.4 a) ..... $\boxed{1+\cos(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2)}$

10.4 b) ..... $\boxed{A^2}$

10.4 c) ..... $\boxed{\dfrac{A^2+B^2}{2}}$

10.4 d) ..... $\boxed{\dfrac{A^2}{8}\left(\dfrac{5}{4}+\cos(\varphi_0)\right)}$

10.5 ..... $\boxed{\text{c}}$

10.6 a) ..... $\boxed{k(x'-x)}$

10.6 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

10.6 c) ..... $\boxed{\omega(t-t')}$

10.6 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

10.7 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

10.7 b) ..... $\boxed{1{,}3\,\text{cm}}$

10.7 c) ..... $\boxed{48\,\mu\text{m}}$

10.8 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

10.8 b) ..... $\boxed{0{,}57\,\text{cm}}$

10.8 c) ..... $\boxed{0{,}76\,\mu\text{m}}$

10.8 d) ..... $\boxed{6{,}4\,\text{cm}}$

10.8 e) ..... $\boxed{0{,}14\,\mu\text{m}}$

10.9 a) ..... $\boxed{a\sin(\theta_1)}$

10.9 b) ..... $\boxed{\arctan\left(\dfrac{y}{f_2'}\right)}$

10.9 c) ..... $\boxed{\dfrac{nay}{f_2'}}$

10.9 d) ..... $\boxed{\dfrac{f_2'\lambda}{na}}$

10.9 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

10.10 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

10.10 b) ..... $\boxed{(n-1)\alpha y}$

10.10 c) ..... $\boxed{\dfrac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}}$

10.10 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

10.11 a) ..... $\boxed{\dfrac{e}{\cos(\theta)}}$

10.11 b) $\boxed{2e\tan(\theta)}$

10.11 c) $\boxed{\mathrm{IK}\sin(\theta)}$

10.11 d) $\boxed{2e\dfrac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}}$

10.11 e) $\boxed{2ne\cos(\theta)}$

10.11 f) $\boxed{\text{c}}$

10.12 a) $\boxed{\text{b}}$

10.12 b) $\boxed{\dfrac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}}$

10.12 c) $\boxed{\dfrac{e}{\cos(i)}}$

10.12 d) $\boxed{2ne\cos(i)}$

10.12 e) $\boxed{\text{c}}$

10.13 a) $\boxed{1{,}0\times10^{-1}\,\mathrm{s}}$

10.13 b) $\boxed{2{,}2\times10^{-1}\,\mathrm{m}}$

10.13 c) $\boxed{2{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}}$

10.13 d) $\boxed{9{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}}$

10.13 e) $\boxed{1{,}9\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$

10.13 f) $\boxed{1{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$

10.14 a) $\boxed{\dfrac{c}{\nu_1-\nu_2}}$

10.14 b) $\boxed{6{,}00\times10^{11}\,\mathrm{Hz}}$

10.14 c) $\boxed{\dfrac{c}{\nu_1+\nu_2}}$

10.14 d) $\boxed{6{,}00\times10^{12}\,\mathrm{Hz}}$

10.14 e) $\boxed{599{,}8\,\mathrm{nm}}$

10.14 f) $\boxed{600{,}2\,\mathrm{nm}}$

10.15 a) $\boxed{\text{a}}$

10.15 b) $\boxed{\text{b}}$

10.15 c) $\boxed{\text{c}}$

10.16 a) $\boxed{f'\tan(\theta)}$

10.16 b) $\boxed{1\,555{,}2}$

10.16 c) $\boxed{\text{b}}$

10.16 d) $\boxed{\text{a}}$

10.16 e) $\boxed{8{,}22\,\mathrm{mm}}$

10.16 f) $\boxed{\text{a}}$

10.16 g) $\boxed{19{,}7\,\mathrm{mm}}$

10.16 h) $\boxed{5{,}47\,\mathrm{cm}}$

Corrigés

10.1 a) Si on somme les relations (1) et (2), il vient que

$$\cos(a-b)+\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)+\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)=2\cos(a)\cos(b).$$

Donc, $\cos(a)\cos(b)=\dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$.

.....

10.1 b) En remplaçant b par a dans la relation précédente, il vient que

$$\cos(a)\cos(a)=\frac{\cos(a-a)+\cos(a+a)}{2}\qquad\text{donc}\qquad\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}.$$

.....

10.2 a) On a

$$\begin{aligned}s(x,t)&=S_0\ \cos(\omega t-kx)+S_0\ \cos(\omega t-kx+\varphi)=S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)+\cos(\omega t-kx+\varphi)\big)\\&=S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)+\cos(\omega t-kx)\cos(\varphi)-\sin(\omega t-kx)\sin(\varphi)\big)\\&=S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)\ \big(1+\cos(\varphi)\big)-\sin(\omega t-kx)\sin(\varphi)\big)\\&=S_0\big(\ f(x,t)\ \big(1+\cos(\varphi)\big)+g(x,t)\ \sin(\varphi)\ \big).\end{aligned}$$

Par identification, on a $f(x,t)=\cos(\omega t-kx)$ et $g(x,t)=-\sin(\omega t-kx)$.

.....

10.2 c) La fonction $s(x,t)$ s'annule si, et seulement si,

$$\begin{cases}1+\cos(\varphi)=0\\ \sin(\varphi)=0\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\begin{cases}\varphi=\pi\ \ [2\pi]\\ \varphi=\pi\ \ [\pi].\end{cases}$$

On en déduit que l'unique condition d'annulation est $\varphi=\pi\ \ [2\pi]$.

.....

10.3 a) La pulsation du signal $s_1(t)=S_1\cos(\omega_1 t-k_1x)$ est ω_1 donc sa période est $T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$.

.....

10.3 b) On a

$$\begin{aligned}\langle s_1(t)\rangle&=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}S_1\cos(\omega_1 t-k_1x)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\frac{1}{\omega_1}S_1\Big[\sin(\omega_1 t-k_1x)\Big]_0^{T_1}\\&=\frac{\omega_1}{2\pi}\frac{1}{\omega_1}S_1(\sin(\omega_1T_1-k_1x)-\sin(-k_1x))=\frac{1}{2\pi}S_1(\sin(2\pi-k_1x)-\sin(-k_1x)).\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi-k_1x)=\sin(-k_1x)$, on voit que $\langle s_1(t)\rangle=0$.

.....

10.3 d) On a

$$\begin{aligned}\langle s_2(t)\rangle&=\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}S_2\sin(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{T_2}\frac{1}{\omega_2}S_2\Big[\cos(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2)\Big]_0^{T_2}\\&=-\frac{\omega_2}{2\pi}\frac{1}{\omega_2}S_2(\cos(\omega_2T_2-k_2x+\varphi_2)-\cos(-k_2x+\varphi_2))=-\frac{1}{2\pi}S_2(\cos(2\pi-k_2x+\varphi_2)-\cos(-k_2x+\varphi_2)).\end{aligned}$$

Comme $\cos(2\pi-k_2x+\varphi_2)=\cos(-k_2x+\varphi_2)$, on voit que $\langle s_2(t)\rangle=0$.

.....

10.3 e) Le signal $f_1(t) = s_1^2(t) = S_1^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 x)$. Or, on a

$$\cos(a)\cos(a) = \frac{\cos(a-a)+\cos(a+a)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}.$$

Donc, $f_1(t) = \dfrac{S_1^2}{2} + \dfrac{S_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)$.

Ainsi, la pulsation du signal $f_1(t)$ est $2\omega_1$ donc sa période est $T_3 = \dfrac{2\pi}{2\omega_1} = \dfrac{\pi}{\omega_1}$.

.....

10.3 f) On a

$$\begin{aligned}\langle f_1(t)\rangle &= \frac{1}{T_3}\int_0^{T_3} \frac{S_1^2}{2} + \frac{S_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left(\int_0^{T_3}\mathrm{d}t + \int_0^{T_3}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left([t]_0^{T_3} + \frac{1}{2\omega_1}[\sin(2\omega_1 t - 2k_1 x)]_0^{T_3}\right) = \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left(T_3 + \frac{1}{2\omega_1}(\sin(2\omega_1 T_3 - 2k_1 x) - \sin(-2k_1 x))\right)\\ &= \frac{S_1^2}{2}\left(1 + \frac{\omega_1}{\pi}\frac{1}{2\omega_1}(\sin(2\pi - 2k_1 x) - \sin(-2k_1 x))\right).\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi - 2k_1 x) = \sin(-2k_1 x)$, on voit que $\langle f_1(t)\rangle = \dfrac{S_1^2}{2}$.

.....

10.3 g) Le signal $f_2(t) = s_2^2(t) = S_2^2 \sin^2(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)$. Or, on a

$$\sin(a)\sin(a) = \frac{\cos(a-a)-\cos(a+a)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

Donc, $f_2(t) = \dfrac{S_2^2}{2} - \dfrac{S_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)$.

Ainsi, la pulsation du signal $f_2(t)$ est $2\omega_2$ donc sa période est $T_4 = \dfrac{2\pi}{2\omega_2} = \dfrac{\pi}{\omega_2}$.

.....

10.3 h) On a

$$\begin{aligned}\langle f_2(t)\rangle &= \frac{1}{T_4}\int_0^{T_4} \frac{S_2^2}{2} - \frac{S_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(\int_0^{T_4}\mathrm{d}t - \int_0^{T_4}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left([t]_0^{T_4} - \frac{1}{2\omega_2}\Big[\sin(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\Big]_0^{T_4}\right)\\ &= \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(T_4 - \frac{1}{2\omega_2}(\sin(2\omega_2 T_4 - 2k_2 x + 2\varphi_2) - \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2))\right)\\ &= \frac{S_2^2}{2}\left(1 - \frac{\omega_2}{\pi}\frac{1}{2\omega_2}(\sin(2\pi - 2k_2 x + 2\varphi_2) - \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2))\right).\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi - 2k_2 x + 2\varphi_2) = \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2)$, on voit que $\langle f_2(t)\rangle = \dfrac{S_2^2}{2}$.

.....

10.4 a) On a

$$\begin{aligned}&\big\langle[\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \cos(\omega_0 t + \varphi_2)]^2\big\rangle\\ &= \big\langle[\cos(\omega_0 t + \varphi_1)]^2 + 2\cos(\omega_0 t + \varphi_1)\cos(\omega_0 t + \varphi_2) + [\cos(\omega_0 t + \varphi_2)]^2\big\rangle\\ &= \left\langle\frac{\cos(0) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_1)}{2}\right\rangle + \left\langle 2\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right\rangle + \left\langle\frac{\cos(0) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\ &= \frac{1}{2} + 0 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 1 + \cos(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2).\end{aligned}$$

.....

10.4 b) On a

$$\begin{aligned}
&\big\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\big\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)]^2+2A^2\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)\cos(\omega_0 t+\varphi_2)+[A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(6\omega_0 t+2\varphi_1)}{2}\right\rangle+\left\langle 2A^2\frac{\cos(2\omega_0 t+\varphi_1-\varphi_2)+\cos(4\omega_0 t+\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&\qquad\qquad+\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(2\omega_0 t+2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&=A^2\Big[\frac12+0+0+0+\frac12+0\Big]=A^2.
\end{aligned}$$

.....

10.4 c) On a

$$\begin{aligned}
&\big\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)+B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\big\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)]^2+2AB\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)+[B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(84\omega_0 t+2\varphi_1)}{2}\right\rangle+\left\langle 2AB\frac{\sin(\omega_0 t-\varphi_1+\varphi_2)+\sin(85\omega_0 t+\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&\qquad\qquad+\left\langle B^2\frac{\cos(0)-\cos(86\omega_0 t+2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&=\left[\frac{A^2}{2}+0+0+0+\frac{B^2}{2}-0\right]=\frac{A^2+B^2}{2}.
\end{aligned}$$

.....

10.4 d) On a

$$\begin{aligned}
&\left\langle\left[\frac{A}{4}\sin\Big(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0\Big)+\frac{A}{2}\sin\Big(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0\Big)\right]^2\right\rangle\\
&=\left\langle\left[\frac{A}{4}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0)\right]^2+\frac{A^2}{4}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0)\sin(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0)+\left[\frac{A}{2}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0)\right]^2\right\rangle\\
&=\left\langle\frac{A^2}{16}\frac{\cos(0)-\cos(\omega_0 t+2\varphi_0)}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{A^2}{4}\frac{\cos(\varphi_0)-\cos(\omega t+3\varphi_0)}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{A^2}{4}\frac{\cos(0)-\cos(\omega_0 t+4\varphi_0)}{2}\right\rangle\\
&=\left[\frac{A^2}{32}-0+\frac{A^2}{8}\cos(\varphi_0)-0+\frac{A^2}{8}-0\right]=\frac{A^2}{8}\Big(\frac14+\cos(\varphi_0)+1\Big)=\frac{A^2}{8}\Big(\frac54+\cos(\varphi_0)\Big).
\end{aligned}$$

.....

10.5

- Pour (a), on a $C=\dfrac{10{,}0\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-1{,}00\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}}{10{,}0\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+1{,}00\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}}=\dfrac{1{,}00\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-1{,}00\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{1{,}00\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+1{,}00\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=0{,}82.$
- Pour (b), on a $C=\dfrac{660\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}-0{,}220\,\mathrm{kW\cdot dm^{-2}}}{660\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}+0{,}220\,\mathrm{kW\cdot dm^{-2}}}=\dfrac{6{,}60\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-2{,}20\times10^4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{6{,}60\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+2{,}20\times10^4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=93{,}5.$
- Pour (c), on a $C=\dfrac{5{,}00\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}-2{,}00\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}}{5{,}00\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}+2{,}00\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}}=\dfrac{5{,}00\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-20{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{5{,}00\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+20{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=99{,}2.$
- Pour (d), on a $C=\dfrac{72{,}0\,\mathrm{pW\cdot\mu m^{-2}}-3{,}00\,\mathrm{MW\cdot km^{-2}}}{72{,}0\,\mathrm{pW\cdot\mu m^{-2}}+3{,}00\,\mathrm{MW\cdot km^{-2}}}=\dfrac{72{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-3{,}00\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{72{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+3{,}00\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=92{,}0.$

.....

10.6 a) On a $\Delta\varphi=\omega t_0-kx-\big(\omega t_0-kx'\big)=k\big(x'-x\big)$.

.....

10.6 b) Le déphasage $\Delta\varphi_n$ entre deux positions successives est constant si $k(x_n-x_{n+1})=0\ \ [2\pi]=n2\pi$.

Autrement dit, on a $\Delta x_n=n\dfrac{2\pi}{k}=n\dfrac{2\pi\lambda}{2\pi}=n\lambda$. Pour un instant donné, les positions distantes d'un nombre entier de fois la longueur d'onde de la vibration lumineuse sont en phases : réponse (a).

.....

10.6 c) On a $\Delta\varphi = \omega t - kx_0 - \big(\omega t' - kx_0\big) = \omega\big(t - t'\big)$.

.....

10.6 d) Le déphasage $\Delta\varphi_n$ entre deux instants successifs est constant si $\omega(t_n - t_{n+1}) = 0 \ [2\pi] = n2\pi$. Autrement dit, on a $\Delta t_n = n\dfrac{2\pi}{\omega} = n\dfrac{2\pi T}{2\pi} = nT$. Pour une position donnée, les instants séparés d'un nombre entier de fois la période de la vibration lumineuse sont en phase : réponse (a).

.....

10.7 a) On a $I(\mathrm{M}) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)\right)$; on identifie donc $i = \dfrac{\lambda D}{na}$.

.....

10.7 b) Par lecture graphique, on constate qu'entre $x = -20\,\mathrm{mm}$ et $x = +20\,\mathrm{mm}$ se trouve 3 interfranges. Donc, on a $i = \dfrac{4{,}0\,\mathrm{cm}}{3} = 1{,}3\,\mathrm{cm}$.

.....

10.7 c) On a $a = \dfrac{\lambda D}{ni}$. Donc, $a = \dfrac{630 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 1{,}0\,\mathrm{m}}{1{,}0 \times 1{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 48\,\mu\mathrm{m}$.

.....

10.8 a) On a $C(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi x}{X}\right)$; on identifie donc $X = \dfrac{2\lambda_{\mathrm{moy}}^2 D}{na\Delta\lambda}$.

.....

10.8 c) On a $\lambda_{\mathrm{moy}} = \dfrac{ina}{D}$. Donc, $\lambda_{\mathrm{moy}} = \dfrac{0{,}57 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \times 1{,}0 \times 0{,}20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 0{,}76\,\mu\mathrm{m}$.

.....

10.8 e) On a $\Delta\lambda = \dfrac{2\lambda_{\mathrm{moy}}^2 D}{naX}$. Donc, $\Delta\lambda = \dfrac{2 \times (0{,}76.10^{-6})^2 \times 1{,}5}{1{,}0 \times 0{,}20.10^{-3} \times 6{,}4.10^{-2}} = 0{,}14\,\mu\mathrm{m}$.

.....

10.9 a) On a $\sin(\theta_1) = \dfrac{\mathrm{S_2H}}{a}$ donc $\mathrm{S_2H} = a\sin(\theta_1)$.

.....

10.9 b) À l'aide du tracé en pointillé, on obtient un triangle avec : $\tan(\theta_1) = \dfrac{y}{f_2'}$. On en déduit $\theta_1 = \arctan(\dfrac{y}{f_2'})$.

.....

10.9 c) On sait que $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{S_2H}} = n\mathrm{S_2H} = na\sin(\theta_1)$. À l'ordre 1, on a $\sin(\theta_1) = \theta_1$ et $\tan(\theta_1) = \theta_1 = \dfrac{y}{f_2'}$. Donc, on a $\delta_{\mathrm{SM}} = \dfrac{nay}{f_2'}$.

.....

10.9 d) En identifiant, on a : $\dfrac{y}{i} = \dfrac{\delta_{\mathrm{SM}}}{\lambda} = \dfrac{nay}{f_2'\lambda}$. Donc : $i = \dfrac{\lambda f_2'}{na}$.

.....

10.9 e) L'éclairement ne dépend que de la variable y, ainsi pour une valeur de y fixée l'éclairement doit être constant, ce qui est seulement le cas pour la figure 2 soit la réponse (b).

.....

10.10 a) Dans l'interféromètre, un rayon est atténué par deux lames séparatrices, ainsi son éclairement en sortie I' est tel que $I' = I_0/4$. Donc son amplitude en sortie S' est telle que $S'^2 = S_0^2/4$, soit $S' = S_0/2$.

.....

10.10 b) En considérant l la distance parcourue par un rayon dans un des bras de l'interféromètre de S jusqu'à l'écran, la différence de marche entre les rayons passant par les deux bras de l'interféromètre est

$$\delta = n_{\mathrm{air}}(l - e) + ne - \big(n_{\mathrm{air}}\big(l - e'\big) + ne'\big) = l + (n-1)e - l - (n-1)e' = (n-1)\big(e - e'\big) = (n-1)\alpha y.$$

.....

10.10 c) Le déphasage entre les deux rayons est $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)\alpha y$. Par identification, on a

$$2\pi\frac{y}{i} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)\alpha y \qquad \text{donc} \qquad i = \frac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}.$$

.....

10.10 d) L'éclairement ne dépend que de la variable y, ainsi pour une valeur de y fixée l'éclairement doit être constant, ce qui est seulement le cas pour la figure 2. Réponse (b).

.....

10.11 a) On a $\cos(\theta) = \dfrac{e}{\mathrm{IJ}} = \dfrac{e}{\mathrm{JK}}$; donc, $\mathrm{IJ} = \mathrm{JK} = \dfrac{e}{\cos(\theta)}$.

.....

10.11 b) On a $\tan(\theta) = \dfrac{\frac{\mathrm{IK}}{2}}{e} = \dfrac{\mathrm{IK}}{2e}$; donc, $\mathrm{IK} = 2e\tan(\theta)$.

.....

10.11 c) On a $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{IH}}{\mathrm{IK}}$; donc, $\mathrm{IH} = \mathrm{IK}\sin(\theta)$

.....

10.11 d) On a $\mathrm{IH} = \mathrm{IK}\sin(\theta) = 2e\tan(\theta)\sin(\theta) = 2e\dfrac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ car $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Or, $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$.

Donc, $\mathrm{IH} = 2e\dfrac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$.

.....

10.11 e) On a $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{IJ}} + \mathcal{L}_{\mathrm{JK}} - \mathcal{L}_{\mathrm{IH}} = n(\mathrm{IJ} + \mathrm{JK} - \mathrm{IH})$. En injectant les résultats précédents on obtient :

$$\delta_{\mathrm{SM}} = n\left(2\frac{e}{\cos(\theta)} - 2e\frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \frac{2ne}{\cos(\theta)}\left[1 - \left(1-\cos^2(\theta)\right)\right] = \frac{2ne}{\cos(\theta)}\cos^2(\theta) = 2ne\cos(\theta).$$

.....

10.11 f) La différence de marche ne dépend que de la variable θ. Or l'éclairement dépend de la différence de marche (formule de Fresnel) donc l'éclairement dépend uniquement de la variable θ. Cela signifie que l'on retrouve une valeur fixée d'éclairement pour une valeur fixée de θ ! Autrement dit, l'ensemble des points de même éclairement correspond à un cercle, conformément à ce qui est observé dans la figure 3. Réponse (c).

.....

10.12 a) La rayon inférieur d'amplitude S' en M est réfléchi deux fois de plus que le rayon supérieur d'amplitude S en M. Ainsi $S' = r^2 S$. Comme l'éclairement I est proportionnel au carré de l'amplitude, on a $I' = r^4 I$ et

$$I' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 I = \frac{I}{4} \qquad \text{donc} \qquad \frac{I'}{I} = \frac{1}{4}.$$

.....

10.12 b) D'après la loi de la réflexion, on a $\tan(i) = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{BE}}{e}$ et donc $\mathrm{BE} = 2e\tan(i)$. Par ailleurs, on a $\sin(i) = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BE}}$, d'où $\mathrm{BH} = \mathrm{BE}\sin(i)$. En injectant la première relation dans la seconde, il vient

$$\mathrm{BH} = 2e\tan(i)\sin(i) = \frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}.$$

.....

10.12 c) D'après la loi de la réflexion, il vient $\cos(i) = \dfrac{e}{\mathrm{BD}}$. On en déduit $\mathrm{BD} = \dfrac{e}{\cos(i)}$.

.....

10.12 d) On a

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{SM}} &= \mathcal{L}_{\mathrm{SABDFM}} - \mathcal{L}_{\mathrm{SABHCM}} \\ &= (\mathrm{SA} + n\mathrm{AB} + n\mathrm{BD} + n\mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FM}) - (\mathrm{SA} + n\mathrm{AB} + \mathrm{BH} + \mathrm{HC} + \mathrm{CM}).\end{aligned}$$

Or, on a BD = DE, EF = HC et FM = CM donc

$$\delta_{\mathrm{SM}} = 2n\mathrm{BD} - \mathrm{BH} = 2n\frac{e}{\cos(i)} - \frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)} = 2ne\frac{1-\sin^2 i}{\cos(i)} = 2ne\frac{\cos^2 i}{\cos(i)} = 2ne\cos(i).$$

.....

10.12 e) Les franges d'interférences sont isophases, donc telles que δ_{SM} soit constant. Or δ_{SM} ne dépend que de l'angle i, donc les franges d'interférences coïncident avec des cercles épais concentriques. Réponse (c).

.....

10.13 a) On identifie la période $\frac{2\pi}{T_1}t = 60t$ donc $T_1 = \frac{2\pi}{60}\mathrm{s} = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}$.

.....

10.13 b) On identifie la longueur d'onde $\frac{2\pi}{\lambda_1}x = 28x$ donc $\lambda_1 = \frac{2\pi}{28}\mathrm{m} = 2{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$.

.....

10.13 c) On identifie la fréquence $2\pi\nu_2 t = \left(\frac{t}{21} - \frac{t}{32}\right)$ donc $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{21} - \frac{1}{32}\right)\mathrm{s}^{-1} = 2{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$.

.....

10.13 d) On identifie le nombre d'onde $2\pi\sigma_2 t = \left(\frac{x}{7} - \frac{x}{12}\right)$ donc $\sigma_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12}\right)\mathrm{m}^{-1} = 9{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$.

.....

10.13 e) Attention : le terme $\frac{\pi}{2}$ correspond à la valeur de la phase du signal à l'origine (argument de la fonction cosinus pour $t = 0$ et $x = 0$), il n'entre ni dans l'expression de la pulsation temporelle, ni dans celle de la pulsation spatiale.

Ainsi, on identifie la pulsation temporelle $\omega_3 t = \frac{3\pi}{5}t + \frac{t}{23}$; donc $\omega_3 = \frac{3\pi}{5} + \frac{1}{23}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1{,}9\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

.....

10.13 f) On identifie la pulsation spatiale $k_3 x = \frac{2\pi\nu_3}{5c}x$; donc $k_3 = \frac{1{,}9}{5\times 3\times 10^8}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 1{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

.....

10.14 a) La période spatiale de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{c}x\right)$ est telle que $\lambda = \frac{c}{\nu_1-\nu_2}$.

.....

10.14 b) D'après la figure, on a $\frac{\lambda}{2} = 0{,}500\,0\,\mathrm{mm}$ donc $\lambda = 1{,}000 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Or, on a vu que $\lambda = \frac{c}{\nu_1-\nu_2}$. Donc,

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{1{,}000\times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 3{,}000 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}.$$

.....

10.14 c) La période spatiale de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1+\nu_2}{c}x\right)$ est telle que $\lambda' = \frac{c}{\nu_1+\nu_2}$.

.....

10.14 d) D'après la figure, on a $8\lambda' = 2{,}400\,\mu\mathrm{m}$ donc $\lambda' = 3{,}000 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Or, on a vu que $\lambda' = \frac{c}{\nu_1+\nu_2}$. Donc,

$$\nu_0 = \frac{c}{2\lambda'} = \frac{3\times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{2\times 3{,}000\times 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 5{,}000 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}.$$

.....

10.14 e) En sommant $2\nu_0$ et $\Delta\nu$, il vient que $2\nu_0 + \Delta\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_1 - \nu_2 = 2\nu_1$, donc $\nu_1 = \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$ et donc

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3\times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{5{,}00\times 10^{14}\,\mathrm{Hz} + \frac{3{,}00\times 10^{11}\,\mathrm{Hz}}{2}} = 599{,}8\,\mathrm{nm}.$$

.....

10.14 f) En soustrayant $\Delta\nu$ à $2\nu_0$, il vient que $2\nu_0 - \Delta\nu = \nu_1 + \nu_2 - \nu_1 + \nu_2 = 2\nu_2$, donc $\nu_2 = \nu_0 - \dfrac{\Delta\nu}{2}$ et donc

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{5{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} - \frac{3{,}00 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}}{2}} = 600{,}2\,\mathrm{nm}.$$

.....

10.15 a) La figure est dans le plan $(z\mathrm{O}x)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges linéaires de direction parallèle à l'axe $(\mathrm{O}z)$. Autrement dit, les ensembles de points isophases ne dépendent ni de la coordonnée y (figure plane) ni de la coordonnée z (orientation des franges), donc uniquement de la coordonnée x. De manière analogue, on peut dire qu'il n'y a aucune variation d'éclairement selon la coordonnée z. Réponse (a).

.....

10.15 b) La figure est dans le plan $(y\mathrm{O}z)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges linéaires de direction parallèle à l'axe $(\mathrm{O}z)$. Autrement dit, les ensembles de points isophases ne dépendent ni de la coordonnée x (figure plane) ni de la coordonnée z (orientation des franges), donc uniquement de la coordonnée y. De manière analogue, on peut dire qu'il n'y a aucune variation d'éclairement selon la coordonnée z. Réponse (b).

.....

10.15 c) La figure est dans le plan $(z\mathrm{O}y)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges circulaires. Les ensembles de points d'éclairement constant sont définis pour une valeur constante de distance au centre de la figure $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ issu du point O. Réponse (c).

.....

10.16 a) On a $\tan(\theta) = \dfrac{r}{f'}$; donc $r = f' \tan(\theta)$.

.....

10.16 b) On a $p_0 = \dfrac{2ne\cos(0)}{\lambda} = \dfrac{2ne}{\lambda}$. Donc, $p_0 = \dfrac{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}{6{,}43 \times 10^{-7}} = 1\,555{,}2$.

.....

10.16 d) Lorsque θ augmente, $\cos(\theta)$ diminue donc p diminue aussi. Le premier anneau brillant correspond au premier entier de p plus petit que $p_0 = 1\,555{,}2$. Donc $p_1 = 1\,555$.

.....

10.16 e) On a $r_1 = f' \tan(\theta_1) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_1\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_1 = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1555 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 8{,}22\,\mathrm{mm}.$$

.....

10.16 f) Pour voir le deuxième anneau brillant, il faut que θ augmente encore donc que p diminue d'un entier : on a donc $p_2 = 1\,554$.

.....

10.16 g) On a $r_2 = f' \tan(\theta_2) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_2\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_2 = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1554 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 19{,}7\,\mathrm{mm}.$$

.....

10.16 h) On a $p_{10} = 1\,555 - 9 = 1\,546$ et $r_{10} = f' \tan(\theta_{10}) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_{10}\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_{10} = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1546 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 5{,}47\,\mathrm{cm}.$$

.....

Fiche n° 11. Interférences à N ondes

Réponses

11.1 a) ..... (c)

11.1 b) ..... $2(1+\cos\theta)$

11.1 c) ..... (b)

11.1 d) ..... $2(1-\cos\theta)$

11.2 a) ..... $2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$

11.2 b) ..... $4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

11.3 a) ..... $2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$

11.3 b) ..... $4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

11.4 a) ..... $\dfrac{1}{(1-R)^2}$

11.4 b) ..... $\dfrac{4R}{(1-R)^2}$

11.5 a) 2

11.5 b) ..... θ

11.5 c) ..... $-\theta$

11.6 1

11.7 a) ..... $a=3$

11.7 b) ..... $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

11.7 c) ..... $a=5$

11.7 d) ..... $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\varphi}$

11.8 ..... 1,67 µm

11.9 a) ..... (b)

11.9 b) ..... 1 200 traits/mm

11.10 ..... $-19{,}1°$

11.11 a) ..... $[14{,}1°;24{,}5°]$

11.11 b) ..... $[29{,}1°,56{,}0°]$

11.11 c) ..... $[46{,}8°;79{,}4°]$

11.11 d) ..... (c)

11.12 a) ..... $1-\cos^2(\varphi)$

11.12 b) ..... $\dfrac{1}{2}(1-\cos(\varphi))$

11.12 c) ..... $2I_0(1+\cos(\varphi))$

11.13 a) ..... (d)

11.13 b) ..... (d)

11.13 c) ..... (b)

11.13 d) ..... (b)

11.14 ..... (c)

11.15 a) ..... π

11.15 b) 2π

11.15 c) ..... $\dfrac{2\pi}{N}$

11.15 d) ..... (a)

11.16 a) 1

11.16 b) ..... $N-1$

11.16 c) 10

11.17 a) ..... (c)

11.17 b) ..... $\dfrac{4\pi}{N}$

11.18 a) ..... $x=p$ et $y=a_0\sin(\theta')$

11.18 b) ..... 0,534 µm

11.18 c) ..... 534 nm

11.19 a) ..... (c)

11.19 b) ..... (c)

11.19 c) ..... (c)

11.19 d) ..... (c)

11.20 a) ..... $\dfrac{6\pi}{\lambda}a$

11.20 b) ..... $\dfrac{\pi}{\lambda}a$

11.20 c) ..... $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin\theta}$

11.21 1,69

11.22 a) ..... $\dfrac{3\pi}{N}$

11.22 b) 0,05

Corrigés

11.1 a) On a : $\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = (1 + \cos\theta) + \mathrm{j}\sin\theta$. Ainsi,

$$\underline{Z}_1^* = (1 + \cos(\theta)) - \mathrm{j}\sin(\theta) = (1 + \cos(-\theta)) + \mathrm{j}\sin(-\theta) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

.....

11.1 b) On a : $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \times \left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right) = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$. Ainsi, $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = 2(1 + \cos(\theta))$.

.....

11.1 c) On a : $\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = (1 - \cos(-\theta)) - \mathrm{j}\sin(-\theta)$.

Ainsi, $\underline{Z}_2^* = (1 - \cos(-\theta)) + \mathrm{j}\sin(-\theta) = (1 - \cos(\theta)) - \mathrm{j}\sin(\theta) = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$.

.....

11.1 d) On a : $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right) \times \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) = 2 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$. Ainsi, $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = 2(1 - \cos(\theta))$.

.....

11.2 a) On a : $\underline{Z}_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi, $\underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$.

.....

11.2 b) On a : $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

.....

11.3 a) On a $\underline{Z}_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi, $\underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$.

.....

11.3 b) On a : $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = \left(2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times \left(-2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

.....

11.4 a) On a $\underline{s}\underline{s}^* = \dfrac{1}{1 - R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}} \times \dfrac{1}{1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{1}{1 + R^2 - R(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})} = \dfrac{1}{1 + R^2 - 2R(\cos\varphi)}$.

Or, $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2)$. Ainsi,

$$\underline{s}\underline{s}^* = \frac{1}{1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2(\varphi/2))} = \frac{1}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{(1-R)^2}\frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\varphi/2)}.$$

Par identification, on trouve $a = \dfrac{1}{(1-R)^2}$ et $m = \dfrac{4R}{(1-R)^2}$.

.....

11.5 a) On sait que $\cos(\theta') = \cos(\theta) \implies \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = -\theta + 2k'\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.

Les valeurs $k = 0$ et $k' = 0$ sont les seules permettant de respecter l'ensemble de définition de θ'. Nous en déduisons $\theta' = \{-\theta, \theta\}$.

Il y a donc deux éléments dans l'ensemble des solutions.

.....

11.5 b) On a $\theta \in [-90°, 0°]$. Ainsi, $\theta < -\theta$. Le plus petit élément de l'ensemble des solutions est θ.

.....

11.5 c) Le plus grand élément de l'ensemble des solutions est $-\theta$.

.....

11.6 On sait que $\sin(\theta') = \sin(\theta) \Rightarrow \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = \pi - \theta + 2k'\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.
Il existe une seule possibilité pour avoir une solution comprise dans l'intervalle $[-90°, 90°]$. Nous en déduisons $\theta' = \{\theta\}$. Il y a qu'un élément dans l'ensemble des solutions.

.....

11.7 a) On a $\underline{s}(\varphi) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\right)$. Ainsi, $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\sin\left(3\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$.

Nous en déduisons $a = 3$ et $\underline{f}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

.....

11.7 c) On a $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{4\mathrm{j}\varphi}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{1-\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\right)$.

Ainsi, $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\sin\left(5\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$. Nous en déduisons $a = 5$ et $\underline{f}(\varphi) = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}$.

.....

11.8 On a $a = \dfrac{1\,\mathrm{mm}}{600\,\mathrm{traits}} = \dfrac{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{600\,\mathrm{traits}} = 1{,}67\,\mu\mathrm{m}$.

.....

11.9 a) On a $1\,\mathrm{pied} = \dfrac{1\,\mathrm{yard}}{3}$ et $1\,\mathrm{inch} = \dfrac{1\,\mathrm{pied}}{12}$. De plus, $1\,\mathrm{inch} = \dfrac{1\,\mathrm{yard}}{3\times12} = \dfrac{91{,}44\,\mathrm{cm}}{3\times12}$, donc $1\,\mathrm{inch} = 25{,}4\,\mathrm{mm}$.

.....

11.9 b) La linéature du réseau vaut $n = \dfrac{30\,000\,\mathrm{traits}}{1\,\mathrm{inch}} = \dfrac{30\,000\,\mathrm{traits}}{25{,}4\,\mathrm{mm}}$, soit $n = 1\,200\,\mathrm{traits/mm}$.

.....

11.10 En observant l'ordre $p = 1$ sous émergence normale, on a $\theta = 0$.
On en déduit $\sin(\theta_0) = -1\times\dfrac{600\,\mathrm{traits}}{1\,\mathrm{mm}}\times546{,}1\,\mathrm{nm} = -\dfrac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}$ d'où $\theta_0 = -19{,}1°$.

.....

11.11 a) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 1 s'étale entre les angles : $\theta_1^{\min}$ tel que

$$\sin(\theta_1^{\min}) = 1\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_1^{\min} = 14{,}1°$$

et $\theta_1^{\max}$ tel que

$$\sin(\theta_1^{\max}) = 1\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times690{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_1^{\max} = 24{,}5°.$$

.....

11.11 b) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 2 s'étale entre les angles $\theta_2^{\min}$ tel que

$$\sin(\theta_2^{\min}) = 2\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_2^{\min} = 29{,}1°$$

et $\theta_2^{\max}$ tel que

$$\sin(\theta_2^{\max}) = 2\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times690{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_2^{\max} = 56{,}0°.$$

.....

11.11 c) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 3 s'étale entre les angles :
$\theta_3^{\min}$ tel que

$$\sin(\theta_3^{\min}) = 3\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_3^{\min} = 46{,}8°$$

et $\theta_3^{\max}$ tel que

$$\sin(\theta_3^{\max}) = 3\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_3^{\max} = 79{,}4°.$$

Pour les longueurs d'onde supérieures à $546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}$, l'angle de diffraction n'est pas défini. Les raies correspondantes ne sont donc pas observables.

.....

11.11 d) Compte tenu des angles limites des spectres précédents, on constate un premier chevauchement des ordres dès l'ordre 2, pour les longueurs d'onde λ telles que : $3 \times n \times \lambda \leqslant 2 \times n \times 690{,}7 \times 10^{-9}$, soit pour $\lambda \leqslant 460{,}5\,\text{nm}$. Ainsi, les trois premières raies du mercure diffractées dans l'ordre 3 se mélangent avec le spectre d'ordre 2. La bonne réponse est la réponse (c).

.....

11.12 a) Comme $N = 2$, on a $\sin^2\left(N\dfrac{\varphi}{2}\right) = \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$.

.....

11.12 b) Comme $\cos(\varphi) = \cos^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$, on a $\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(\varphi))$.

.....

11.12 c) On a

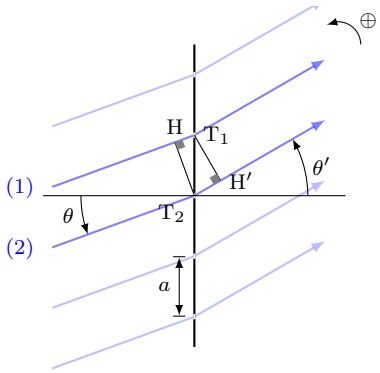
$$I = 2I_0\frac{1-\cos^2(\varphi)}{1-\cos(\varphi)} = 2I_0\frac{(1-\cos(\varphi))(1+\cos(\varphi))}{(1-\cos(\varphi))} = 2I_0(1+\cos(\varphi)).$$

Nous retrouvons la formule de Fresnel donnant l'expression de l'intensité pour un interféromètre à deux ondes.

.....

11.13 a)

La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à : $\delta_A = \left[T_2H'\right] - [HT_1]$.
Notons par ailleurs que θ et θ' sont deux angles positifs au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle θ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_2H'\right] = a\sin\left(\theta'\right)$
Conclusion : $\delta_A = a\left(\sin\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\right)$.



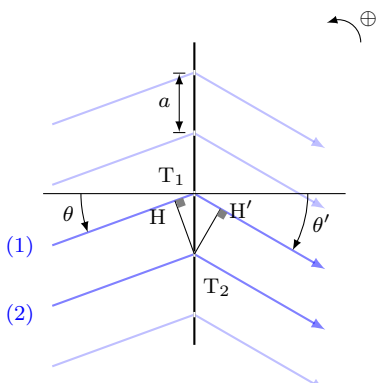
.....

11.13 b)

La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à :

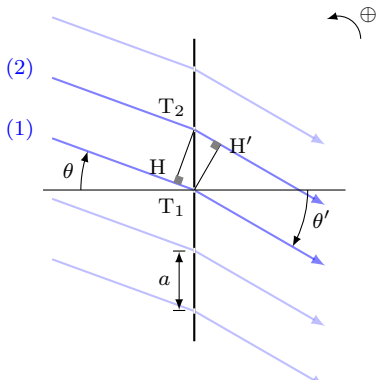
$$\delta_B = -[HT_1] - \left[T_1H'\right].$$

Notons par ailleurs que θ est un angle positif alors que θ' est négatif au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle θ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_1H'\right] = a\sin\left(|\theta'|\right) = -a\sin\left(\theta'\right)$
Conclusion : $\delta_B = a\left(\sin\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\right)$.



.....

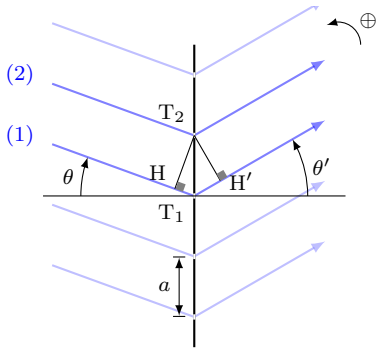
11.13 c)



La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à : $\delta_C = \left[T_2H'\right] - [HT_1]$.
Notons par ailleurs que θ et θ' sont négatifs au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $|\theta|$ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(|\theta|) = -a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_2H'\right] = a\sin\left(|\theta'|\right) = -a\sin\left(\theta'\right)$
Conclusion : $\delta_C = a\left(\sin(\theta) - \sin\left(\theta'\right)\right)$.

.....

11.13 d)



La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à :

$$\delta_D = -[HT_1] - \left[T_1H'\right].$$

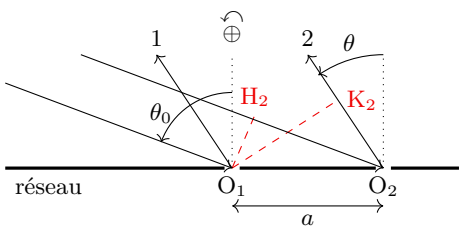
Notons par ailleurs que θ est un angle négatif alors que θ' est positif au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $|\theta|$ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(|\theta|) = -a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_1H'\right] = a\sin\left(\theta'\right)$.
Conclusion : $\delta_D = a\left(\sin(\theta) - \sin\left(\theta'\right)\right)$.

.....

11.14

Notons H_2 le projeté orthogonal de O_1 sur le rayon incident 2 et K_2 le projeté orthogonal de O_1 sur le rayon émergent 2.

En application du théorème de Malus - Dupin, les chemins optiques de moins l'infini jusqu'à O_1 sur le rayon 1 et de moins l'infini jusqu'à H_2 sur le rayon 2 sont identiques.



Il en est de même pour les chemins optiques de O_1 jusqu'à l'infini sur le rayon émergent 1 avec celui de K_2 jusqu'à l'infini sur le rayon émergent 2.

La différence de marche du rayon 2 par rapport au rayon 1 vaut donc : $\delta_{2/1} = n_{air}[H_2O_2 + K_2O_2]$.

Compte tenu des angles sur la figure, on a : $H_2O_2 = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \sin(\theta_0)$ et $K_2O_2 = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$.

On en déduit $\delta_{2/1} = a(\sin(\theta_0) + \sin(\theta))$, soit la réponse (c).

.....

11.15 a) La fonction $\sin(x)$ est 2π-périodique en x mais $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, d'où $\sin^2(x+\pi) = \sin^2(x)$, montrant que la fonction $\sin^2(x)$ est π-périodique en x.

.....

11.15 b) Posons $x = \frac{\phi}{2}$. La fonction $\sin^2(x)$ est π-périodique en x, donc 2π-périodique en variable ϕ.

.....

11.15 c) Posons $x = \frac{N\phi}{2}$. La fonction $\sin^2(x)$ est π-périodique en x, donc $\frac{2\pi}{N}$ périodique en variable ϕ.

.....

11.15 d) La période de la fonction réseau est le p.p.c.m. des périodes des fonctions $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, soit le p.p.c.m. de 2π et de $\frac{2\pi}{N}$. La fonction réseau est donc 2π-périodique en variable ϕ.

.....

11.16 a) Quand $\phi \to 0$, la fonction réseau présente une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. On lève cette indétermination en formant un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 1.

D'où $\mathcal{R}_N(\phi) \sim \left(\frac{\frac{N\phi}{2}}{N\frac{\phi}{2}}\right)^2 = 1$. La fonction réseau admet une limite finie en 0. On la prolonge par continuité en posant $\mathcal{R}_N(0) = 1$. La fonction réseau est alors continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

.....

11.16 b) La fonction réseau s'annule pour $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right) = 0$ avec $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \neq 0$, soit pour $\frac{N\phi}{2} = q\pi$ avec $\phi \neq 0$ et $\phi \neq 2\pi$. Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ les zéros de la fonction réseau correspondent aux valeurs $\phi = q\frac{2\pi}{N}$, avec q entier compris entre 1 et $(N-1)$, soit $N-1$ valeurs par période.

.....

11.16 c) On sait qu'on a $(N-1)$ zéros de la fonction réseau sur une période, soit ici 9 valeurs. On a donc $N = 10$.

.....

11.17 a) Le terme $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$ s'annule la première fois après $\phi = 0$ pour $\frac{N\phi}{2} = \pi$, soit pour $\phi = \frac{2\pi}{N}$, d'où la réponse (c).

.....

11.17 b) Plaçons-nous autour du pic principal en $\phi = 0$. Les premiers zéros autour de $\phi = 0$ sont obtenus pour $\phi = \pm\frac{2\pi}{N}$ d'où $\delta\phi = \frac{4\pi}{N}$.

.....

11.18 a) L'équation $y = ax + b$ est une modélisation de la relation $a_0 \sin\theta' = p\lambda$.

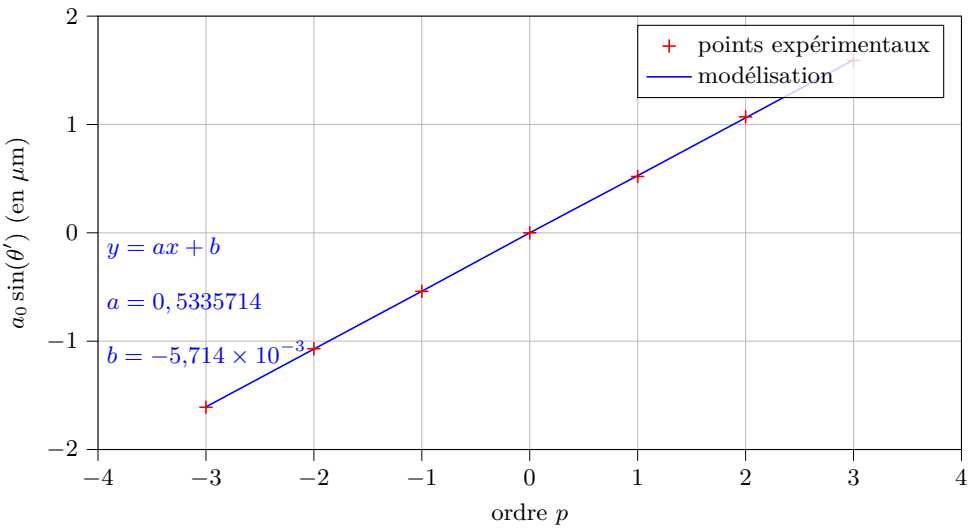
Par identification, on trouve $x = p$ et $y = a_0 \sin(\theta')$.

.....

11.18 b) Afin de réaliser la régression linéaire, il est nécessaire d'établir le tableau suivant :

p	-3	-2	-1	0	1	2	3
$a_0 \sin(\theta')$ (en µm)	$-1{,}61$	$-1{,}07$	$-0{,}54$	0	$0{,}52$	$1{,}07$	$1{,}59$

Il ne reste qu'à faire la régression linéaire à la calculatrice.



La quantité $a_0 \sin(\theta)$ est homogène à une longueur alors que p est sans dimension. Ainsi, a est homogène à une longueur.
On a $a = 0{,}534\,\mu\text{m}$.

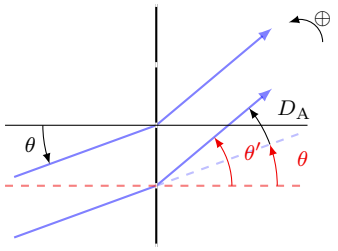
.....

11.18 c) Par identification $\lambda = a = 0{,}534\,\mu\text{m} = 534\,\text{nm}$.

.....

11.19 a)

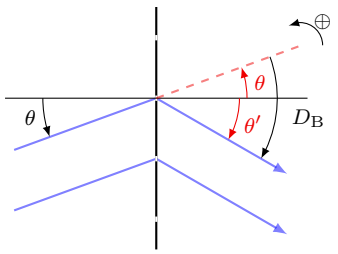
Les angles D, θ et θ' sont positifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\text{A}| = |\theta'| - |\theta|$.
Ainsi, $D_\text{A} = \theta' - \theta$.



.....

11.19 b)

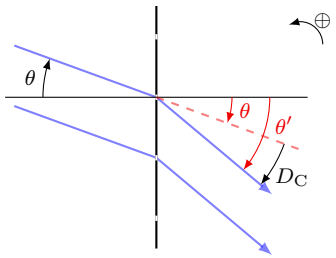
L'angle θ est positif alors que θ' et D sont négatifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\text{B}| = |\theta'| + |\theta|$.
Ainsi, $D_\text{B} = \theta' - \theta$.



.....

11.19 c)

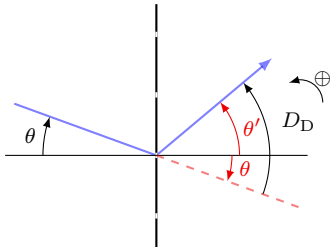
L'angle θ est positif alors que θ' et D sont négatifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_{\mathrm{C}}| = |\theta'| - |\theta|$.
Ainsi, $D_{\mathrm{C}} = \theta' - \theta$.



.....

11.19 d)

L'angle θ est négatif alors que θ' et D sont positifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_{\mathrm{D}}| = |\theta'| + |\theta|$.
Ainsi, $D_{\mathrm{D}} = \theta' - \theta$.



.....

11.20 a) On a $\underline{s}(\theta) = \sum_{k=0}^{5} \mathrm{e}^{k\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{6\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{6\pi}{\lambda}a\sin(\theta)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin(\theta)\right)}\right)$. Ainsi, $\alpha = \dfrac{6\pi}{\lambda}a$.

.....

11.20 b) Par identification $\beta = \dfrac{\pi}{\lambda}a$.

.....

11.20 c) Par identification $\underline{g}(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}$.

.....

11.21 Plaçons nous autour du pic principal en $\phi = 0$. On cherche ϕ tel que $\mathcal{R}_N(\phi) = \dfrac{1}{2}$. Soit encore en considérant que $\phi \ll 1$, $\left(\dfrac{\frac{N\phi}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{N\phi}{2}\right)^3}{\frac{N\phi}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, qui donne $1 - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en tire $\phi = \pm\dfrac{2}{N}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, qui donne : $\Delta\phi_{1/2} = \dfrac{4}{N}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ On en déduit la valeur de α cherchée : $\alpha = \dfrac{4}{\pi}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ soit $\alpha \approx 1{,}69$.

.....

11.22 a) On observe que le premier maximum secondaire est à peu près à mi distance entre les deux premiers zéros de la fonction réseau après un pic principal, soit entre $\dfrac{2\pi}{N}$ et $\dfrac{4\pi}{N}$. On peut donc évaluer la position du premier maximum secondaire pour $\dfrac{3\pi}{N}$.

.....

11.22 b) On calcule pour $\phi = \dfrac{3\pi}{N}$, $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi N}{2N}\right)}{N\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)}\right)^2 = \left(\dfrac{-1}{\frac{3\pi}{2}}\right)^2$ en tenant compte du fait que $N \gg 1$ (qui donne $\sin(x) \sim x$) et avec $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$. Il reste $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{2}{3\pi}\right)^2$, soit $\mathcal{R}_N(\phi) \approx 0{,}05$. Notons que la valeur du premier maximum secondaire est indépendante de celle de N et représente moins de 5% de la valeur d'un pic principal. Seuls les pics principaux sont visibles.

.....

Fiche n° 12. Outils mathématiques pour la diffusion

Réponses

12.1 a) ..... $\boxed{abc}$

12.1 b) ..... $\boxed{abc\sin(\alpha)}$

12.1 c) ..... $\boxed{\pi r^2 h}$

12.1 d) ..... $\boxed{\pi r^2 h\cos(\alpha)}$

12.2 a) ..... $\boxed{\text{negatif}}$

12.2 b) ..... $\boxed{\text{positif}}$

12.2 c) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.2 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.2 e) ..... $\boxed{\text{a}}$

12.2 f) ..... $\boxed{\text{c}}$

12.3 a) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi rh}{3}}$

12.3 b) ..... $\boxed{\dfrac{\pi r^2}{3}}$

12.3 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

12.4 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

12.4 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.4 c) ..... $\boxed{\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}}$

12.4 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.4 e) ..... $\boxed{\text{a et c}}$

12.5 a) ..... $\boxed{n(x,t) = j_0 x + n_0}$

12.5 b) ..... $\boxed{n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L}x + n_0}$

12.5 c) ..... $\boxed{\dfrac{p}{2}x(x-L) + n_0}$

12.6 a) ..... $\boxed{n(x,t) = n_0 \exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)}$

12.6 b) ..... $\boxed{n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}}$

12.6 c) ..... $\boxed{n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)}$

Corrigés

12.2) Le point B est au niveau d'un col de la fonction $f(x,y)$. À partir du point B, en se déplaçant dans la direction y croissant en gardant x fixe à $x = x_\text{B}$, la quantité $f(x_\text{B}, y)$ décroît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à y est donc négative. De même, en se déplaçant dans la direction x croissant à y fixe à $y = y_\text{B}$, la quantité $f(x, y_\text{B})$ croît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à x est donc positive.

.....

12.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial h} > \frac{\partial V}{\partial r} \iff \frac{\pi r^2}{3} > \frac{2\pi rh}{3} \iff r > 2h.$$

.....

12.4 a) Il faut sommer la surface du fond de la casserole et la surface latérale.

.....

12.4 b) C'est le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

12.4 c) Il faut utiliser les deux résultats précédents.

12.4 d) On fait varier le rayon R pour une valeur de V fixée à V_0. La notation $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R, V_0)$ n'est pas adéquate, la notation « d » étant réservée aux fonctions d'une seule variable.

12.4 e) Pour minimiser la surface on cherche : $\left(\dfrac{\partial S}{\partial R}\right)_{V_0} = 2\pi R + 2V(-\dfrac{1}{R^2}) = 0$, soit $V = \pi R^3$. Or $V = \pi R^2 H$, on en déduit donc $R = H$ par identification. On peut vérifier dans sa cuisine que cela correspond bien au choix « standard » des industriels.

12.5 c) Par intégration successives on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = px + A \quad \text{donc} \quad n(x,t) = \frac{px^2}{2} + Ax + B.$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} n(0,t) = B & = n_0 \\ n(L,t) = \dfrac{pL^2}{2} + AL + B & = n_0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} B & = n_0 \\ A & = -\dfrac{pL}{2}. \end{cases}$$

La fonction n s'écrit alors :

$$n(x,t) = \frac{px^2}{2} - \frac{pL}{2}x + n_0 = \frac{p}{2}x(x-L) + n_0.$$

12.6 b) On a une fonction qui dépend que de t. On sépare les variables, en écrivant

$$-\frac{\mathrm{d}n}{n^2} = \frac{\mathrm{d}t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}\Big(\frac{1}{n}\Big) = \mathrm{d}\Big(\frac{t}{n_cT}\Big).$$

On intègre :

$$\frac{1}{n(t)} - \frac{1}{n_0} = \frac{t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad n(t) = \frac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c\tau}}.$$

12.6 c) On a une équation différentielle sur t : $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) + \dfrac{n(x,t)}{\tau} = p$. C'est une équation linéaire dont la solution est de la forme $n(x,t) = A\exp\Big(-\dfrac{t}{\tau}\Big) + p\tau$. La condition initiale impose $n(x,0) = n_0\Big(1 - \dfrac{x}{L}\Big)$. On a donc

$$A = n_0\Big(1 - \frac{x}{L}\Big) - p\tau = A(x).$$

La solution est donc de la forme :

$$n(x,t) = n_0\Big(1 - \frac{x}{L}\Big)\exp\Big(-\frac{t}{\tau}\Big) + p\tau\Big(1 - \exp\Big(-\frac{t}{\tau}\Big)\Big).$$

Fiche n° 13. Diffusion particulaire

Réponses

13.1 a) $\boxed{\mathrm{d}\tau = \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t}$

13.1 b) $\boxed{\mathrm{d}^2N = \left(n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t}$

13.1 c) $\boxed{\mathrm{d}\Phi = n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$

13.1 d) $\boxed{\vec{j}(M,t) = n(M,t)\vec{v}(M,t)}$

13.1 e) $\boxed{\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$

13.2 a) $\boxed{\text{a}}$

13.2 b) $\boxed{\text{b}}$

13.2 c) $\boxed{\text{c}}$

13.2 d) $\boxed{\delta N = -\dfrac{\partial j}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.3 a) $\boxed{\text{c}}$

13.3 b) $\boxed{-\oiint_S \vec{j}(P,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\times\mathrm{d}t}$

13.4 a) $\boxed{\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\sqrt{\dfrac{t}{a}}}$

13.4 b) $\boxed{N = \dfrac{K}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{erf}(+\infty)}$

13.4 c) $\boxed{\alpha = \dfrac{K}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}}$

13.5 a) $\boxed{(A,B) = (1,1)}$

13.5 b) $\boxed{n = \dfrac{n_c}{1+\left(\dfrac{n_c}{n_0}-1\right)\exp\left(-\dfrac{t}{T}\right)}}$

13.6 a) $\boxed{\alpha^2 D - \beta = 0}$

13.6 b) $\boxed{-\dfrac{2D}{\delta^2}+\omega = 0}$

13.6 c) $\boxed{D = \dfrac{1}{4a}}$

13.7 a) $\boxed{\text{d}}$

13.7 b) $\boxed{\text{a}}$

13.8 a) $\boxed{46\,\text{jours}}$

13.8 b) $\boxed{\dfrac{\tau_{\text{sel}}}{\tau}\approx 5}$

13.9 a) $\boxed{\text{Vanilline}}$

13.9 b) $\boxed{\text{Géraniol}}$

13.9 c) $\boxed{\text{Limonène}}$

13.10 b) $\boxed{\text{b}}$

13.10 c) $\boxed{B\approx 1\times10^4}$

13.10 d) $\boxed{L\approx 4\times10^{-9}\,\text{m}}$

13.10 e) $\boxed{L\approx 1\times10^{-4}\,\text{m}}$

13.10 f) $\boxed{L\approx 8\times10^{-4}\,\text{m}}$

13.11 $\boxed{n_c\dfrac{T_2}{T_1}}$

13.12 a) $\boxed{\text{a}}$

13.12 b) $\boxed{\text{b}}$

13.12 c) $\boxed{\text{d}}$

13.13 a) $\boxed{N(t) = n(x,t)S\,\mathrm{d}x}$

13.13 b) $\boxed{\mathrm{d}N = \dfrac{\partial n}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.13 c) $\boxed{\text{a}}$

13.13 d) $\boxed{\text{b}}$

13.13 e) $\boxed{\text{c}}$

13.13 f) $\boxed{\mathrm{d}N = -\dfrac{\partial j}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.13 g) $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}}$

13.13 h) ..... $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$

13.14 a) ..... $\boxed{\mathrm{d}N = \dfrac{\partial n}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.14 b) ..... (a)

13.14 c) ..... (b)

13.14 d) ..... (c)

13.14 e) ..... $\boxed{\delta N = -\dfrac{\partial j}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sigma(x,t) S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.14 f) ..... $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x} + \sigma}$

13.14 g) ..... $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma}$

13.15 a) ..... $\boxed{N(t) = \iiint_V n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau}$

13.15 b) ..... $\boxed{\mathrm{d}N = \left(\iiint_V \dfrac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau\right) \times \mathrm{d}t}$

13.15 c) ..... (c)

13.15 d) ..... (d)

13.15 e) ..... (a)

13.15 f) ..... (b)

Corrigés

13.1 a) On a $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S_M \times v\,\mathrm{d}t \times \cos\theta = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$.

.....

13.1 b) On a $\mathrm{d}^2N = n\,\mathrm{d}\tau = n \times \mathrm{d}S_M \times v\,\mathrm{d}t \times \cos\theta = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t = \left(n\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right) \times \mathrm{d}t$.

.....

13.1 c) On a $\mathrm{d}^2N = \mathrm{d}\Phi \times \mathrm{d}t$.

.....

13.1 d) Par identification de $\vec{j}$ dans la relation rappelée dans l'énoncé.

.....

13.1 e) La grandeur n est un nombre de particules par mètre cube.

.....

13.2 a) On suppose $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j}$ constant entre t et $t+\mathrm{d}t$.

.....

13.2 b) On compte positivement les particules entrant dans le système et négativement celles qui en sortent.

.....

13.2 c) La diffusion a lieu ici suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$, il n'y a donc pas de transfert de particules au niveau de la surface latérale (ce qui se traduit par le fait que localement $\vec{j}$ et la surface considérée soient orthogonaux).

.....

13.2 d) Les transferts de particules se font au niveau des sections situées en x et $x+\mathrm{d}x$: on a

$$\delta N = (j(x) - j(x+\mathrm{d}x))\cdot S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j}{\partial x} S\,\mathrm{d}x \times \mathrm{d}t.$$

.....

13.3 a) Il faut intégrer le flux élémentaire sur toute la surface fermée en prenant en compte le fait que $\vec{j}$ n'est *a priori* pas uniforme sur la surface. On multiplie ensuite ce flux (supposé constant sur un temps court) par la durée $\mathrm{d}t$ considérée.

.....

13.3 b) Les particules quittant le volume constituent une perte.

.....

13.4 b) Le changement de variable $u = x\sqrt{\dfrac{a}{t}}$ donne $u^2 = \dfrac{ax^2}{t}$. Le nombre total de particules dopantes s'écrit donc à chaque instant :

$$N = \int_0^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u \sqrt{\frac{t}{a}} = \int_0^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{a}} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u = \frac{K}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{erf}(+\infty).$$

.....

13.5 a) On met les deux termes au même dénominateur :

$$\frac{A(n_c - n) + Bn}{n(n_c - n)} = \frac{An_c + (B - A)n}{n(n_c - n)}.$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut donc vérifier le système : $\begin{cases} A & = 1 \\ B - A & = 0. \end{cases}$ On trouve $A = B = 1$.

.....

13.5 b) On a

$$\int_{n_0}^{n(t)} \frac{n_c \,\mathrm{d}n}{n(n_c - n)} = \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n}{n} + \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n}{(n_c - n)} = \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n}{n} - \int_{n_0}^{n(t)} \frac{-\,\mathrm{d}n}{(n_c - n)}$$

$$= \ln\left(\frac{n(t)}{n_0}\right) - \ln\left(\frac{n_c - n(t)}{n_c - n_0}\right) = \ln\left(\frac{(n_c - n_0)n(t)}{n_0(n_c - n(t))}\right) = \ln\left(\frac{(n_c - n_0)}{n_0\left(\dfrac{n_c}{n(t)} - 1\right)}\right)$$

On peut alors isoler $n(t)$: on a $n(t) = \dfrac{n_c}{1 + \left(\dfrac{n_c}{n_0} - 1\right)\exp\left(-\dfrac{t}{T}\right)}$.

.....

13.6 a) On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \beta n(x,t) \qquad \frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = \alpha n(x,t) \qquad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = \alpha^2 n(x,t).$$

En injectant dans l'équation de diffusion, on trouve $\alpha^2 D - \beta = 0$.

.....

13.6 b) On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\omega n_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right), \qquad \frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{\delta}n(x,t) + \frac{n_0}{\delta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

et
$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{\delta}\left(-\frac{1}{\delta}n(x,t) + \frac{n_0}{\delta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$
$$- \frac{n_0}{\delta^2}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \frac{n_0}{\delta^2}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$
$$= -\frac{2n_0}{\delta^2}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

En injectant dans l'équation de diffusion, on trouve $-\dfrac{2D}{\delta^2} + \omega = 0$ soit $\delta = \pm\sqrt{\dfrac{2D}{\omega}}$.

.....

13.6 c) On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = -\frac{K}{t^{3/2}} 2ax \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$$
$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{K}{t^{3/2}} 2a \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) + \frac{K}{t^{5/2}} 4a^2x^2 \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$$
$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\frac{K}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) + \frac{K}{t^{5/2}} ax^2 \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right).$$

En injectant dans l'équation de diffusion, on trouve $D = \dfrac{1}{4a}$.

.....

13.7 a) En notant $n^\star$ l'ordre de grandeur de n, l'équation de la diffusion donne : $\dfrac{n^\star}{\tau} = D\dfrac{n^\star}{L^2}$.

.....

13.7 b) En notant $n^\star$ l'ordre de grandeur de n, l'équation de la diffusion donne : $\dfrac{n^\star}{\tau} = D\dfrac{n^\star}{L^2}$.

.....

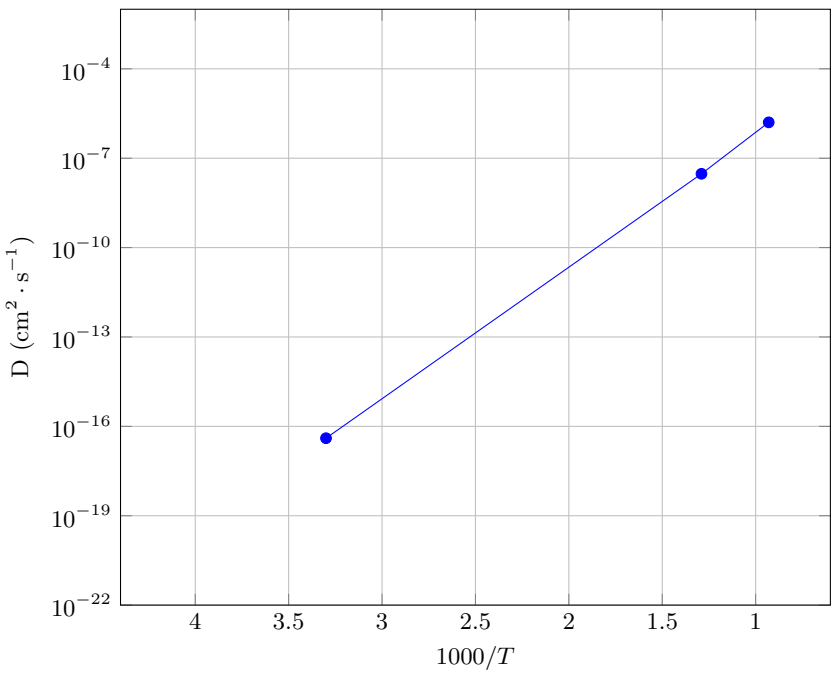
13.8 a) On trouve un temps caractéristique de diffusion de l'ordre de $\tau = 4 \times 10^6\,\text{s} \approx 46\,\text{jours}$! Mieux vaut « mélanger » son café c'est-à-dire créer un transport par convection !

.....

13.8 b) On a $D_{\text{sel}} \approx 5 \times D$, l'ordre de grandeur reste sensiblement le même car le milieu support est le même, mais le phénomène est plus rapide car l'entité chimique est plus petite donc plus mobile.

.....

13.10 b)



Attention à l'orientation de l'axe des abscisses : $\dfrac{1000}{T}$ est décroissant donc l'axe est bien gradué à T croissant.

L'échelle verticale est logarithmique et l'axe horizontal gradué dans le sens des $\dfrac{1000}{T}$ décroissants.

On a $y = \log(D) = \dfrac{\ln(D)}{\ln(10)}$ et $x = -\dfrac{1000}{T}$, vérifient donc une loi affine du type $y = A + B'x$, soit $\ln(D) = A - \dfrac{B}{T}$.

.....

13.10 c) On complète le tableau :

Θ (°C)	25	500	800
T (K)	298	773	1073
$\frac{1}{T}$ (K^{-1})	$3{,}4 \times 10^{-3}$	$1{,}3 \times 10^{-3}$	$9{,}3 \times 10^{-4}$
D ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	4×10^{-17}	3×10^{-8}	$1{,}6 \times 10^{-6}$
$\ln D$ (où D en $cm^2 \cdot s^{-1}$)	$-37{,}7$	$-17{,}3$	$-13{,}3$

On en déduit $B = -\dfrac{(-13,3)-(-37,7)}{9{,}3\times10^{-4}-3{,}4\times10^{-3}} = 9{,}8 \times 10^3$. On aurait aussi pu faire une régression linéaire.

.....

13.10 d) En utilisant l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique, et en convertissant en MKS, on a

$$\begin{aligned} L &\approx \sqrt{4 \times 10^{-17}\,\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}} \times (1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot cm^{-1}})^2 \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} \\ &= 2 \times \sqrt{10^{-22} \times 10} \times 60\,\mathrm{m} \approx 120 \times 3 \times 10^{-11}\mathrm{m} \approx 3{,}6 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Soit, en gardant un chiffre significatif : $L \approx 4 \times 10^{-9}$ m. La migration des atomes de carbone se fait donc à l'échelle d'une maille ($\approx 1 \times 10^{-10}$ m).

.....

13.10 e) En utilisant l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique, et en convertissant en MKS :

$$\begin{aligned} L &\approx \sqrt{3 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}} \times (1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot cm^{-1}})^2 \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} \\ &\approx 1,7 \times \sqrt{10^{-12}} \times 60\,\mathrm{m} \approx 102 \times 10^{-6}\mathrm{m} \approx 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

La migration des atomes de carbone se fait donc à l'échelle d'une maille.

.....

13.10 f) En utilisant l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique, et en convertissant en MKS :

$$\begin{aligned} L &\approx \sqrt{1{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}} \times (1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot cm^{-1}})^2 \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} \\ &\approx 1,3 \times \sqrt{10^{-10}} \times 60\,\mathrm{m} \approx 78 \times 10^{-5}\mathrm{m} \approx 7{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Soit, en gardant un chiffre significatif : $L \approx 8 \times 10^{-4}$ m. La migration des atomes de carbone se fait donc sur un grand nombre de mailles ce qui permet d'expliquer la formation des grains.

.....

13.12 a) On utilise la loi des gaz parfaits.

.....

13.12 b) En régime permanent, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}z^2} = 0$.

.....

13.12 c) On a $\Phi = jS = -D\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}S = DS\dfrac{n_0}{L}$. On remarque que Φ est indépendant de z puisque l'on est en régime permanent.

.....

13.13 a) On suppose la tranche suffisamment fine pour considérer la densité particulaire uniforme.

.....

13.13 b) De même, on a $N(t+\mathrm{d}t) = S\,\mathrm{d}x n(x, t+\mathrm{d}t)$.

.....

13.13 c) On suppose $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j}$ constant entre t et $t+\mathrm{d}t$.

13.13 d) On compte positivement les particules entrant dans le système et négativement celles qui en sortent.

13.13 e) Il n'y a pas de transfert de particules au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\vec{j}$ et de la surface considérée.

13.13 f) Les transferts de particules se font au niveau des sections situées en x et $x+\mathrm{d}x$.

13.13 g) On a $\mathrm{d}N = \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

13.13 h) On a $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$.

13.14 a) Même raisonnement que précédemment.

13.14 b) On suppose $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j}$ constant entre t et $t+\mathrm{d}t$.

13.14 c) On compte positivement les particules entrant dans le système et négativement celles qui en sortent.

13.14 d) Il n'y a pas de transfert de particules au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\vec{j}$ et de la surface considérée.

13.14 e) Les transferts de particules se font au niveau des sections situées en x et $x+\mathrm{d}x$.

13.14 f) On a $\mathrm{d}N = \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sigma(x,t) S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

13.14 g) On a $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$.

13.15 a) Le nombre de particules dans le volume $d\tau$ est $n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$.

13.15 b) On a $\mathrm{d}N = N(t+\mathrm{d}t) - N(t) = \iiint_V n(M,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\tau - \iiint_V n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$.

13.15 c) Il faut intégrer le flux élémentaire sur toute la surface fermée.

13.15 d) Attention : $n_{\mathrm{prod}}(\mathrm{M},t)$ n'est pas forcément uniforme.

13.15 e) Les particules quittant le volume V constituent une perte pour le système.

13.15 f) Attention aux conventions de signe.

Fiche n° 14. Diffusion thermique

Réponses

14.1 a) ..... (d)

14.1 b) ..... (b)

14.1 c) ..... (c)

14.1 d) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

14.1 e) ..... (b)

14.1 f) ..... (a)

14.1 g) ..... (c)

14.1 h) ..... $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

14.2 a) ..... (a)

14.2 b) ..... (a)

14.2 c) ..... (b)

14.3 a) ..... $\sqrt{2}$

14.3 b) ..... $1/\sqrt{2}$

14.3 c) 4

14.3 d) 2

14.4 a) ..... (a)

14.4 b) ..... 2×10^{-3}

14.4 c) ..... Oui

14.5 a) ..... $T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

14.5 b) ..... (b) et (c)

14.5 c) ..... (a)

14.6 a) ..... (b)

14.6 b) ..... (c)

14.6 c) ..... (d)

14.6 d) ..... (a)

14.7 a) ..... (a)

14.7 b) ..... (c)

14.7 c) ..... (c)

14.7 d) ..... en série

14.7 e) ..... $1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{W}$

14.8 ..... $\dfrac{T_1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S}$

14.9 a) ..... $4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

14.9 b) ..... $0{,}53\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

14.9 c) ..... (c)

14.9 d) ..... $3{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

14.9 e) ..... $47{,}5\,\mathrm{W}$

14.10 a) ..... $0{,}7\,\mathrm{m}$

14.10 b) ..... $0{,}8\,\mathrm{m}$

14.10 c) ..... (cub., (c)) (cyl., (a)) (sph., (b))

14.10 d) ..... Sphérique

14.10 e) ..... $11\,^\circ\mathrm{C}$

14.11 ..... (c)

14.12 a) .. $\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta_i}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} (R_{\mathrm{th}} \phi_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{e}})$

14.12 b) ..... $\dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}} (\theta_{\mathrm{i}0} - \theta_{\mathrm{e}0} - \theta_{\mathrm{e}1} \cos(\omega t))$

14.13 a) ..... (a)

14.13 b) ..... (a)

14.14 ..... Les bottes de paille

14.15 a) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

14.15 b) ..... $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

14.15 c) ..... $p_{\mathrm{prod}} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

14.15 d) ..... $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{\mathrm{prod}}$

14.16 a) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

14.16 b) ..... $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

14.16 c) ..... (c)

14.16 d) ... $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h \dfrac{p}{S} (T(x,t) - T_{\mathrm{ext}})$

14.17 a) ..... (b)

14.17 b) . $\dfrac{R_{\mathrm{th}} h_1 S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}} h_1 S} T_1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}} h_1 S} T_2$

14.17 c) .. $\dfrac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S} T_1 + \dfrac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S} T_2$

14.18 a) ..... $\mathrm{d}U = 0$

14.18 b) ..... $\delta Q = 0$

14.18 c) ..... (b)

14.18 d) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \dfrac{1}{r}$

14.19 a) ..... $T(r) = T_1 + \dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \ln\left(\dfrac{r_1}{r}\right)$

14.19 b) ..... $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \dfrac{\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$

14.20 a) ..... (c)

14.20 b) ..... (b)

14.20 c) ..... $\dfrac{\lambda \,\mathrm{d}z r \,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$

14.20 d) ..... (b)

14.20 e) ..... $\dfrac{2\pi\lambda r \,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$

14.20 f) ..... (b)

14.20 g) ..... $\dfrac{2\pi\lambda L r}{\mathrm{d}r}$

14.20 h) ..... (a)

14.20 i) ..... $\dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}$

14.20 j) ..... $\dfrac{2\pi\lambda L}{\ln(r_2/r_1)} (T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{e}})$

14.21 a) 0

14.21 b) 0

14.21 c) ..... (b)

14.21 d) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \dfrac{1}{r^2}$

14.22 a) ..... $T_1 + \dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right)$

14.22 b) ..... $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \dfrac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$

Corrigés

14.1 a) On utilise l'analyse dimensionnelle.

.....

14.1 c) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant t, l'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

14.1 d) On exprime l'énergie interne à l'instant $t+\mathrm{d}t$: $U(t+\mathrm{d}t) = \mu cS\,\mathrm{d}xT(t+\mathrm{d}t)$ puis on calcule la différence $\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t)$.

.....

14.1 e) On considère $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j_Q}$ constant entre t et $t+\mathrm{d}t$. Le vecteur $\vec{S}$ entrant est orienté suivant $\vec{e_x}$.

.....

14.1 f) Attention aux conventions de signe ! Le vecteur $\vec{S}$ entrant est orienté dans le sens $-\vec{e_x}$.

.....

14.1 g) Il n'y a pas de transfert thermique au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\vec{j_Q}$ et de la surface considérée.

.....

14.1 h) On a $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. On peut vérifier qualitativement le signe pour éviter les étourderies.

.....

14.2 a) La situation est unidimensionnelle : la température ne dépend spatialement que de x.

.....

14.2 b) Le courant thermique $\vec{j}_Q = -\lambda\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ est donc dirigé seulement selon $\vec{e}_x$.

.....

14.2 c) La variation d'énergie interne pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}U = \mu(S\,\mathrm{d}x)c\dfrac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$. Cette variation est due au flux thermique $\Phi\,\mathrm{d}t = j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. Comme $j_Q = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$ on a :

$$\mu(S\,\mathrm{d}x)c\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

qui se simplifie en $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$. On vérifie donc l'équation de diffusion libre à une dimension sans source.

.....

14.4 a) Lorsque $\mathrm{Fo} \ll 1$, il ne s'est pas écoulé suffisamment de temps pour que la diffusion ait lieu : le processus peut être considéré comme adiabatique.

Lorsque $\mathrm{Fo} \gg 1$, suffisamment de temps s'est écoulé pour que la diffusion ait eu lieu.

.....

14.4 c) Le nombre de Fourier vaut :

$$\mathrm{Fo} = \frac{13\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}} \times 1{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{s}}{7\,800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} \times 480\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}} \times \left(5\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2} = 2\times10^{-3} \ll 1.$$

L'hypothèse d'une transformation adiabatique est donc valide.

.....

14.5 a) L'équation de la diffusion devient $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ soit $T(x) = Ax + B$. On utilise enfin les conditions limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$. Le profil de température est donc linéaire dans la barre en régime permanent.

.....

14.5 b) L'hypothèse de barre homogène permet d'affirmer que la conductivité est identique dans toute la barre. L'hypothèse de régime permanent permet d'affirmer que $\vec{j_Q}$ est à flux conservatif. L'hypothèse des parois latérales calorifugées permet d'affirmer que le flux n'est orienté que suivant $\vec{e_x}$.

.....

14.5 c) On a $\Phi(x) = \iint_S \vec{j}_Q(x) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j(x).S = -\lambda S \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$.

.....

14.6 a) La contrainte est due à l'inhomogénéité spatiale d'une grandeur intensive.

.....

14.6 b) La réponse correspond au flux d'une grandeur, le processus tendant à diminuer l'inhomogénéité spatiale liée à la contrainte.

.....

14.6 c) Le modèle proposé correspond donc au cas où l'on fait l'hypothèse d'une réponse linéaire du système.

.....

14.6 d) C'est donc une propriété intrinsèque du milieu.

.....

14.7 a) On a $R_{\mathrm{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S} = \dfrac{5 \times 10^{-3}}{1 \times 1} = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$.

.....

14.7 b) $\Delta T = 19 - 9 = 10\,°\mathrm{C}$. Le flux Φ vaut donc $\Phi = \dfrac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} = \dfrac{10}{5 \times 10^{-3}} = \dfrac{10}{5 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^3\,\mathrm{W}$.

.....

14.7 c) On a $\phi = \dfrac{T_1 - T(0)}{R_{\mathrm{th},i}} = h_1 S(T_1 - T(0))$, $\phi = \dfrac{T(L) - T_2}{R_{\mathrm{th},i}} = h_2 S(T(L) - T_2)$.

.....

14.7 d) Les différentes couches sont traversées par le même flux thermique : ainsi, les résistances thermiques sont en série.

.....

14.7 e) On a $\Phi' = \dfrac{1}{R'_{\mathrm{th}}}(T_1 - T_2)$. Les résistance thermiques sont en série ; donc

$$R'_{\mathrm{th}} = R_{\mathrm{th}} + R_{\mathrm{th},1} + R_{\mathrm{th},2} = \frac{L}{\lambda S} + 2 \times \frac{1}{hS} = 9 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

On a donc $\Phi' = \dfrac{10}{9 \times 10^{-3}} \approx 1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{W}$.

Les pertes sont presque deux fois plus faibles que dans le cas du premier modèle : des conditions limites peu réalistes peuvent conduire à surestimer fortement les pertes thermiques.

.....

14.8 Par substitution on élimine ϕ : $T_1 - T(L) = R_{\mathrm{th}} h_2 S(T(L) - T_2)$ puis on isole $T(L)$.

$$T(L) = \frac{T_1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S}.$$

.....

14.9 a) La surface du mur en brique est de $7{,}5 - 1{,}2 = 6{,}3\,\mathrm{m}^2$. La résistance de la brique est

$$R_\mathrm{b} = \frac{e_\mathrm{b}}{\lambda_\mathrm{b}(S_\mathrm{tot} - S_\mathrm{f})} = 4{,}53 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

.....

14.9 b) Celle de l'isolant est $R_\mathrm{i} = \dfrac{e_\mathrm{i}}{\lambda_\mathrm{i}(S_\mathrm{tot} - S_\mathrm{f})} = 5{,}29 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$.

.....

14.9 d) La résistance de la brique et de l'isolant sont en série ; d'où

$$R_\mathrm{mur} = R_\mathrm{b} + R_\mathrm{i} = 5{,}74 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

Les résistances R_mur et R_f sont en parallèle. La résistance équivalente du mur est alors :

$$R_\mathrm{eq} = \frac{R_\mathrm{mur} R_\mathrm{f}}{R_\mathrm{mur} + R_\mathrm{f}} = 3{,}16 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

.....

14.9 e) Pour maintenir cet écart, le système de chauffage doit fournir un flux thermique ϕ tel que

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_\mathrm{eq}} = \frac{15\,\mathrm{K}}{3{,}16 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}} = 47{,}5\,\mathrm{W}.$$

.....

14.10 c) Il faut calculer les surfaces d'échange pour les différents igloo pour identifier le dénominateur des intégrales. En notant r la variable d'espace, on a

$$S_\mathrm{cub.} = 5r^2, \qquad S_\mathrm{cyl.} = \pi r^2 + 2\pi r \times r = 3\pi r^2 \qquad \text{et} \qquad S_\mathrm{sph.} = 2\pi r^2.$$

.....

14.10 d) Toutes les résistances thermiques sont de la même forme

$$R_{\text{th}} = \int_a^{a+e} \frac{\mathrm{d}r}{\alpha r^2} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+e}\right] = \frac{e}{\alpha a(a+e)}.$$

On peut alors facilement calculer les résistances thermiques pour les différents igloo en identifiant pour chacun la valeur de α et a. D'où,

$$R_{\text{th, cub.}} = \frac{0{,}1}{5 \times 0{,}2 \times 1 \times 1{,}1} = \frac{1}{55 \times 0{,}2} = \frac{1}{11}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$
$$R_{\text{th, cyl.}} = \frac{0{,}1}{3\pi \times 0{,}2 \times 0{,}7 \times 0{,}8} = \frac{1}{52{,}1 \times 0{,}2} = \frac{1}{10{,}4}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$
$$R_{\text{th, sph.}} = \frac{0{,}1}{2\pi \times 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}9} = \frac{1}{44{,}6 \times 0{,}2} = \frac{1}{8{,}9}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

.....

14.10 e) On a $\Delta T = R_{\text{th,C}}\phi = \dfrac{100}{8{,}9} = 11{,}2\,^\circ\text{C}$.

.....

14.12 a) La loi des nœuds en terme de potentiels appliquée en N donne :

$$C_{\text{th}}\frac{\mathrm{d}\theta_{\text{i}}}{\mathrm{d}t} = \phi_{\text{i}} + \frac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_{\text{e}} - \theta_{\text{i}}) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta_{\text{i}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta_{\text{i}}}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}} = \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}(R_{\text{th}}\phi_{\text{i}} + \theta_{\text{e}}).$$

.....

14.12 b) Si θ_{i} est une constante, l'équation différentielle se simplifie en

$$\phi_{\text{i}}(t) = \frac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_{\text{i0}} - \theta_{\text{e0}} - \theta_{\text{e1}}\cos(\omega t)).$$

Le chauffage est donc en opposition de phase avec la température extérieure.

.....

14.13 b) Les résistances thermiques des isolants ⓐ et ⓑ s'écrivent respectivement :

$$R_{\text{a}} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{a}}L}\ln\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{a}}}\ln(5)\right) \qquad \text{et} \qquad R_{\text{b}} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{b}}L}\ln\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{b}}}[\ln(7) - \ln(5)]\right)$$

Les deux résistances étant en série et comme on cherche la température à l'interface entre ces deux isolants, la formule du pont diviseur de tension appliqué au potentiel donne :

$$\theta_M = 20 + \frac{R_{\text{b}}}{R_{\text{a}} + R_{\text{b}}} \times 80 = 20 + \frac{80}{1 + \dfrac{\lambda_{\text{b}}}{\lambda_{\text{a}}}\dfrac{\ln(5)}{\ln(7) - \ln(5)}} = 20 + \frac{80}{1 + 3\dfrac{1}{\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}}$$
$$= 20 + \frac{80}{1 + 3\dfrac{1}{\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}} = 20 + \frac{80}{1 + \dfrac{1}{0{,}07}} = 20 + \frac{7 \times 80}{107} \approx 25{,}2\,^\circ\text{C}.$$

.....

14.14

Isolants	Épaisseur pour $r = 7$ e (cm)	Déphasage (pour $r = 7$) $\Delta\tau$	Énergie grise surfacique $\mathcal{E}_{\text{S}}$ (kWh · m^{-2})
Fibres de bois	26	17 h 00	78
Bottes de paille	36	14 h 30	3,6
Laines minérales	21	4 h 30	50
Vermiculite	35	19 h 20	84
Polystyrène expansé	22	4 h 40	140
Polyuréthane	16	4 h 30	160

.....

14.15 a) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant t, l'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

14.15 b) Le transfert reçu en x est $\overrightarrow{j_Q}(x,t) \cdot S\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}t$. Le transfert reçu en $x + \mathrm{d}x$ est $\overrightarrow{j_Q}(x+\mathrm{d}x,t) \cdot S(-\overrightarrow{e_x})\,\mathrm{d}t$, le signe étant dû à l'orientation de $\vec{S}$. Le flux total reçu est la somme des flux précédents :

$$\Phi(x+\mathrm{d}x,t) = [j_Q(x,t) - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)]S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}xS\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

.....

14.15 c) L'énergie produite est proportionnelle au volume de la tranche et vaut $p_{\mathrm{prod}}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

14.16 a) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

14.16 b) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

14.16 d) La surface latérale vaut $p\,\mathrm{d}x$: attention à l'algébrisation.

La variation d'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ est due aux flux thermiques conductifs suivant l'axe (Ox) et conducto-convectif en radial :

$$\mathrm{d}U = \mu c\frac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h(T(x,t) - T_{ext})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

soit $\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h\dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\mathrm{ext}})$.

.....

14.17 a) Le premier graphique correspond au premier modèle ne prenant pas en compte les pertes conducto-convectives.

.....

14.17 b) À partir de la première et la troisième ligne du système on obtient :

$$h_1S(T_1 - T(0)) = h_2S(T(L) - T_2) \qquad \text{donc} \qquad T(L) = \frac{h_1}{h_2}(T_1 - T(0)) + T_2.$$

En injectant cette expression dans la seconde équation, on trouve :

$$T(0)\left[1 + \frac{h_1}{h_2}\right] - \left(\frac{h_1}{h_2}T_1 + T_2\right) = R_{\mathrm{th}}h_1S(T_1 - T(0)) \quad \text{donc} \quad T(0)\left[1 + \frac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}}h_1S\right] = \left(R_{\mathrm{th}}h_1S + \frac{h_1}{h_2}\right)T_1 + T_2$$

$$\text{donc} \quad T(0) = \frac{R_{\mathrm{th}}h_1S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}}h_1S}T_1 + \frac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}}h_1S}T_2.$$

.....

14.17 c) On fait de même pour obtenir $T(L)$: à partir de la 1e et la 3e ligne on a : $T(0) = T_1 - \dfrac{h_2}{h_1}(T(L) - T_2)$. On injecte dans la seconde équation :

$$T_1 + \frac{h_2}{h_1}T_2 - \left[1 + \frac{h_2}{h_1}\right]T(L) = R_{\text{th}}h_2S(T(L) - T_2)$$

soit :

$$T(L) = \frac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}}h_2S}T_1 + \frac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}}h_2S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}}h_2S}T_2.$$

.....

14.18 a) La quantité U est une fonction d'état. Comme on est en régime permanent, l'énergie interne du système fermé considéré est donc constante.

.....

14.18 b) En appliquant le premier principe, on a $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. Ici, il n'y a pas de travail fourni au système, donc $\delta Q = 0$.

.....

14.18 c) On a $0 = \delta Q = (\Phi(r) - \Phi(r + \mathrm{d}r))\,\mathrm{d}t$.

.....

14.18 d) La loi de Fourier donne $-\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}2\pi rh = \Phi_0$.

.....

14.19 a) On a $\displaystyle\int_{T_1}^{T_r}\mathrm{d}T = T(r) - T_1 = \int_{r_1}^{r} -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda h}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda h}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$.

La valeur de Φ_0 peut être imposée par continuité du flux par un autre processus physique (transfert conducto-convectif par exemple) ; cela permet alors de mesurer la température sur une isotherme, par exemple T_2 (souvent une température de surface).

.....

14.19 b) On a $T_2 = T_1 + \dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda h}\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ et donc $\Phi_0 = (T_2 - T_1)\dfrac{2\pi\lambda h}{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}$. Dans le cas où l'on impose les températures T_1 et T_2, on peut à partir du champ de température déterminé ici calculer Φ_0, ce qui permet alors d'évaluer par exemple des pertes énergétiques.

.....

14.20 a) Le système est invariant par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}, \vec{e_z})$ et par translation le long du même axe.

.....

14.20 b) La variation de température étant uniquement radial le flux thermique sera selon cette direction. Sinon, on peut aussi utiliser la loi de Fourier sachant que le gradient s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

en cylindrique.

.....

14.20 c) On a $\delta^3 G_{\text{th}} = \dfrac{\lambda\delta S}{\delta L} = \dfrac{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$. On utilise l'expression précédente de la conductance.

.....

14.20 d) Les isothermes sont communes aux « bornes » de tous les éléments de volumes.

.....

14.20 e) On a $\delta^2 G_{\text{th}} = \sum \delta^3 G_{\text{th}} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\lambda \, \mathrm{d}z r \, \mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi\lambda r \, \mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$.

.....

14.20 f) Les isothermes sont communes aux « bornes » de tous les éléments de volumes.

.....

14.20 g) On a $\delta G_{\text{th}} = \sum \delta^2 G_{\text{th}} = \displaystyle\int_0^{L} \frac{2\pi\lambda r \, \mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi\lambda L r}{\mathrm{d}r}$.

.....

14.20 h) Les cylindres évidés sont traversés par des flux identiques.

.....

14.20 i) On a $R_{\text{th}} = \sum \delta R_{\text{th}} = \sum \dfrac{1}{G_{\text{th}}} = \displaystyle\int_{r1}^{r2} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\lambda L r}$.

.....

14.20 j) On a $T_{\text{a}} - T_{\text{e}} = R_{\text{th}}\Phi_0 = \dfrac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)\Phi_0$.

.....

14.21 a) La quantité U est une fonction d'état. Comme on est en régime permanent, l'énergie interne du système fermé considéré est donc constante.

.....

14.21 b) On peut appliquer le premier principe : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. Ici, il n'y a pas de travail fourni au système ; donc, on a $\delta Q = 0$.

.....

14.21 c) On a $0 = \delta Q = (\Phi(r) - \Phi(r + \mathrm{d}r)) \, \mathrm{d}t$.

.....

14.21 d) La loi de Fourier donne $-\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 4\pi r^2 = \Phi_0$.

.....

14.22 a) On a $\displaystyle\int_{T_1}^{T_r} \mathrm{d}T = T(r) - T_1 = \int_{r_1}^{r} -\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$.

.....

14.22 b) On a $T_2 = T_1 + \dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$, donc $\Phi_0 = (T_2 - T_1)\dfrac{4\pi\lambda}{\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)}$. Dans le cas où l'on impose les températures T_1 et T_2 on peut à partir du champ de température déterminé ici calculer Φ_0, ce qui permet alors d'évaluer par exemple des pertes énergétiques.

.....

Fiche n° 15. Transferts thermiques

Réponses

15.1 a) ..... positif

15.1 b) ..... négatif

15.1 c) ..... nul

15.2 a) ..... (b) et (e)

15.2 b) ..... $60\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

15.3 a) ..... (b)

15.3 b) ..... (b)

15.3 c) ..... Même sens que $\overrightarrow{e_r}$

15.3 d) ..... Même sens que $\overrightarrow{e_r}$

15.3 e) ..... $2{,}9\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

15.3 f) ..... $1{,}4\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

15.4 ..... $\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$

15.5 a) ..... (b)

15.5 b) ..... $65\,^{\circ}\mathrm{C}$

15.6 a) ..... (c)

15.6 b) ..... $\lambda\dfrac{\pi a^2}{b}(T_0-T_a)$

15.7 a) ..... $62{,}9\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}$

15.7 b) ..... $3{,}8\times10^{26}\,\mathrm{W}$

15.7 c) ..... (c)

15.7 d) ..... (c)

15.8 a) ..... (b)

15.8 b) ..... (b)

15.8 c) ..... $1{,}5\,\mathrm{m^2}$

15.9 ..... $\mathrm{L^2\cdot T^{-1}}$

15.10 a) ..... (c)

15.10 b) ..... (b)

15.11 a) ..... $\dfrac{p_v}{2\lambda}x(L-x)+(T_1-T_0)\dfrac{x}{L}+T_0$

15.11 b) ..... (d)

15.11 c) ..... $60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$

15.12 a) ..... $T_0+\dfrac{I^2}{2\gamma\lambda S^2}\left(\left(\dfrac{L}{2}\right)^2-x^2\right)$

15.12 b) 0

15.12 c) ..... $T_0+\dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}\dfrac{L^2}{8}$

15.12 d) ..... (b) et (c)

15.13 a) ..... $1{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$

15.13 b) ..... $1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$

15.13 c) ..... $4{,}0\,\mathrm{cm}$

15.14 a) ..... (a)

15.14 b) ..... (c)

15.15 a) ..... $0{,}50\,\mu\mathrm{m}$

15.15 b) ..... $5{,}8\times10^{3}\,\mathrm{K}$

15.15 c) ..... $9{,}35\,\mu\mathrm{m}$

15.16 a) ..... (c)

15.16 b) ..... $260\,\mathrm{K}$

Corrigés

15.2 a) Le profil de température dans le mur est une fonction affine en régime stationnaire.

On a alors $\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{e_x}$ indépendant de x. La loi de Fourier donne alors $\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e}\vec{e_x}$ pour tous les points de la dalle. Ici, $\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e}\vec{e_x}$ avec $\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e} = 50\,\text{K}\cdot\text{m}^{-1}$.

.....

15.2 b) On a $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\| = \lambda\dfrac{|T_\text{C} - T_\text{A}|}{e} = 1{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times \dfrac{10\,\text{K}}{0{,}2\,\text{m}} = 60\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

.....

15.3 a) La température ne dépend spatialement que de la distance r à l'axe $(\text{O}z)$. Par conséquent, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}.$$

.....

15.3 b) La température ne dépend spatialement que de la distance r à l'axe $(\text{O}z)$. Par conséquent, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}.$$

.....

15.3 c) On constate que $\overrightarrow{\text{grad}}\,T \cdot \vec{e_r} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} < 0$ donc $\vec{\jmath}_{\text{th}} \cdot \vec{e_r} > 0$.

.....

15.3 d) On constate que $\overrightarrow{\text{grad}}\,T \cdot \vec{e_r} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} < 0$ donc $\vec{\jmath}_{\text{th}} \cdot \vec{e_r} > 0$.

.....

15.3 e) On a $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{r}$ donc $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\| = \vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A}) \cdot \vec{e_r} = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{a}$. Donc,

$$\lambda\frac{T_\text{A} - T_\text{C}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\frac{1}{a} = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times \frac{10\,\text{K}}{\ln(2)}\frac{1}{2\times10^{-2}\,\text{m}} = 2{,}9\times10^{5}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}.$$

.....

15.3 f) On obtient $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C}) \cdot \vec{e_r} = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A}) \cdot \vec{e_r}$.

.....

15.5 a) La puissance transmise par la paroi au fluide est $P_{p\to f} = hS(T_p - T_f)$. Par définition de la résistance thermique, on a $R_\text{cc} = \dfrac{T_p - T_f}{P_{p\to f}}$ donc $R_\text{cc} = \dfrac{1}{hS}$.

.....

15.5 b) On a $T_\text{toit} - T_\text{air} = \dfrac{P_{\text{toit}\to\text{air}}}{hS} = \dfrac{40\times10^{3}\,\text{W}}{20\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\times50\,\text{m}^{2}} = 40\ \text{K}$.

.....

15.6 b) On obtient $P_0 = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0)\pi a^2$ avec $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0) = \dfrac{T_a - T_0}{b}$.

.....

15.7 a) On calcule $\varphi_\odot = 5{,}67\times10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}\times(5\,772\,\text{K})^4 = 6{,}29\times10^{7}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

.....

15.7 b) On a $P_S = \varphi_\odot 4\pi R_\odot^2 = 6{,}29\times10^{7}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\times4\pi\left(696\times10^{6}\,\text{m}\right)^2 = 3{,}83\times10^{26}\,\text{W}$.

.....

15.7 c) La puissance $\varphi(r)4\pi r^2$ traversant la sphère de rayon r étant identique à celle émise par le Soleil $\varphi_\odot 4\pi R_\odot^2$, il vient $\varphi(r) = \varphi_\odot\left(\dfrac{R_\odot}{r}\right)^2$.

.....

15.7 d) On trouve $\varphi(D_{ST}) = \varphi_\odot\left(\dfrac{R_\odot}{D_{ST}}\right)^2$. Donc,

$$\varphi(D_{ST}) = 6{,}29\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}\times\left(\frac{696\times10^3\,\mathrm{km}}{150\times10^6\,\mathrm{km}}\right)^2 = 1{,}35\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}} \quad \text{arrondi à} \quad 1{,}4\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}.$$

.....

15.8 a) La radiateur rayonne vers l'air la puissance $P_r = \sigma T_s^4 S$ et reçoit la puissance $P_a = \sigma T_a^4 S$ de la part de l'air. La puissance cédée par le radiateur à l'air est donc $P = P_r - P_a$.

.....

15.8 b) La loi de Newton rappelée dans la fiche donne le résultat.

.....

15.8 c) La puissance totale cédée par le radiateur à l'air est $P = \big(\sigma\big(T_s^4 - T_a^4\big) + h(T_s - T_a)\big)S$.

On a

$$\begin{aligned}\sigma\big(T_s^4 - T_a^4\big) + h(T_s - T_a) &= 5{,}67\times10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}\times\big(333^4 - 293^4\big)\mathrm{K}^4 + 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}\times 40\,\mathrm{K}\\ &= 679\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}.\end{aligned}$$

Donc $S = \dfrac{P}{\sigma(T_s^4 - T_a^4) + h(T_s - T_a)} = \dfrac{1{,}0\times10^3\,\mathrm{W}}{679\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}} = 1{,}5\,\mathrm{m}^2$.

.....

15.10 b) La durée caractéristique τ de la diffusion thermique est liée à la longueur caractéristique L de l'œuf et à sa diffusivité thermique D par $\tau = \dfrac{L^2}{D}$. On en déduit que $\dfrac{\tau_a}{\tau_p} = \left(\dfrac{L_a}{L_p}\right)^2 \approx 3^2$ (où l'indice « a » est pour l'œuf d'autruche et « p » pour l'œuf de poule).

.....

15.11 a) En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{p_v}{\lambda}$ par rapport à x, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{p_v}{\lambda}x + A$ puis $T(x) = -\dfrac{p_v}{\lambda}\dfrac{x^2}{2} + Ax + B$. Les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_1$ mènent à $B = T_0$ et $A = \dfrac{T_1 - T_0}{L} + \dfrac{p_v L}{2\lambda}$.

.....

15.11 b) On pose $A = \dfrac{p_v L}{2\lambda} + \dfrac{T_1 - T_0}{L}$. La température est maximale en $x_1 = 3L/10$. Or $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{p_v}{\lambda}x + A$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$ pour $x_1 = \dfrac{\lambda A}{p_v}$. Après calculs, on obtient $p_v = \dfrac{5\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$.

.....

15.11 c) On a $p_v = \dfrac{5\times1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}}{1\,\mathrm{m}^2}\times10\,\mathrm{K} = 60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$.

.....

15.12 a) On note $A = \dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}$. En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -A$ par rapport à x, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -Ax + B$ puis $T(x) = -A\dfrac{x^2}{2} + Bx + C$. Les conditions aux limites $T\left(\pm\dfrac{L}{2}\right) = T_0$ mènent à $B = 0$ et $C = T_0 + AL^2/8$.

On peut aussi justifier $B = 0$ par un argument de symétrie du profil de température par rapport au plan $x = 0$. Le profil étant parabolique et $T\left(\pm\dfrac{L}{2}\right) = T_0$ prouvent que $x \longmapsto T(x)$ est une fonction paire donc que $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0) = 0$.

.....

15.12 d) On a $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} = -\lambda\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} < 0$ car $\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} > 0$ et $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} = -\lambda\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} > 0$ car $\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} < 0$.

15.13 a) Par définition de la résistance thermique du mur, on a $R = \dfrac{T_1 - T_2}{P_{1\to 2}} = \dfrac{10}{10^3} = 1{,}0\times 10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

15.13 b) En notant $S = hL = 25\,\mathrm{m}^2$, la conductivité du béton est alors $\lambda_1 = \dfrac{e}{SR} = \dfrac{0,3}{25\times 10^{-2}} = 1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$.

15.13 c) Les deux matériaux sont associés en série. Afin que la puissance traversant le mur isolé soit divisée par 5 pour la même différence de température, il faut que la résistance thermique soit multipliée par 5. En notant R_1 la résistance du mur de béton et R_2 celle de la plaque de polystyrène, $R_1 + R_2 = 5R_1$ soit $R_2 = 4R_1$.

Ceci s'écrit alors $\dfrac{e_2}{\lambda_2 S} = 4\dfrac{e_1}{\lambda_1 S}$. L'épaisseur e_2 de polystyrène est donc $e_2 = 4e_1\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.

15.14 a) La conductance est proportionnelle à la surface du mur. En écrivant que $G_m = KS_m$, on en déduit que $G'_m = K(S_m - S_f)$ et donc $G'_m = \dfrac{S_m - S_f}{S_m}G_m$.

15.14 b) Le mur percé et la fenêtre sont associés en parallèle. La conductance thermique équivalente est la somme de la conductance de la fenêtre G_f et de celle du mur percé G'_m différente de G_m. Donc, on a

$$G = G_f + \frac{S_m - S_f}{S_m}G_m = G_m\left(1 - \frac{S_f}{S_m}\right) + G_f.$$

15.15 b) Avec la loi de Wien, on obtient $T = \dfrac{2\,898\,\mu\mathrm{m\cdot K}}{0{,}50\,\mu\mathrm{m}} = 5{,}8\times 10^3\,\mathrm{K}$.

15.15 c) On calcule $\lambda'_m = \dfrac{2\,898\,\mu\mathrm{m\cdot K}}{310\,\mathrm{K}} = 9{,}35\,\mu\mathrm{m}$.

15.16 a) La puissance émise par un élément de surface S d'atmosphère est $P_e = \varphi_a \times 2S$ et la puissance reçue est $P_r = \varphi_S S + \varphi_T S$. En régime stationnaire, $P_r = P_e$ donc $\varphi_a = \dfrac{\varphi_S + \varphi_T}{2}$.

15.16 b) On a $\varphi_a = \dfrac{(70 + 450)\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{2} = 260\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. On en déduit que

$$T_a = \left(\frac{\varphi_a}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{260\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{5{,}67\times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}}\right)^{1/4} = 260\,\mathrm{K}.$$

Fiche n° 16. Tables et diagrammes thermodynamiques

Réponses

16.1 a) .. $9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{g \cdot mL^{-1}}$

16.1 b) ..... (b)

16.1 c) ..... (a)

16.2 a) ..... ①

16.2 b) ..... ③

16.2 c) ..... ②

16.2 d) ..... 760,8 mmHg

16.2 e) ..... diphasé

16.2 f) ... $1{,}017 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$

16.2 g) ..... $7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg}$

16.2 h) ..... (c)

16.3 a) ..... isobare

16.3 b) ..... isotherme

16.3 c) ..... isochore

16.3 d) ..... $2V_1$

16.4 a) ..... (b)

16.4 b) ..... (a)

16.4 c) ..... (d)

16.5 a) 0

16.5 b) ..... $-\dfrac{p_0}{v_0}$

16.5 c) ..... ∞

16.5 d) ..... $-\gamma\dfrac{p_0}{v_0}$

16.5 e) ..... isochore

16.5 f) ..... isobare

16.5 g) ..... isotherme

16.5 h) ..... isentrope

16.6 a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$

16.6 b) ..... (b)

16.6 c) ..... (b)

16.6 d) ..... (a)

16.7 ..... (a)

16.8 a) ..... (a), (c)

16.8 b) ..... (a), (d)

16.8 c) ..... (b), (d)

16.8 d) ..... (c), (d)

16.8 e) ..... $800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

16.8 f) ... $-5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

16.8 g) ..... $-1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

16.9 a) ..... (b)

16.9 b) ..... (d)

16.9 c) ..... (c)

16.10 a) ..... (a), (d)

16.10 b) ..... (b), (c), (d)

16.10 c) ..... (b) et (c)

16.10 d) ..... (a)

16.11 a) ..... $\dfrac{R}{\ln(10) M v c_p}$

16.11 b) ..... isochore

16.11 c) ..... isobare

16.11 d) ..... isotherme

16.11 e) ..... isentrope

16.12 a) ..... (a)

16.12 b) ..... $1\,320\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

16.12 c) ..... $2\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

16.12 d) ..... $420\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

16.12 e) ..... (b)

16.12 f) ..... $x_\mathrm{B} = 40\%$

16.12 g) ..... (b)

16.13 a) ..... (b)

16.13 b) ..... (d)

16.13 c) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$

16.13 d) ..... (d)

16.13 e) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$

16.14 a) ..... $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

16.14 b) ..... $419{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

16.14 c) ..... (c)

16.14 d) .... $-2\,031\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

16.15 a) ..... (c)

16.15 b) ..... (b)

16.16 a) ..... (b)

16.16 b) ..... isotherme

16.16 c) ..... isentrope

16.16 d) ..... isochore

16.16 e) ..... isobare

16.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_p}}$

16.17 b) ..... $\boxed{0}$

16.17 c) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_v}}$

16.17 d) ..... $\boxed{\infty}$

16.17 e) ..... isentrope

16.17 f) ..... isobare

16.17 g) ..... isochore

16.17 h) ..... isotherme

16.18 a) ..... (c)

16.18 b) ..... (b)

16.19 a) ..... $2\,680\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

16.19 b) ..... (c)

16.19 c) .... $8\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

16.19 d) ..... $300\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

16.19 e) ..... $250\,^\circ\mathrm{C}$

16.19 f) ..... $400\,^\circ\mathrm{C}$

16.19 g) ..... (a)

Corrigés

16.1 a) On a $v(T = 200\,^\circ\mathrm{C}, p = 200\,\mathrm{kPa}) = 1{,}0805\,\mathrm{m^3/kg} = 1{,}0805\times10^6\,\mathrm{mL\cdot kg^{-1}} = 1{,}0805\times10^3\,\mathrm{mL\cdot g^{-1}} \approx 1{,}1\times10^3\,\mathrm{mL\cdot g^{-1}}$ donc $\rho = \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{1{,}1\times10^3} = 0{,}9090\cdots\times10^{-3}\,\mathrm{g\cdot mL^{-1}} \approx 9{,}1\times10^{-4}\,\mathrm{g\cdot mL^{-1}}$.

Remarque : La division ci-dessus « se pose à la main ». Il est aussi possible d'utiliser le développement limité autour de 0 de $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$ à l'ordre 1 : $\dfrac{1}{1{,}1\times10^3} = (1+0{,}1)^{-1}\times10^{-3} \approx (1-0{,}1)\times10^{-3} = 9\times10^{-4}$.

16.1 b) Par lecture de la table, on a $T_{\mathrm{sat}}(200\,\mathrm{kPa}) = 120{,}21\,^\circ\mathrm{C}$.

16.1 c) Par lecture de la table, on a $100\,^\circ\mathrm{C} < T_{\mathrm{sat}}(200\,\mathrm{kPa}) = 120{,}21\,^\circ\mathrm{C}$: le fluide est donc monophasé sous forme de liquide.

16.2 d) À $100\,^\circ\mathrm{C}$, on a

$$p_{\mathrm{sat}} = 0{,}10142\,\mathrm{MPa} = 0{,}10142\times10^6\times1\,\mathrm{Pa} = 0{,}10142\times10^6\times\frac{1}{133,3}\mathrm{mmHg} = 760{,}8\,\mathrm{mmHg}.$$

16.2 e) On a $v = 1{,}03\,\mathrm{cm^3/g} = 1{,}03\times10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$. Or, par lecture de la table, le volume massique du liquide saturant est $v_\ell(60\,^\circ\mathrm{C}) = 1{,}017\times10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$ et celui de la vapeur saturante est $v_{\mathrm{g}}(60\,^\circ\mathrm{C}) = 7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg}$. Il vient que $v_\ell(60\,^\circ\mathrm{C}) \leqslant v \leqslant v_{\mathrm{g}}(60\,^\circ\mathrm{C})$: le système est alors diphasé, c'est-à-dire un mélange de vapeur et de liquide.

16.2 h) Le théorème des moments exprimé en terme de volume massique est $x_{\mathrm{g}} = \dfrac{v - v_{\mathrm{l}}}{v_{\mathrm{g}} - v_{\mathrm{l}}}$.

Or, $v_{\mathrm{g}} = 7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg} \approx 7v \approx 7\times10^3 v_{\mathrm{l}}$ donc il est numériquement raisonnable de considérer que $v_{\mathrm{g}} - v_{\mathrm{l}} \approx v_{\mathrm{g}}$ et $v - v_{\mathrm{l}} \approx v$, d'où $x_{\mathrm{g}} \approx v/v_{\mathrm{g}}$.

16.3 d) La transformation est isobare donc $V_2 = \dfrac{T_2 V_1}{T_1} = 2V_1$.

16.4 a) La transformation est isotherme donc $PV = nRT$ est une constante.

16.4 b)

- Lors de la transformation (A) isobare, le volume augmente donc (b) ne convient pas. Dans le cas de (d), la transformation (C) isochore a lieu au volume minimal, ce qui est en contradiction avec la fiche synoptique où le volume prend sa valeur maximale pendant cette transformation ($V = 3V_1$) : la (d) ne convient donc pas.
- Pour la transformation (B) isotherme, la pression et le volume vérifient la relation $P = \dfrac{\text{cste}}{V}$ donc, en échelle linéaire, la représentation graphique de $P = f(V)$ est une branche d'hyperbole, ce qui ne peut que correspondre à (a).

.....

16.4 c) Le sens de rotation est horaire : le travail total reçu au cours du cycle est négatif, le cycle est moteur.

.....

16.5 h) La courbe isobare est de pente nulle donc la courbe ① est la courbe isobare. La courbe isochore est de pente infinie donc la courbe ② est la courbe isochore.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isotherme vérifiant $p_{\text{iso}-T} = \dfrac{\text{A}}{v}$ et la courbe isentropique $p_{\text{iso}-s} = \dfrac{B}{v^\gamma}$ où $A = nrT = p_0 v_0$ et $B = p_0 v_0^\gamma$ sont des constantes. L'identification des courbes se fait par un calcul de dérivée au point M_0 de coordonnées (p_0, v_0) :

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\frac{A}{v_0^2} = -\frac{p_0}{v_0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-s}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\gamma\frac{B}{v_0^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{p_0}{v_0} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0)\,.$$

Au point M_0, la courbe isentrope est donc la courbe la plus pentue : la courbe ④ est la courbe isentrope et la courbe ③ est la courbe isotherme.

.....

16.6 a) En combinant la $2^{\text{ème}}$ identité thermodynamique et la seconde loi de Joule, il vient : $c_P\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Le long d'une courbe isobare, $\mathrm{d}p = 0$. L'équation différentielle en $T(s)$ s'obtient en réorganisant les variables s et T de telle sorte qu'une dérivée $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ apparaisse : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$.

.....

16.6 b) L'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre dont la solution est de la forme $T(s) = A\exp\left(\dfrac{s}{c_p}\right)$. Le choix (arbitraire) de la constante d'intégration A est ici fait de telle sorte que la courbe isobare passe par un état de référence (s_0, T_0) : $A = T_0\exp\left(-\dfrac{s_0}{c_p}\right)$, d'où $T(s) = T_0\exp\left(\dfrac{s - s_0}{c_p}\right)$.

Conseil : Tester la vraisemblance en remarquant que, d'une part, $T(s = s_0) = T_0$ *et, d'autre part,* $\dim(s - s_0) = \dim(c_p)$ *: l'argument d'exponentielle est bien sans dimension.*

.....

16.6 c) La loi de Laplace donne $p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$ soit $p_2^{1-\gamma} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^\gamma p_1^{1-\gamma}$, d'où $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$.

.....

16.6 d) Graphiquement, $T_1 < T_2$, soit $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$. Or, $\dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ avec $\gamma > 1$, c'est-à-dire que $\dfrac{\gamma}{1-\gamma} < 0$. Ainsi, $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$ implique que $\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} > 1$. Autrement dit, $\dfrac{p_2}{p_1} > 1$ donc $p_2 > p_1$.

.....

16.7 Le transfert thermique correspond géométriquement à l'aire du cycle parcouru dans le diagramme entropique. Il est compté positivement si le cycle est parcouru dans le sens horaire (moteur) et négativement si le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique (récepteur). Attention ici, l'entropie est donnée en $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$ donc $Q_{\text{ABCDA}} = (T_\text{B} - T_\text{A})(S_\text{C} - S_\text{B}) = 100 \cdot 1{,}5 \times 10^3 = 1{,}5 \times 10^5$ J.

.....

16.8 a) Une enthalpie massique est indiquée en $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$, et non en J. Le point A est à droite de la courbe de saturation et en-dessous du point critique donc le fluide est à l'état gazeux. Les courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = 0$) sont quasiment horizontales, c'est-à-dire presque confondues avec des courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) : le modèle du gaz parfait peut être considéré comme valide au point A car la relation $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$ n'est pas mise en défaut au point A. Enfin, le point A passe par la courbe isobare 0,05 bar représentée en pointillés.

.....

16.8 b) Le point B est à gauche de la courbe de saturation et en-dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide. Une lecture graphique, réalisée à l'aide d'une règle graduée, puis l'application d'une « règle de trois », conduit à évaluer l'abscisse du point B comme étant $600\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

.....

16.8 c) La grandeur x représente le titre massique en vapeur dans le mélange. Le point E se situe à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E) des courbes isotitres $x = 0{,}6$ et $x = 0{,}8$. Ainsi, $x_\mathrm{E} = 0{,}7$.

.....

16.8 d) En passant de l'état E à l'état F (situé sur la courbe d'ébullition), le système passe d'un état diphasé à un état de liquide juste saturant : la vapeur saturante se liquéfie. De plus, cette transformation est isotherme ; or, l'eau étant un corps pur, elle est également isobare.

.....

16.8 f) Par lecture graphique, $s_\mathrm{E} = 800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$. Ainsi, $s_\mathrm{F} - s_\mathrm{E} = 800 - 5800 = -5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

.....

16.8 g) L'incrément des courbes isenthalpes est de $200\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$. Aussi, le point E étant situé à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E) des courbes isenthalpes 1800 et $2\,000\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, il vient que $h_\mathrm{E} = 1\,900\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$. De même, $h_\mathrm{F} = 250\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, d'où $h_\mathrm{F} - h_\mathrm{E} = 250 - 1900 = -1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

16.9 a) Pour une phase condensée incompressible indilatable (domaine liquide, à gauche de la courbe de saturation), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc à T constante, h est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

Pour un mélange liquide-vapeur d'un corps pur (zone sous la courbe de saturation) à l'équilibre, si T est fixée alors p est fixée aussi. Une courbe isotherme doit donc être horizontale dans cette zone.

Pour un gaz parfait (domaine vapeur, à droite de la courbe de saturation, et pour une faible pression), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc à T constante, h est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

.....

16.9 b) On peut procéder par élimination :

- Il ne s'agit pas d'isobares car nous aurions alors des droites horizontales.
- Il ne s'agit pas d'isenthalpes car nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isothermes car dans la zone gaz à faible pression (domaine de validité de l'hypothèse gaz parfait), nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isotitres car certaines courbes sont en dehors du domaine liquide + vapeur.

Il s'agit donc nécessairement d'isentropes.

.....

16.9 c) Ces courbes n'existent que dans le domaine Liquide + Vapeur et se rejoignent toutes au point critique, il s'agit donc d'isotitres.

.....

16.10 a) La pression est de 100 bar donc $100 \times 1{,}00 \times 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{Pa}$.

La température est indiquée en °C donc la réponse (b) ne convient pas. Le point A est à gauche de la courbe de saturation et en-dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide.

.....

16.10 b) Par lecture graphique, la pression est de $10^0\text{bar} = 1\,\text{bar} \neq 1\,\text{Pa}$ donc la (a) ne convient pas. Le point B est sous la courbe de saturation donc la réponse (b) convient. La valeur de x indiquée correspond au titre massique en vapeur. Sa valeur est de $0,4$ donc le titre en liquide est $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

.....

16.10 c) Le long d'une isotherme $\mathrm{d}T = 0$ ce qui, avec la seconde loi de Joule, implique : $\mathrm{d}h = 0$. Les courbes isenthalpes sont donc des portions de droites parallèles à l'axe des ordonnées (puisque h est la grandeur en abscisses).

.....

16.10 d) Le modèle du gaz parfait est une bonne approximation lorsque les courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) sont également des courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T = 0$), ce qui tend à être le cas en zone (a).

.....

16.11 a) L'équation d'état donne $p = \dfrac{R}{Mv}T$ donc, en différenciant à v fixé, il vient $\mathrm{d}p = \dfrac{R}{Mv}\,\mathrm{d}T$. L'utilisation de la 2^{nde} loi de Joule puis la division par $p\ln(10)$ permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}\frac{1}{\ln(10)} = \frac{R}{Mv}\frac{1}{p\ln(10)}\frac{\mathrm{d}h}{c_p} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}(\ln p/\ln(10))}{\mathrm{d}h} = \frac{R}{c_pMv\ln(10)}\frac{1}{p} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \frac{A}{p} \text{ avec } A = \frac{R}{\ln(10)Mvc_p}$$

une constante pour une transformation isochore ($v = \text{cste}$).

.....

16.11 e) La courbe isobare est de pente nulle donc la courbe ④ est la courbe isobare. Du fait de la seconde loi de Joule, la courbe isotherme est également une courbe isenthalpe, c'est-à-dire de pente infinie. Ainsi, la courbe isotherme est la courbe ①.

Pour une courbe isochore, il a été montré que $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec A une constante. Ainsi, dans un diagramme $(\log(p), h)$, il apparaît que la pente n'est pas constante ; elle tend vers l'infini lorsque h tend vers 0 : la courbe ③ est donc la courbe isochore et, par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

16.12 a) L'échelle des abscisses étant linéaire, il est possible d'utiliser la position du point B par rapport à la courbe de saturation pour déterminer si le fluide contient plus de liquide ou plus de vapeur. Ici, le point B est plus proche de la courbe de bulle (isotitre $x = 0$ en trait plein) que de la courbe de rosée (isotitre $x = 1$ en trait plein) donc il y a davantage de liquide que de vapeur.

.....

16.12 b) L'enthalpie massique du fluide diphasé correspond à l'abscisse du point B : $h_\text{B} = 1\,320\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

16.12 c) L'enthalpie massique de la vapeur saturante de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de rosée : $h_{\text{v,B}} = 2\,650\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

16.12 d) L'enthalpie massique du liquide saturant de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de bulle : $h_{\text{l,B}} = 420\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

16.12 f) On a

$$x_\text{B} = \frac{h_\text{B} - h_{\text{l,B}}}{h_{\text{v,B}} - h_{\text{l,B}}} = \frac{1320 - 420}{2650 - 420} = \frac{900}{2230} \approx \frac{900}{2250} = \frac{9000}{2250} \times 10^{-1} = 0{,}40,$$

ce qui est cohérent avec le fait que le point B soit placé sur la courbe isotitre $x = 0{,}4$.

.....

16.12 g) Pour rappel, l'enthalpie massique du liquide saturant d'un mélange diphasé correspond à l'abscisse du projeté de cet état sur la courbe de bulle tandis que l'enthalpie massique de la vapeur saturante correspond à l'abscisse du projeté sur la courbe de rosée. Dans le diagramme $\log(p) - h$, la distance entre ces deux projetés est $h_\text{v} - h_\text{l} = \Delta_\text{vap} h$.

Graphiquement, il apparaît que h_v diminue et que h_l augmente avec la pression, d'où une enthalpie de vaporisation $\Delta_\text{vap} h$ qui diminue lorsque la pression augmente.

.....

16.13 b) L'équation d'état des gaz parfaits est $PV = nRT$ avec n la quantité de matière et V le volume.

Or, $n = m/M$ (m est la masse) donc il vient $PV = mTR/M$ soit $Pv = rT$ avec $v = V/m$.

.....

16.13 c) On a $v = \dfrac{rT}{p} = \dfrac{0{,}46 \times 10^3 \times (260 + 273)}{100 \times 10^3} = 2{,}45\,\text{m}^3/\text{kg}$.

.....

16.13 d) De manière générale, les points $\text{M}(x, y)$ le long d'un segment défini par les points $\text{M}_1(x_1, y_1)$ et $\text{M}_2(x_2, y_2)$ vérifient $y = y_1 + (x - x_1)\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

.....

16.14 c) Par extensivité et additivité de l'enthalpie, $h_\text{i} = x h_\text{g} + (1 - x) h_\ell$ avec x le titre massique de la vapeur saturante. Ici, $x = 90\% = 0,90$ et $1 - x = 10\% = 0,10$.

.....

16.14 d) On a $q = \Delta h = h_\ell(P = 1{,}0142\,\text{bar}) - h_\text{i}$ avec h_i l'enthalpie massique initiale du mélange et

$$h_\text{i} = 10\% \times h_\ell(P = 1{,}0142\,\text{bar}) + 90\% \times h_\text{g}(P = 1{,}0142\,\text{bar}) = 10\% \times 419,2 + 90\% \times 2675,6 = 2\,450\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Ainsi, le transfert thermique massique est $q = 419,2 - 2450 = -2\,031\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.15 a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$.

.....

16.15 b) Lors de la transformation (D) isentrope, le volume décroît de $3V_1$ à V_1. De plus, le volume et la température ne sont pas reliés par une relation linéaire ($TV^{\gamma-1} = \text{cste}$). Ainsi, seule la réponse (b) vérifie ces deux conditions.

.....

16.16 a) L'équation d'état des gaz parfaits donne $p = \dfrac{nR}{V} T$.

Or, ici, $V = m \times v_0 = nMv_0$. Ainsi, $p = \dfrac{R}{Mv_0} T$ d'où $\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{R}{Mv_0} = \text{cste}$: une courbe isochore est une courbe de pente constante (et positive) dans un diagramme (p, T).

.....

16.16 e) La courbe isobare est de pente nulle donc la courbe ① est la courbe isobare. La courbe isotherme est de pente infinie donc la courbe ④ est la courbe isotherme. La courbe isochore est une courbe de pente constante (finie et non nulle) donc la courbe ③ est la courbe isochore. Par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

16.17 h) La courbe isotherme est de pente nulle donc la courbe ④ est la courbe isotherme. La courbe isentrope est de pente infinie donc la courbe ① est la courbe isentrope.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isobare de pente $\dfrac{T_0}{c_p}$ et la courbe isochore de pente $\dfrac{T_0}{c_v}$. Le rapport de

la pente de la courbe isochore par celle de la courbe isobare est $\frac{T_0}{c_v} \times \left(\frac{T_0}{c_p}\right)^{-1} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma > 1$: au point M_0, la courbe isochore est plus pentue que la courbe isobare donc la courbe ② est la courbe isochore et la courbe ③ est la courbe isobare.

.....

16.18 a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$.

.....

16.18 b) Lors de la transformation (A) isobare, la température augmente donc la réponse (a) est à rejeter. La transformation (C) étant isochore, la relation entre la pression et la température est une relation linéaire $P = \frac{nRT}{V}$, ce qui correspond à une portion de droite. Pour la transformation (D) isentropique, la pression et la température vérifient $P = \frac{\text{cste}}{T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$, ce qui ne peut pas être une portion de droite puisque $\gamma > 1$; la (c) ne convient pas.

.....

16.19 a) Le point I se trouve à l'intersection de la courbe isobare $250\,\text{mbar} = 2{,}5 \times 10^{-1}\,\text{bar}$ et de la courbe isotherme 100 °C. La courbe isobare de $2{,}5 \times 10^{-1}$ bar est la droite horizontale située à peu près à mi-chemin entre la deuxième et la troisième graduation en partant de la graduation associée à 10^{-1}bar. La courbe isotherme de 100 °C correspond à la courbe en pointillés dont le label est $T = 100°C$. Par lecture graphique de l'abscisse du I , $h_\text{I} = 2\,680\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

.....

16.19 b) Le point I se trouve à droite de la courbe de saturation (et bien en-dessous de l'isobare critique, une droite horizontale passant par le sommet de la courbe de saturation). Ainsi, le fluide est initialement une vapeur sèche.

.....

16.19 c) Le point I passe par une courbe isentrope qui est ici représentée à l'aide de tirets. La valeur associée n'est pas indiquée, mais les deux courbes isentropes voisines indiquent $7\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'incrément du réseau des courbes isentropes est de $1\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.19 d) Le point F est à l'intersection de la courbe isentrope $s_\text{F} = s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ avec la courbe isobare $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$, c'est-à-dire la droite passant par l'ordonnée 10^0bar. Par lecture graphique de l'abscisse du point F, on a $h_\text{F} = 2\,980\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $w = 2980 - 2680 = 300\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.19 e) Le point F passe la courbe isotherme comprise entres les courbes isothermes de 200 °C et 300 °C. L'incrément étant de 50 °C, cette isotherme est associée à 250 °C donc $T_\text{F} = 250\,°\text{C}$.

.....

16.19 f) L'entropie finale est désormais $s_{\text{F}'} = (1 + 6\%)s_\text{F} = (1 + 0,06) \times 8 = 8 + 0,48 \approx 8{,}5\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Or, il n'y a aucune courbe isentrope tracée pour cette valeur d'entropie massique. Il faut interpoler la position du point F' dans le diagramme $\log(p) - h$. Pour cela, il suffit de tracer un segment horizontal le long de la courbe isobare de 1 bar qui relie les courbes isentropes de $8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. La position du point F' est approximativement au milieu du segment tracé. Le point F' passe par la courbe isotherme de 400 °C donc $T_{\text{F}'} = 400\,°\text{C}$.

.....

16.19 g) L'élévation totale de température s'exprime comme $T_{\text{F}'} - T_\text{I}$ tandis que celle due à la compression (réversible) est $T_\text{F} - T_\text{I}$. L'élévation de température due aux irréversibilités est donc $T_{\text{F}'} - T_\text{F}$. Sa proportion relativement à l'élévation totale est donc $\frac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_{\text{F}'} - T_\text{I}} \times 100$.

.....

Fiche n° 17. Thermodynamique industrielle

Réponses

17.1 a) ..... ⓐ

17.1 b) ..... ⓓ

17.1 c) ..... ⓒ

17.1 d) ..... ⓐ

17.2 a) ..... ⓒ

17.2 b) ..... ⓓ

17.2 c) ..... ⓐ

17.2 d) ..... ⓐ

17.3 a) ..... ⓒ

17.3 b) ..... $\dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}(T_2-T_1)$

17.3 c) ..... $c_2=\sqrt{\dfrac{2}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}(T_1-T_2)}$

17.3 d) ..... $383\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

17.4 a) ..... ⓑ

17.4 b) ..... ⓐ

17.5 a) ..... ⓐ

17.5 b) ..... ⓐ

17.5 c) ..... ⓑ

17.5 d) ..... ⓓ

17.5 e) ..... ⓐ

17.5 f) ..... ⓒ

17.5 g) ..... $-\dfrac{w_1+w_3}{q_2}$

17.5 h) ..... $1-\dfrac{T_4-T_1}{T_3-T_2}$

17.6 a) ..... $1\to 2$

17.6 b) ..... $50\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

17.6 c) ..... $2\to 3$

17.6 d) ..... $-200\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

17.6 e) 4

17.7 a) ..... $2{,}50\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

17.7 b) ..... $50\,^\circ\mathrm{C}$

17.7 c) ..... $110\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

17.7 d) ..... $140\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

17.7 e) 0,78

17.7 f) ..... $100\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

17.8 a) ..... ⓕ

17.8 b) ..... ⓐ

17.8 c) ..... ⓐ

17.8 d) ..... ⓑ

17.8 e) ..... ⓐ

17.8 f) ..... ⓒ

17.8 g) ..... ⓐ

17.8 h) ..... ⓑ

17.9 a) ..... condenseur

17.9 b) ..... évaporateur

17.9 c) ..... condenseur

17.10 a) ..... $D_{\mathrm{m1}}+D_{\mathrm{m2}}=D_{\mathrm{m}}$

17.10 b) ..... $c_{\mathrm{p}}(T-T_1)=q_{2\to 1}$

17.10 c) ..... $\boxed{c_\mathrm{p}(T-T_2)=q_{1\to2}}$

17.10 d) ..... $\boxed{D_{\mathrm{m}1}(T-T_1)+D_{\mathrm{m}2}(T-T_2)=0}$

17.10 e) ..... $\boxed{T=\dfrac{D_{\mathrm{m}1}T_1+D_{\mathrm{m}2}T_2}{D_m}}$

17.10 f) ..... $\boxed{38\,^\circ\mathrm{C}}$

17.11 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

17.11 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

17.11 c) ..... $\boxed{9\times10^6\,\mathrm{J}}$

17.12 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

17.12 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

17.12 c) ..... $\boxed{\Delta h=v(p_2-p_1)}$

17.12 d) ..... $\boxed{v(p_2-p_1)}$

17.12 e) ..... $\boxed{1{,}99\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}}$

Corrigés

17.1 a) La transformation est adiabatique donc $q=0$ et $s_\mathrm{e}=q/T=0$; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c}=0$. Finalement, $\Delta h=w_\mathrm{i}$ et $\Delta s=0$.

17.1 b) Il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i}=0$ et donc $\Delta h=q$; on a $\Delta s=s_\mathrm{e}+s_\mathrm{c}$.

17.1 c) La transformation est adiabatique donc $q=0$ et $s_\mathrm{e}=q/T=0$; il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i}=0$ et ainsi $\Delta h=0$. On a $\Delta s=s_\mathrm{c}$.

17.1 d) La transformation est adiabatique donc $q=0$ et $s_\mathrm{e}=q/T=0$; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c}=0$ et ainsi $\Delta h=w_\mathrm{i}$; $\Delta s=0$.

17.2 a) On a $\Delta h=c_\mathrm{p}\Delta T\approx1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}\times10\,\mathrm{K}=10\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

17.2 b) On a $e_\mathrm{c}=\dfrac{1}{2}v^2\approx0,5\times\left(10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2=50\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

17.2 c) On a $\Delta e_\mathrm{p}=g\Delta z\approx10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\times1\,\mathrm{m}=10\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

17.3 a) On a $\Delta h+\Delta e_\mathrm{p}+\Delta e_\mathrm{c}=q_\mathrm{e}+w_\mathrm{i}$. Ici, $\Delta e_\mathrm{p}=0$, $q_\mathrm{e}=0$ (adiabatique car isolée thermiquement) et $w_\mathrm{i}=0$ (tuyère indéformable). On en déduit : $\Delta h+\Delta e_\mathrm{c}=0$ (donc $h+e_\mathrm{c}=\mathrm{cte}$).

17.3 b) La deuxième loi de Joule s'écrit : $\Delta h=c_\mathrm{p}(T_2-T_1)=\dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}(T_2-T_1)$.

17.3 c) Comme c_1 est négligable, on en déduit des questions précédentes :

$$\frac{1}{2}c_2^2=-\Delta h=-\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_2-T_1)\qquad\text{et}\qquad c_2=\sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_1-T_2)}.$$

17.3 d) La vitesse d'éjection est alors $c_2=383\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

17.4 a) La première phase étant isentropique, les températures sont liées par la loi de Laplace

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = \text{cte} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma} \quad \text{donc} \quad T_2^\gamma = T_1^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\gamma},$$

ce qui conduit au résultat en prenant la puissance $1/\gamma$ de l'ensemble.

.....

17.5 a) Parcouru dans le sens horaire, le cycle est moteur.

.....

17.5 b) Les travaux w_2 et w_4 sont nuls. Les travaux reçus pendant le cycle sont w_1 et w_3.

.....

17.5 c) La deuxième phase est isobare, d'où : $q_2 = \Delta h = c_\text{p}(T_3 - T_2)$.

.....

17.5 d) La quatrième phase est isobare, d'où : $q_4 = \Delta h = c_\text{p}(T_1 - T_4)$.

.....

17.5 e) Le transfert thermique est nul pour cette transformation (isentropique). Le premier principe pour les systèmes en écoulement permanent s'écrit donc ici : $\Delta h = w_1$. d'où : $w_1 = h_2 - h_1 = c_\text{p}(T_2 - T_1) > 0$.

.....

17.5 f) De même, on a $w_3 = h_4 - h_3 = c_\text{p}(T_4 - T_3) < 0$.

.....

17.5 g) Les échanges énergétiques étant algébriques, le rendement du cycle est défini par $\rho = -\dfrac{w_\text{i}}{q_\text{c}} = -\dfrac{w_1 + w_3}{q_2}$.

.....

17.5 h) Le rendement du turbopropulseur est alors : $\rho = -\dfrac{c_\text{p}(T2 - T_1 + T_4 - T_3)}{c_\text{p}(T_3 - T_2)} = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

.....

17.6 a) Le compresseur a pour effet d'augmenter la pression et la température du fluide : ici, il s'agit donc de l'étape $1 \to 2$.

.....

17.6 b) D'après le premier principe industriel, on a $w_\text{compr} = h_2 - h_1 = 450 - 400 = 50\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

17.6 c) Le domaine de la vapeur est à droite du diagramme, celui du liquide à gauche, la liquéfaction correspond donc à l'étape $2 \to 3$.

.....

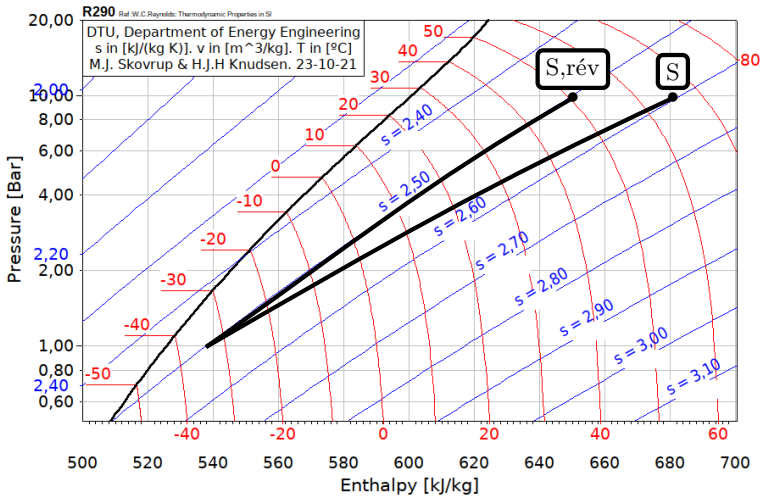
17.6 d) D'après le premier principe industriel, $q_\text{cond} = h_3 - h_2 = 250 - 450 = -200\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

17.7 a) La compression étant réversible, et en l'absence d'échange thermique, la compression est isentropique donc $s_{\text{S,rév}} = s_\text{E} = 2{,}50\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

17.7 b) L'état de sortie « S,rév » du compresseur se trouve à l'intersection entre l'isentrope passant par E et l'isobare à $P_S = 10\,\text{bar}$, comme schématisé ci-dessous.



.....

17.7 c) D'après le premier principe industriel, on a $w_{\text{rév}} = h_{\text{S,rév}} - h_{\text{E}} = 650 - 540 = 110\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

17.7 d) La donnée de la température permet de placer le point S sur le diagramme. D'après le premier principe industriel, on a $w = h_{\text{S}} - h_{\text{E}} = 680 - 540 = 140\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

17.7 f) La compression est adiabatique, il n'y a donc pas d'entropie échangée. Toute la variation d'entropie correspond à une création, d'où $s_{\text{créée}} = s_{\text{S}} - s_{\text{E}} = 2{,}60 - 2{,}50 = 0{,}1\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

17.8 a) La machine produit du travail ($W < 0$) grâce à un fluide chauffé ($Q_{\text{c}} > 0$) puis refroidi ($Q_{\text{f}} < 0$) : ainsi, on a $W < 0$; $Q_{\text{f}} < 0$; $Q_{\text{c}} > 0$.

.....

17.8 c) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

17.8 e) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

17.8 g) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

17.9 a) Le fluide d'une centrale est chauffé dans la chaudière (source chaude), passe par la turbine pour produire un travail puis est refroidi dans le condenseur (source froide).

.....

17.9 b) Le fluide d'un réfrigérateur refroidit la source froide en se réchauffant grâce à l'évaporateur, puis le fluide est refroidi dans le condenseur en contact avec l'air extérieur (source chaude).

.....

17.9 c) Le fluide d'une pompe à chaleur réchauffe la source chaude en se refroidissant grâce au condenseur, puis le fluide est réchauffé dans l'évaporateur en contact avec l'air extérieur (source froide).

.....

17.10 a) Loi des nœuds sur les fluides donne $D_{m1} + D_{m2} = D_m$.

.....

17.10 b) On a $\Delta h_1 = q_{2\to1}$ donc $c_p(T - T_1) = q_{2\to1}$.

.....

17.10 c) On a $\Delta h_2 = q_{1\to2}$ donc $c_p(T - T_2) = q_{1\to2}$.

.....

17.10 e) On a $D_m T = D_{m1}T_1 - D_{m2}T_2$ donc $T = \dfrac{D_{m1}T_1 + D_{m2}T_2}{D_m}$.

.....

17.10 f) On a $T = \dfrac{3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} \times 353\,\mathrm{K} + 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} \times 293\,\mathrm{K}}{3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} + 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}} = 311\,\mathrm{K} = 38\,^\circ\mathrm{C}$.

.....

17.11 a) La turbine est isolée thermiquement et horizontale, donc $q_e = 0$ et $\Delta e_p = 0$. Les températures sont identiques en entrée et sortie, donc d'après la loi de Joule $\Delta h = 0$. Le premier principe s'écrit donc $\Delta e_c = w_i$.

.....

17.11 b) Comme $\Delta T = 0$, cela signifie que $\Delta H = 0$ (deuxième loi de Joule) et que : $W_f = -W_i = -\Delta E_c = \dfrac{1}{2}mc_1^2$.

.....

17.11 c) La masse traversant la turbine pendant 1 heure est de 1 800 kg, d'où

$$W_f = \frac{1}{2} \times 1\,800\,\mathrm{kg} \times (100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 = 9 \times 10^6\,\mathrm{J}\,.$$

.....

17.12 a) Le transfert thermique q_e est nul, et on peut supposer e_c = cte et e_p = cte (vitesse négligeables et variation d'altitude faible).

.....

17.12 c) La deuxième identité thermodynamique s'écrit :

$$\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$$

avec ici $\mathrm{d}s = 0$ car l'écoulement est isentropique. On a donc $\Delta h = v(p_2 - p_1)$.

.....

17.12 d) Finalement, on a $w_i = v(p_2 - p_1)$.

.....

17.12 e) Numériquement, on a $w_i = 1{,}99\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

.....

Fiche nº 18. Signaux

Réponses

18.1 a) 0

18.1 b) ..... $\frac{1}{2}$

18.1 c) 0

18.2 a) c

18.2 b) ..... d

18.3 a) ..... instable

18.3 b) ..... stable

18.3 ..... instable

18.3 ..... stable

18.3 ..... instable

18.4 a) c

18.4 b) ..... a

18.4 c) ..... a

18.5 a) ..... a

18.5 b) c

18.5 c) c

18.6 a) ..... 0,75 A

18.6 b) ..... 4 V

18.6 c) ..... 333 Hz

18.6 d) ..... a

18.6 e) ..... b

18.6 f) ..... a

18.6 g) ..... 2,56 mH

18.7 a) ..... b

18.7 b) ..... a

18.7 c) ..... b

18.7 d) ..... 1,6 μF

18.8 a) ..... b

18.8 b) c

18.9 a) ..... b

18.9 b) ..... a

18.9 c) c

18.9 d) ..... 50 Ω

18.9 e) ..... 7 mH

18.10 a) ..... $4x^0$

18.10 b) ..... $4x^{-2}$

18.10 c) ..... $1x^0$

18.10 d) ..... $\frac{2}{3}x^0$

18.10 e) ..... $\frac{2}{5}x^1$

18.10 f) ..... $\frac{3}{5}x^0$

18.11 a) ..... 1 ms

18.11 b) ..... 2 V

18.11 c) ..... 1 kHz

18.11 d) ..... b

18.11 e) 0

18.11 f) ..... a et d

18.11 g) ..... a

18.12 a) ..... 20 ms

18.12 b) ..... 0,1 V

18.12 c) ..... 0,1 V

18.12 d) ..... 50 Hz

18.12 e) ..... 0,1 V

18.12 f) ..... b et c

18.12 g) ..... a

18.13 a) ..... 1 Hz

18.13 b) ..... 16,7 Hz

18.13 c) ..... 12,5 Hz

18.13 d) ..... 9,61 Hz

18.13 e) ..... a

18.13 f) .. Repliement de spectre

18.13 g) ..... d

18.14 a) ..... a

18.14 b) .. $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0 s = H_0 \omega_0 e$

18.14 c) ..... b

18.15 a) ..... B

18.15 b) ..... A

18.15 c) C

18.15 d) ..... E

18.15 e) ..... D

18.16 a) ..... 0,1 ms

18.16 b) ..... 0,005 ms

18.16 c) ..... 10 V

18.16 d) 0,6

18.16 e) ..... 200 kHz

18.16 f) ..... 10 kHz

Corrigés

18.1 a) On a $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = 0$ car la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)$ est T-périodique.

.....

18.1 b) Il faut commencer par linéariser le $\cos^2$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

comme la fonction $\cos(2\omega t)$ est périodique de période $\dfrac{T}{2}$.

.....

18.1 c) Il faut faire une intégration par parties. On a

$$\frac{1}{T}\int_0^T t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{t}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

.....

18.2 On commence par remarquer que les deux graphiques tendent vers une valeur non nulle : cela élimine la proposition (b) et les propositions (a) et (f) qui ne sont pas stables.

La proposition (e) est l'équation d'un oscillateur harmonique : elle ne correspond pas aux graphiques.

Le signal $s_1(t)$ présente une discontinuité de sa pente : il est donc régi par une équation différentielle du premier ordre : c'est la proposition (c).

On en déduit que le signal $s_2(t)$ est associé à la proposition (d).

.....

18.3 Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants une condition nécessaire de stabilité, et suffisante pour les systèmes du premier et second ordre, est que tous les coefficients de l'équation différentielle soient de même signe.

.....

18.4 En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : on a $u_C\big(0^-\big) = E$, $i\big(0^-\big) = i_C\big(0^-\big) = 0$.

La bobine impose la continuité de l'intensité électrique qui la traverse et le condensateur la tension à ses bornes : on a $u_C\big(0^+\big) = E, i\big(0^-\big) = 0$. Comme $u_R = u_C$, on a donc : $i_R\big(0^+\big) = \dfrac{E}{R}$ soit d'après la loi des nœuds

$$i_C\big(0^+\big) = -i_R\big(0^+\big) = -\frac{E}{R}.$$

En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : ainsi, on a $u_C(+\infty) = \dfrac{R}{R+r}E$, $i\big(0^-\big) = i_R\big(0^-\big) = \dfrac{E}{R+r}$ et $i_C\big(0^-\big) = 0$.

.....

18.5 L'interrupteur étant ouvert et le régime permanent étant atteint : $i_2\big(0^-\big) = 0$ et $i_1\big(0^-\big) = i\big(0^-\big) = \dfrac{E_1}{2R}$.

La bobine impose la continuité du courant qui la traverse : $i\big(0^+\big) = i\big(0^-\big) = \dfrac{E_1}{2R}$. Pour déterminer i_1 et i_2 il nous faut deux équations : on utilise la loi des mailles dans la grande maille et la loi des nœuds :

$$\begin{cases} i_1\big(0^+\big) + i_2\big(0^+\big) = \dfrac{E_1}{2R} \\ E_1 - Ri_1\big(0^+\big) = E_2 - Ri_2\big(0^+\big) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} i_1\big(0^+\big) + i_2\big(0^+\big) = \dfrac{E_1}{2R} \\ i_1\big(0^+\big) - i_2\big(0^+\big) = \dfrac{E_1 - E_2}{R} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} i_1\big(0^+\big) = \dfrac{3E_1 - 2E_2}{4R} \\ i_2\big(0^+\big) = \dfrac{2E_2 - E_1}{4R}. \end{cases}$$

En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. On a donc directement $i_1(+\infty) = \dfrac{E_1}{R}$, $i_2(+\infty) = \dfrac{E_2}{R}$ donc $i(+\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{R}$. On a donc le système :

$$\begin{cases} i_1(+\infty) + i_2(+\infty) & = i(+\infty) \\ E_1 - Ri_1(+\infty) & = Ri(+\infty) \\ E_2 - Ri_2(+\infty) & = Ri(+\infty). \end{cases}$$

En sommant les deux dernières lignes, on a directement $i(+\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$. On a alors le système :

$$\begin{cases} i_1(+\infty) + i_2(+\infty) & = \dfrac{E_1 + E_2}{3R} \\ i_1(+\infty) - i_2(+\infty) & = \dfrac{E_1 - E_2}{R}. \end{cases}$$

On a alors $i_1(+\infty) = \dfrac{2E_1 - E_2}{3R}$ et $i_2(+\infty) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$.

.....

18.6 g) Le module de $\underline{Z}$ est tel que $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{4\,\text{V}}{0{,}75\,\text{A}} = \dfrac{16}{3}\,\Omega$. Or, on a $|\underline{Z}| = L\omega$; donc

$$L = \frac{|\underline{Z}|}{\omega} = \frac{16/3\,\Omega}{2\pi\dfrac{1\,000}{3}} = \frac{8 \times 10^{-3}}{\pi} = 2{,}56 \times 10^{-3}\,\text{H} = 2{,}56\,\text{mH}.$$

.....

18.7 d) Graphiquement, on trouve $T = 1\,\text{ms}$. Le module de l'impédance est $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{2\,\text{V}}{0{,}02\,\text{A}} = 100\,\Omega$. Donc,

$$C = \frac{1}{|\underline{Z}|\omega} = \frac{T}{2\pi|\underline{Z}|} \simeq 0{,}16\frac{10^{-3}\text{s}}{100\,\Omega} = 1{,}6\,\mu\text{F}.$$

.....

18.8 On a une association de dipôles en série : $\underline{Z} = R + \text{j}L\omega$. Comme $|\underline{Z}|$ est le rapport des amplitudes de la tension et de l'intensité électrique, on a $|\underline{Z}|^2 = R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2$.

L'argument de l'impédance vaut $\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$.

.....

18.9 L'analyse graphique donne :

$$U_0 = 8\,\text{V}, \quad I_0 = 100\,\text{mA}, \quad T = 0{,}7\,\text{ms} \quad \text{et} \quad \delta t_{u/i} = -100\,\mu\text{s}.$$

La pulsation est donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{7} \cdot 10^4 = 8{,}97 \times 10^3\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique :

$$\varphi = -2\pi\frac{\delta t}{T} = 2\pi\frac{1/10}{0{,}7} = \frac{2\pi}{7} = \frac{2}{7}\pi$$

À partir des relevés graphiques, on a le système :

$$\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 & = (80)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} & = \tan\left(\dfrac{2}{7}\pi\right). \end{cases}$$

On a donc $R^2\left[1 + \tan^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\right] = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{0{,}1}\right)^2$ donc $R = \dfrac{U_0/I_0}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)}} = \dfrac{U_0}{I_0}\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) = 50\,\Omega$.

On en déduit $L = 7\,\text{mH}$.

.....

18.11 c) La période étant de $T = 1\,\text{ms}$, la fréquence du fondamental est $f = \dfrac{1}{T} = 1\,\text{kHz}$.

.....

18.11 d) La fonction $u(t)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, T/2]$: cela élimine les propositions (a) et (d).

En $T/2$, on a $u(T/2) = -U$: c'est donc la réponse (b).

.....

18.11 e) La valeurs a_0 correspond à la valeur moyenne : elle est donc nulle ici.

.....

18.11 f) Par intégration par parties, on trouve :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} U\left(1-\frac{4t}{T}\right)\cos(2\pi fnt)\,\mathrm{d}t = \frac{4U}{T}\left(\left[\left(1-\frac{4t}{T}\right)\frac{\sin(2\pi fnt)}{2\pi fn}\right]_0^{T/2} + \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\frac{\sin(2\pi fnt)}{2\pi fn}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{4U}{T}\left(0 + \frac{4}{T}\left[-\frac{\cos(2\pi fnt)}{(2\pi fn)^2}\right]_0^{T/2}\right) = \frac{16U}{4\pi^2T^2f^2n^2}\times(-\cos(\pi n)+1) = \frac{4U}{\pi^2n^2}(1-\cos(\pi n))$$

On a donc $a_n = 0$ si n est pair et $a_n = \dfrac{8U}{\pi^2n^2}$.

.....

18.12 d) La fréquence fondamentale est $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{20\,\text{ms}} = 50\,\text{Hz}$.

.....

18.12 e) Par définition, on a $\underline{c_0} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t = s_0 = 0{,}1\,\text{V}$.

.....

18.12 f) Pour ce signal carré particulier, numériquement, $s_0 = S_\text{m}$. Ainsi, $s(t\in[0,T/2]) = s_0 + S_\text{m} = 2S_\text{m}$ et $s(t\in[T/2,T]) = 0$. Il vient alors :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2S_\text{m}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,2\pi\nu\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,2\pi\nu\,t}\right]_0^{T/2}$$
$$= \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\pi\overbrace{\nu T}^{=1}} - 1\right] = \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{2S_\text{m}}{\mathrm{i}n\pi\nu} & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$$

.....

18.12 g) Les harmoniques de rang pair doivent êtres nulles, ce qui exclut le cas (b).

De plus, numériquement, on a $s_0 = S_\text{m}$ et $2/\pi \approx 0,64 < 1$, d'où $s_0 > 2s_0/\pi = 2S_\text{m}/\pi$: cette relation n'est pas vérifié dans le cas du spectre (c).

.....

18.13 b) La période T_e d'échantillonnage est la durée entre deux points d'acquisition successifs. La fréquence d'échantillonnage f_e vaut donc :

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N}{T_\text{max}} = \frac{500}{30} = 16{,}7\,\text{Hz}.$$

.....

18.13 e) Le spectre (a) car les autres font apparaître des pics « fantômes » car la $\dfrac{f_e}{2}$ est inférieure à la fréquence des harmoniques.

.....

18.13 g) C'est le critère de Shannon-Nyquist.

.....

18.14 a) On a $\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} H_0$ et $\underline{H} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\omega_0 H_0}{\mathrm{j}\omega} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ le filtre est donc un passe-bas. Le dénominateur étant d'ordre 1, c'est un passe-bas d'ordre 1.

.....

18.14 b) On a

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{donc} \quad \left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{s} = H_0\underline{e}.$$

Multiplier par jω est équivalent à dériver en réel ; on trouve donc l'équation différentielle $s + \dfrac{1}{\omega_0}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = H_0 e$.

.....

18.15 a) Le pré-amplificateur ne change que l'amplitude du signal pas son spectre : le spectre B correspond à $u_2(t)$.

.....

18.15 b) Le filtre passe-bande à une bande passante assez étroit pour ne garder que $f_p - f_m$, f_p et $f_p + f_m$: le spectre A correspond donc à $u_3(t)$.

.....

18.15 d) Le multiplieur donne en sortie :

- pour une fréquence en entrée de f_p :

$$k(A\cos(2\pi f_p t)) \times U_p\cos(2\pi f_p t) = kAU_p\cos^2(2\pi f_p t) = kAU_p\frac{1+\cos(2\pi[2f_p]t)}{2}.$$

- pour une fréquence en entrée de $f_p \pm f_m$:

$$\begin{aligned} k(A\cos(2\pi[f_p \pm f_m]t)) \times U_p\cos(2\pi f_p t) &= kAU_p\cos(2\pi[f_p \pm f_m]t)\cos(2\pi f_p t) \\ &= kAU_p\frac{\cos(2\pi[f_m]t)+\cos(2\pi[2f_p+f_m]t)}{2}. \end{aligned}$$

Le signal $u_4(t)$ correspond au spectre E.

.....

18.16) La tension $u_+(t)$ oscille entre 4 V et 16 V. En identifiant les valeurs extrêmes à partir de son expression, on a le système :

$$\begin{cases} U_p(1+m) = 16\,\mathrm{V} \\ U_p(1-m) = 4\,\mathrm{V} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} U_p = 10\,\mathrm{V} \\ m = 0{,}6. \end{cases}$$

.....

Fiche n° 19. ALI

Réponses

19.1 a) ..... ⓐ

19.1 b) ..... ⓑ

19.1 c) ..... ⓐ

19.1 d) ..... ⓒ

19.2 a) ..... $i_1 = i_2 + i_1'$

19.2 b) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_2}{R_2} + C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$

19.2 c) ..... $i_1 = -i_2'$

19.2 d) ..... $\dfrac{V_\mathrm{D} - V_\mathrm{A}}{R_1} = i_2' = C_2 \dfrac{\mathrm{d}V_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t}$

19.3 a) ..... ⓑ

19.3 b) ..... $i_2 + i_4 = 0$

19.3 c) ..... ⓑ

19.3 d) ..... $i_5 + i_6 = 0$

19.3 e) ..... ⓒ

19.4 a) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\mathrm{s}}{R_1 + R_2}$

19.4 b) ..... $i_1 = i_2 + i_3$

19.4 c) ..... $i_2 = \dfrac{u_\mathrm{e}}{R}$

19.4 d) ..... $i_3 = C \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}$

19.4 e) .... $u_\mathrm{s} = u_R + u_C + u_\mathrm{e} = Ri_1 + u_C + u_\mathrm{e}$

19.4 f) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = R \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i_1}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}$

19.4 g) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = RC \dfrac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2} + 3 \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} \dfrac{1}{RC} u_\mathrm{e}$

19.5 a) ..... $i_1 + i_2 = i_3$

19.5 b) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = -\dfrac{u_\mathrm{s}}{R_3}$

19.6 a) ..... $i_1 = i_3$

19.6 b) ..... $i_2 = i_4$

19.6 c) ..... $V_+ = \dfrac{R_4}{R_2 + R_4} u_2$

19.6 d) ..... $V_- = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3} u_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_3} u_\mathrm{s}$

19.7 a) ..... $i_\mathrm{e} + i_C + i_2 = 0$

19.7 b) ..... $i_C + i_1 = 0$

19.7 c) ..... $-i_\mathrm{e} + \dfrac{v_\mathrm{e} - V_\mathrm{B}}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1 (v_\mathrm{e} - V_\mathrm{C}) = 0$

19.7 d) ..... ⓑ et ⓓ

19.7 e) ..... ⓒ

19.8 a) 0

19.8 b) ..... $\dfrac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} + \mathrm{j}C\omega \underline{u_\mathrm{s}} = 0$

19.8 c) ..... $-\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$

19.8 d) ..... $u_\mathrm{e}(t) + RC \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$

19.8 e) ..... ⓑ

19.8 f) ..... R

19.9 a) 0

19.9 b) ..... $\mathrm{j}C\omega \underline{u_\mathrm{e}} + \dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$

19.9 c) ..... $LC\omega^2$

19.9 d) ..... $u_\mathrm{s}(t) = -LC \dfrac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2}$

19.9 e) ..... ⓒ

19.9 f) ..... $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

19.10 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

19.10 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

19.11 a) ..... $\boxed{v_\text{s} = v_\text{e}}$

19.11 b) ..... $\boxed{v_\text{s} = -v_\text{e}}$

19.12 a) ..... $\boxed{1}$

19.12 b) ..... $\boxed{-1}$

19.12 c) ..... $\boxed{1}$

19.12 d) ..... $\boxed{-2\arctan(RC\omega)}$

19.12 e) ..... $\boxed{E\sin(\omega t)}$

19.13 a) ..... $\boxed{R_2}$

19.13 b) ..... $\boxed{R_1}$

19.13 c) ..... $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1} \text{ et } \omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_1}}$

19.13 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

19.1 a) La rétroaction est négative donc l'ALI fonctionne en régime linéaire.

19.1 b) La rétroaction est positive donc l'ALI fonctionne en régime saturé.

19.1 c) La rétroaction est négative donc l'ALI fonctionne en régime linéaire.

19.1 d) Il y a une double rétroaction donc on ne peut pas prédire le régime de fonctionnement de l'ALI.

19.2 a) La loi des nœuds en D s'écrit bien sûr $i_1 = i_2 + i_1'$.

19.2 b) La loi des nœuds en D s'écrit alors $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_2}{R_2} + C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$.

19.2 c) L'intensité i_+ est nulle et $i_1 = -i_2'$.

19.2 d) On a ainsi : $\dfrac{V_\text{D} - V_\text{A}}{R_1} = i_2' = C_2\dfrac{\mathrm{d}V_\text{A}}{\mathrm{d}t}$.

19.3 b) Dans le modèle de l'ALI idéal, les courants de polarisation sont nuls. Ainsi, $i_1 = i_3 = 0$.

19.3 d) Dans le modèle de l'ALI idéal, les courants de polarisation sont nuls. Ainsi, $i_7 = 0$.

19.3 e) La loi d'Ohm donne $\dfrac{V_\text{C} - V_\text{B}}{R} + \dfrac{V_\text{C} - V_\text{S}}{R} = 0$.

19.4 a) L'intensité est nulle à l'entrée non inverseuse et l'intensité du courant est donc identique dans R_1 et R_2. On reconnaît donc un pont diviseur de tension. La relation demandée est donc : $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\text{s}}{R_1 + R_2}$.

19.4 b) On a $i_1 = i_2 + i_3$.

19.4 c) Cette fois, on a $i_2 = \dfrac{u_\text{e}}{R}$.

19.4 d) Ici, on a $i_3 = C\dfrac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t}$.

19.4 g) La relation précédente fournit : $\dfrac{\mathrm{d}u_\text{s}}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}i_2 + i_3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i_2 + i_3}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t}$, dont on déduit :

$$\frac{\mathrm{d}u_\text{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}^2u_\text{e}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}u_\text{e} + \frac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t}.$$

Finalement, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}u_\text{s}}{\mathrm{d}t} = RC\dfrac{\mathrm{d}^2u_\text{e}}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_\text{e}$.

19.5 a) Le courant à l'entrée inverseuse étant nulle, la loi des nœuds en D s'écrit $i_1 + i_2 = i_3$.

19.5 b) L'ALI étant idéal, le potentiel de l'entrée inverseuse est égal à celui de l'entrée non inverseuse, donc nul. Ainsi, la relation précédente s'écrit : $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = -\dfrac{u_\text{s}}{R_3}$.

19.6 a) L'intensité entrant à la borne inverseuse étant nulle, on a $i_1 = i_3$.

19.6 b) L'intensité entrant à la borne non-inverseuse étant nulle, on a $i_2 = i_4$.

19.6 c) Le pont diviseur du bas permet d'écrire : $i_2 = \dfrac{u_2}{R_2 + R_4} = \dfrac{V_+ - 0}{R_4}$, soit $V_+ = \dfrac{R_4}{R_2 + R_4}u_2$.

19.6 d) Le pont diviseur du haut permet d'écrire : $i_1 = \dfrac{u_1 - V_-}{R_1} = \dfrac{V_- - u_\text{s}}{R_3}$, soit $V_- = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}u_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_3}u_\text{s}$.

19.7 a) Les courants de polarisation sont nuls dans l'hypothèse de l'ALI idéal. Ainsi, $i_\text{e} + i_C + i_2 = 0$.

19.7 b) Les courants de polarisation sont nuls dans l'hypothèse de l'ALI idéal. Ainsi, $i_C + i_1 = 0$.

19.7 c) On a $-i_\text{e} + \dfrac{v_\text{e} - V_\text{B}}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1(v_\text{e} - V_\text{C}) = 0$.

19.7 d) La tension v_s n'est pas connue ce qui élimine la (c) et comme on peut le voir en question suivante, la loi des nœuds en B ((a)) n'est pas utile.

19.7 e) Le courant i_3 est inconnu.

19.8 a) On sait que pour un ALI idéal en régime linéaire $V_- = V_+$.

Or $V_+ = 0$ car la borne positive est reliée directement à la masse. Donc $V_- = 0$.

19.8 b) D'après la loi des nœuds appliqué au point A, on a : $\underline{i_\mathrm{e}} + \underline{i_C} = \underline{i_-}$ Comme $\underline{u_R} = \underline{u_\mathrm{e}}$, on en déduit

$$\underline{i_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_R}}{\underline{Z_R}} = \frac{\underline{u_\mathrm{e}} - \underline{V_\mathrm{A}}}{R} \qquad \text{et} \qquad \underline{i_C} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{Z_C}} = \big(\underline{u_\mathrm{s}} - \underline{V_\mathrm{A}}\big)\mathrm{j}C\omega.$$

De plus, on sait que pour un ALI idéal $\underline{i_-} = 0$ et on a vu précédemment que $\underline{V_-} = 0 = \underline{V_\mathrm{A}}$. D'où $\frac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{s}} = 0$.

.....

19.8 c) Comme $\frac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} = -\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{s}}$, on a $\underline{H} = \frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = -\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$.

.....

19.8 d) En utilisant la relation de la question 1.8 b) et en passant dans le domaine temporel, on obtient l'équation différentielle suivante : $u_\mathrm{e}(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$.

.....

19.8 e) Le montage est un intégrateur. L'intégration d'un signal en créneau fournit un signal triangulaire : c'est le signal (b) qui est la bonne réponse.

.....

19.8 f) D'après la loi d'Ohm, on a $u_\mathrm{e} = Ri_\mathrm{e}$. Donc $\underline{Z_\mathrm{e}} = R$.

.....

19.9 a) On sait que pour un ALI idéal en régime linéaire $V_- = V_+$. De plus, l'ALI est idéal, donc $i_+ = 0$. Or $V_+ = Ri_+$ d'après la loi d'Ohm. Donc $V_+ = 0$ et $V_- = 0$.

.....

19.9 b) D'après la loi des nœuds appliquée au point A, on a : $\underline{i_\mathrm{e}} + \underline{i_L} = \underline{i_-}$. Or, on a

$$\underline{i_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{Z_C}} = \big(\underline{u_\mathrm{e}} - \underline{V_\mathrm{A}}\big)\mathrm{j}C\omega \qquad \text{et} \qquad \underline{i_L} = \frac{\underline{u_L}}{\underline{Z_L}} = \frac{\underline{u_\mathrm{s}} - \underline{V_\mathrm{A}}}{\mathrm{j}L\omega}.$$

De plus, on sait que pour un ALI idéal $\underline{i_-} = 0$ et on a vu précédemment que $\underline{V_-} = 0 = \underline{V_\mathrm{A}}$. D'où, $\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{e}} + \frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$.

.....

19.9 c) Comme $\frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = -\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{e}}$, on a $\underline{H} = \frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = -\mathrm{j}^2LC\omega^2 = LC\omega^2$.

.....

19.9 d) On a $\underline{u_\mathrm{s}} = -LC(\mathrm{j}\omega)^2\underline{u_\mathrm{e}}$. En passant en régime temporel, on obtient : $u_\mathrm{s}(t) = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2}$.

.....

19.9 e) Le montage suivant est un double dérivateur. Or si on dérive une première fois le signal triangle, cela donne un signal créneau. Si on dérive un signal créneau cela donne un signal nul sauf aux points où le créneau avait des pentes non nulles. Cela correspond au signal (c).

.....

19.9 f) D'après la définition de l'impédance, on a $\underline{Z_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_\mathrm{e}}}{\underline{i_\mathrm{e}}} = \underline{Z_C} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$.

.....

19.10 a) Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert à basses fréquences. On en déduit donc que $i_C = i_1 = 0$, ainsi, le potentiel du point C est nul d'après la loi d'Ohm. L'ALI étant considéré idéal et étudié en régime linéaire, on en déduit que $V_\mathrm{B} = 0$. R_2 est donc parcourue par i_e et soumise à une tension v_e. Le montage est donc équivalent à R_2.

.....

19.10 b) Le condensateur est équivalent à un fil à basses fréquences. On en déduit donc que $V_C = v_e$. Ainsi, l'ALI étant considéré comme idéal et étudié en régime linéaire, $V_B = v_e$, la résistance R_2 est soumise à une tension nulle, elle n'est donc parcourue par aucun courant. Tout le courant i_e passe dans R_1 qui est alors soumise à la tension v_e. Le montage est donc équivalent à R_1.

.....

19.11 a) À basses fréquences, C est équivalent à un interrupteur ouvert et n'est donc parcouru par aucun courant, on en déduit donc, par une loi des nœuds au point B que la résistance qui lui est reliée n'est parcourue par aucun courant non plus. On en déduit donc que $V_B = v_e$ et donc, l'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, $V_A = v_e$ soit $v_s = v_e$, les courants circulant dans les résistances étant nuls.

.....

19.11 b) À hautes fréquences, C est équivalent à un fil. L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, on en déduit donc que $V_A = V_B$. On en déduit donc que $v_s = -v_e$.

.....

19.12 a) À basses fréquences, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = 1$.

.....

19.12 b) À hautes fréquences, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = \dfrac{-\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega} = -1$.

.....

19.12 c) Le gain est donné par le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|1 - \mathrm{j}RC\omega|}{|1 + \mathrm{j}RC\omega|} = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = 1.$$

.....

19.12 d) Le déphasage est donné par l'argument de la fonction de transfert :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega)) = \arg(1 - \mathrm{j}RC\omega) - \arg(1 + \mathrm{j}RC\omega) = -2\arctan(RC\omega).$$

.....

19.12 e) La pulsation du signal est $\omega = 1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. À cette pulsation, le déphasage vaut :

$$\varphi(\omega) = -2\arctan(RC\omega) = -2\arctan(800\,\Omega \times 100\,\mathrm{nF} \times 1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit donc l'expression : $v_s = E\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = E\sin(\omega t)$.

.....

19.13 a) À basses fréquences, l'impédance devient $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{1}{1} = R_2$.

.....

19.13 b) À hautes fréquences, l'impédance devient $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{\mathrm{j}R_1C_1\omega}{\mathrm{j}R_2C_1\omega} = R_1$.

.....

19.13 c) L'impédance peut se mettre sous la forme : $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_1}$.

.....

19.13 d) On a $\omega \ll \omega_2$ donc l'impédance devient : $\underline{Z}(\omega) = R_2(1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega) = R_2 + \mathrm{j}R_1R_2C_1\omega$. On identifie ainsi deux termes, l'impédance est une bobine d'inductance $R_1R_2C_1$ en série avec une résistance R_2.

.....

Fiche n° 20. Oscillateurs électroniques

Réponses

20.1 a) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{u}{\tau}=0$

20.1 b) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 u+\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=0$

20.1 c) $RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 u-\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=A$

20.1 d) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 u+\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=0$

20.2 a) $\mathrm{j}\omega\underline{i}=-\dfrac{\underline{i}}{RC}$

20.2 b) $\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{i}+L^2C^2\underline{i}-(\mathrm{j}\omega)^2\underline{i}=A$

20.3 a) (c)

20.3 b) (e)

20.4 a) (a)

20.4 b) (b)

20.4 c) (a)

20.4 d) (b)

20.5 a) (b)

20.5 b) (a)

20.5 c) (c)

20.5 d) (b)

20.6 a) Vrai

20.6 b) Faux

20.6 c) (b)

20.7 a) (c)

20.7 b) $u_1=\dfrac{u_\mathrm{s}}{A}$

20.7 c) (a)

20.7 d) (b)

20.7 e) $\dfrac{\left(R+\underline{Z_C}\right)^2+R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$

20.7 f) (d)

20.7 g) $\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{3-A}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{R^2C^2}u_\mathrm{s}=0$

20.8 a) (a)

20.8 b) (e)

20.8 c) (a)

20.8 d) (b)

20.9 a) (c)

20.9 b) $\dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_\mathrm{sat}$

20.9 c) $i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

20.9 d) $i=\dfrac{V_\mathrm{sat}-u_C}{R}$

20.9 e) (d)

20.9 f) (c)

20.9 g) (b)

20.9 h) (a)

20.9 i) (c)

20.9 j) (b)

20.10 a) $\dfrac{u_\mathrm{e}}{u_\mathrm{s}}=\dfrac{R_0}{R_0+R_2}$

20.10 b) ..... $\boxed{u_\text{e} - u_\text{s} = R_1 i_\text{e}}$

20.10 c) ..... $\boxed{u_\text{e} = -R_0 \dfrac{R_1}{R_2} i_\text{e}}$

20.10 d) ..... ⓐ

20.10 e) ..... ⓑ

20.10 f) ..... $\boxed{u_\text{e} = R_1 i_\text{e} + V_\text{sat}}$

20.10 g) ..... Caractéristique ①

20.10 h) ..... Caractéristique ③

20.10 i) ..... ⓒ

Corrigés

20.1 a) On remplace une multiplication par $\mathrm{j}\omega$ par une dérivée temporelle. On obtient : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$.

20.1 b) De même, on a ici : $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u + \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

20.1 c) Avec $\omega^2 \underline{u} = -\mathrm{j}^2\omega^2\underline{u} = -(\mathrm{j}\omega)^2\underline{u}$, on obtient : $RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u - \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = A$.

20.1 d) En multipliant par $\mathrm{j}\omega\omega_0$, on obtient : $\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + (\mathrm{j}\omega)^2\underline{u} = \mathrm{j}\omega_0\omega A$. Il vient ensuite :

$$\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0 \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0.$$

20.2 a) On remplace une dérivée temporelle par une multiplication par $\mathrm{j}\omega$: $\mathrm{j}\omega\underline{i} = -\dfrac{\underline{i}}{RC}$.

20.3 a) Seul le filtre passe-bande peut être utilisé.

20.3 b) Le filtre passe-bande atténue, donc il faut amplifier le signal pour compenser.

20.4 a) Les deux coefficients sont de même signe, donc le système est stable : solution en $\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

20.4 b) Les deux coefficients sont de signes contraires, donc le système est instable : solution en $\exp\left(+\dfrac{t}{\tau}\right)$.

20.4 c) Les trois coefficients sont de même signe, donc le système est stable.

20.4 d) Les trois coefficients sont de signes différents, donc le système est instable.

20.5 a) Si le système est stable, il y a amortissement, donc pas d'oscillations.

20.5 b) Pour démarrer, il faut qu'il y ait amplification et non amortissement, ce qui impose que le deuxième coefficient de l'équation différentielle soit négatif.

20.5 c) Les oscillations sinusoïdales sont décrites par l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0$ de pulsation ω_0.

20.5 d) Pour avoir des oscillations parfaitement sinusoïdales, il faut que le produit $\underline{H_a H_f}$ soit égal à 1, ce qui implique $AH_0 = 1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$, soit $H_0 A = 1$ et $\omega = \omega_0$. C'est le critère de Barkhausen.

20.6 c) Si le complexe $\underline{AB}$ vaut 1, son module vaut 1 et son argument vaut 0.

20.7 a) Il y a rétroaction sur les deux bornes inverseuse et non inverseuse : l'ALI fonctionne alternativement en régime linéaire et en régime saturé.

20.7 b) L'intensité est nulle à l'entrée non inverseuse et l'intensité du courant est donc identique dans R_1 et R_2. On reconnaît donc un pont diviseur de tension. La relation demandée est donc : $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_s}{R_1 + R_2}$, soit $u_1 = \dfrac{u_s}{A}$.

20.7 c) On a $\underline{Z_1} = R + \underline{Z_C}$.

20.7 d) Ici, $\dfrac{1}{\underline{Z_2}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\underline{Z_C}} = \dfrac{R + \underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$, d'où : $\underline{Z_2} = \dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}$.

20.7 e) Pour le bloc de droite, on peut appliquer la relation du pont diviseur de tension : on a

$$\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}{\underline{Z_2}} = \frac{R + \underline{Z_C} + \dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}}{\dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}} = \frac{\left(R + \underline{Z_C}\right)^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}.$$

20.7 f) La relation $\dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{\left(R + \underline{Z_C}\right)^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$ s'écrit :

$$\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)^2 + R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{R^2 + \left(\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)^2 + 3\dfrac{R}{\mathrm{j}C\omega}}{R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2 C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}.$$

Comme $u_1 = u_e$, on obtient :

$$\underline{u_s} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2 C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\underline{u_e} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2 C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\frac{1}{A}\underline{u_s}.$$

D'où :

$$\underline{u_s} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2 C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\frac{1}{A}\underline{u_s} \quad \text{donc} \quad \left[(\mathrm{j}\omega)^2 + \frac{1}{R^2C^2} + \frac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3 - A)\right]\underline{u_s} = 0.$$

20.7 g) En transposant en réels, on en déduit $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3 - A}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R^2C^2}u_s = 0$.

20.8 a) Il faut supprimer l'amortissement, donc le premier ordre, d'où $A = 3$.

20.8 b) On a alors $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_s = 0$, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, d'où $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC}$.

20.8 c) Si $A < 3$, la tension va s'amortir lors d'un régime pseudo-périodique jusqu'à une valeur nulle.

20.8 d) Si $A > 3$, la tension va s'amplifier jusqu'à saturation de l'ALI.

20.9 a) Il y a rétroaction sur les deux bornes inverseuse et non inverseuse : on ne peut pas répondre.

20.9 b) L'intensité à l'entrée de la borne non inverseuse étant nulle, le pont diviseur donne :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_\text{s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_\text{sat}.$$

20.9 c) On a : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

20.9 d) On a : $i = \dfrac{u_\text{s} - u_C}{R} = \dfrac{V_\text{sat} - u_C}{R}$.

20.9 e) On a $i = \dfrac{V_\text{sat} - u_C}{R} = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_\text{sat}}{RC}$.

20.9 f) C'est la solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

20.9 g) Le second membre étant constant, la solution particulière est constante.

20.9 h) Le condensateur se charge sous la tension V_sat.

20.9 i) Lorsque le condensateur se charge, V_- augmente, donc ε diminue.

20.9 j) La tension différentielle ε diminue. Au moment où cette tension ε devient négative, l'ALI bascule en saturation négative.

20.10 a) On a $v_+ = v_- = u_\text{e}$ car l'ALI est en régime linéaire. Le pont diviseur de tension en bas donne

$$v_+ = u_\text{e} = u_\text{s} \frac{R_0}{R_0 + R_2}.$$

20.10 b) La relation est obtenue avec la loi d'Ohm aux bornes de R_1.

20.10 c) Avec $i_\text{e} = \dfrac{u_\text{e} - u_\text{s}}{R_1}$, il vient : $u_\text{e} = -R_0 \dfrac{R_1}{R_2} i_\text{e}$.

20.10 d) Pour éviter la saturation : $|u_\text{s}| < V_\text{sat}$.

20.10 e) Les relations $|u_\text{e}| = u_\text{s} \dfrac{R_0}{R_0 + R_2}$ et $|u_\text{s}| < V_\text{sat}$ donnent $|u_\text{e}| < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_\text{sat}$.

20.10 f) En prenant $u_\text{s} = +V_\text{sat}$, on a $u_\text{e} = R_1 i_\text{e} + V_\text{sat}$.

20.10 g) En régime linéaire, la pente est négative $\left(u_e = -\dfrac{R_0 R_1}{dR_2}\right)$: toutes les caractéristiques sont possibles.
En régime saturé, $u_e = R_1 i_e + V_{sat}$: la pente est positive et l'ordonnée à l'origine vaut V_{sat}. Cela élimine la caractéristique (2).

En saturation haute, on a $V_+ > V_-$; donc $u_e = V_- < V_+ = \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

En saturation basse, on a $V_+ < V_-$; donc $u_e = V_- > V_+ = -\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

D'où la condition indiquée dans l'énoncé $u_e < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

Ces conditions imposent la caractéristique (1).

.....

20.10 h) On a toujours les propriétés suivantes :

- En saturation haute, $u_s = +V_{sat}$ et $V_+ > V_-$, donc $u_e = V_- < V_+ = \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.
  Dans ce cas, $i_e = \dfrac{u_e - V_{sat}}{R_1}$ (ordonnée à l'origine négative) : cela correspond à

$$i_e < \frac{\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat} - V_{sat}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{V_{sat}}{R_0 + R_2}.$$

- En saturation basse, $u_s = -V_{sat}$ et $V_+ < V_-$, donc $u_e = V_- > V_+ = -\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.
  Dans ce cas, $i_e = \dfrac{u_e + V_{sat}}{R_1}$ (ordonnée à l'origine positive) : cela correspond à

$$i_e > \frac{-\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat} + V_{sat}}{R_1} = +\frac{R_2}{R_1} \frac{V_{sat}}{R_0 + R_2}.$$

Ces conditions imposent la caractéristique (3).

Plus simplement, on peut également effectuer une symétrie de la caractéristique (1) de la question précédente.

.....

20.10 i) C'est bien sûr dans la zone centrale que le dipôle se comporte comme une résistance négative.

.....

Fiche n° 21. Physique quantique

Réponses

21.1 a) ..... $\boxed{1{,}9 \times 10^{-34}\,\mathrm{m}}$

21.1 b) ..... $\boxed{7 \times 10^{-21}\,\mathrm{m}}$

21.1 c) ..... $\boxed{8 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}}$

21.1 d) ..... $\boxed{2{,}5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}}$

21.1 e) ..... $\boxed{\text{c}}$ et $\boxed{\text{d}}$

21.2 a) ..... $\boxed{\frac{1}{2}}$

21.2 b) ..... $\boxed{\frac{3}{4}}$

21.2 c) ..... $\boxed{\frac{5-2\sqrt{6}}{12}}$

21.2 d) ..... $\boxed{\frac{11-2\sqrt{6}}{12}}$

21.3 a) ..... $\boxed{A = \frac{1}{2a}}$

21.3 b) ..... $\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{b}}}$

21.3 c) ..... $\boxed{A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}}$

21.4 a) ..... $\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{a}}}$

21.4 b) ..... $\boxed{A = \frac{1}{2\sqrt{a}}}$

21.4 c) ..... $\boxed{A = \sqrt{\frac{3}{b}}}$

21.5 ..... $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{c}}$

21.6 a) ..... $\boxed{0}$

21.6 b) ..... $\boxed{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$

21.6 c) ..... $\boxed{\text{a}}$

21.6 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

21.6 e) ..... $\boxed{|\Psi(x,t)|^2 = A^2}$

21.6 f) ..... $\boxed{\text{oui}}$

21.7 a) ..... $\boxed{A = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}}$

21.7 b) ..... $\boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}}$

21.7 c) ..... $\boxed{0}$

21.8 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

21.8 b) ..... $\boxed{A = 2\alpha^{3/2}}$

21.8 c) ..... $\boxed{1 - 5\mathrm{e}^{-2}}$

21.9 a) ..... $\boxed{-\frac{2m}{\hbar^2} E \varphi_{\mathrm{I}}(x)}$

21.9 b) .. $\boxed{A_{\mathrm{I}} \cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}x\right) + B_{\mathrm{I}} \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}x\right)}$

21.9 c) ..... $\boxed{-\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})\varphi_{\mathrm{II}}(x)}$

21.9 d) ..... $\boxed{\begin{array}{r} A_{\mathrm{II}} \cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_{\mathrm{II}})}x\right) \\ +B_{\mathrm{II}} \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_{\mathrm{II}})}x\right) \end{array}}$

21.9 e) ..... $\boxed{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}} - E)\varphi_{\mathrm{III}}(x)}$

21.9 f) ..... $\boxed{\begin{array}{r} A_{\mathrm{III}} \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x} \\ +B_{\mathrm{III}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x} \end{array}}$

21.9 g) ..... $\boxed{B_{\mathrm{III}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}}$

21.10 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

21.10 b) ..... $\boxed{A_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}} \cos(Ka)}$

21.10 c) ..... $\boxed{QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

21.10 d) ..... $\boxed{A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)}$

21.10 e) ..... $\boxed{QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

21.10 f) ..... $\boxed{A_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{III}}}$

21.10 g) ..... $\boxed{\dfrac{Q}{K} = \tan(Ka)}$

21.11 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

21.11 b) ..... $\boxed{A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = -A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

21.11 c) ..... $\boxed{QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)}$

21.11 d) ..... $\boxed{A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

21.11 e) ..... $\boxed{-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)}$

21.11 f) ..... $\boxed{A_{\mathrm{I}} = -A_{\mathrm{III}}}$

21.11 g) ..... $\boxed{-\dfrac{K}{Q} = \tan(Ka)}$

21.12 a) ..... $\boxed{\dfrac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}}$

21.12 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

21.12 c) ..... $\boxed{\text{b}}$

21.12 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

21.13 a) ..... $\boxed{1{,}4 \cdot 10^{-4}}$

21.13 b) ..... $\boxed{1{,}4\,\mu\mathrm{A}}$

21.13 c) ..... $\boxed{\text{b}}$

21.13 d) ..... $\boxed{1{,}7 \times 10^{-193}\,\mathrm{A}}$

Corrigés

21.1 b) Attention à la conversion de la masse m du grain de pollen : on a $m = 5 \times 10^{-12}\,\mathrm{kg}$.

.....

21.1 c) On a $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m \times v} = \dfrac{6{,}6 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \dot{s}^{-1}} \cdot 3\,600\,\mathrm{s \cdot h}}{3 \times 10^{-21}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot h}} = 8 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$.

.....

21.1 d) On a $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h \times \mathcal{N}_A}{M \times v} = \dfrac{6{,}6 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \dot{s}^{-1}} \times 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} \times 3\,600\,\mathrm{s \cdot h}}{32{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \times 1\,800 \times 10^{3}\,\mathrm{m \cdot h}} = 2{,}5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

.....

21.1 e) On a, pour (a) : $10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} > 1{,}9 \times 10^{-32}\,\mathrm{m}$; pour (b) : $5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} > 7 \times 10^{-19}\,\mathrm{m}$; pour (c) $4{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} < 8 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$; pour (d) $2{,}9 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} < 2{,}5 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$.
Le virus de l'hépatite B ainsi que la molécule de $\mathrm{O_2}$ peuvent donc être qualifiés de quantiques.

.....

21.2 a) On obtient $|\varphi_1(M)|^2 = \dfrac{1}{2}$.

.....

21.2 b) Avec l'ouverture des fentes n° 1 et n° 2, on obtient

$$|\varphi_1 + \varphi_2|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\varphi_1 \varphi_2^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Il est également possible de raisonner à l'aide de la définition du module d'un nombre complexe :

$$|\varphi_1 + \varphi_2|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right|^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

.....

21.2 c) Avec l'ouverture des fentes n° 2 et n° 3, on obtient

$$|\varphi_2+\varphi_3|^2=|\varphi_2|^2+|\varphi_3|^2+2\,\mathrm{Re}(\varphi_2\varphi_3^*)=\frac14+\frac16+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\times\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt6}\right)=\frac{5}{12}+2\left(-\frac{\sqrt6}{12}\right)=\frac{5-2\sqrt6}{12}.$$

En effet, on a $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=-1$ et $\dfrac{1}{\sqrt6}=\dfrac{\sqrt6}{6}$.

.....

21.2 d) Avec l'ouverture de toutes les fentes, on obtient

$$\begin{aligned}|\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3|^2&=|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2+|\varphi_3|^2+2\,\mathrm{Re}(\varphi_1\varphi_2^*+\varphi_1\varphi_3^*+\varphi_2\varphi_3^*)\\&=\frac12+\frac14+\frac16+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt8}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{12}}+\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{24}}\right)=\frac{11}{12}+2\left(\frac{-1}{\sqrt{24}}\right)=\frac{11-2\sqrt6}{12}.\end{aligned}$$

.....

21.3 a) Calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|/a}\,\mathrm{d}x=2A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x/a}\,\mathrm{d}x=2A\big[-a\mathrm{e}^{-x/a}\big]_0^{+\infty}=2Aa=1.$$

Donc, on a $A=\dfrac{1}{2a}$.

.....

21.3 b) De même, calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2|x|/b}\,\mathrm{d}x=2A^2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x/b}\,\mathrm{d}x=2A^2\Big[-\frac{b}{2}\mathrm{e}^{-2x/a}\Big]_0^{+\infty}=A^2b=1.$$

Donc, on a $A=\dfrac{1}{\sqrt b}$.

.....

21.3 c) De même, calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=A^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}=\frac43A^2a=1\quad\text{donc}\quad A=\frac12\sqrt{\frac3a}.$$

.....

21.4 a) De même, calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\int_0^a\cos^2\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{A^2}{2}\int_0^a\Big(1+\cos\Big(\frac{2\pi x}{a}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{A^2}{2}\Big[x+\frac{a}{2\pi}\sin\Big(\frac{2\pi x}{a}\Big)\Big]_0^a=\frac{A^2a}{2}=1.$$

Donc, on a $A=\sqrt{\dfrac{2}{a}}$.

.....

21.4 b) Tout d'abord, calculons la densité de probabilité de présence $|\varphi(x)|^2$: on a

$$|\varphi(x)|^2=\varphi(x)\varphi^*(x)=A^2\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/a}+1\big)\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x/a}+1\big)=2A^2\Big(1+\cos\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\Big).$$

Passons à la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=2A^2\int_{-a}^{a}\Big(1+\cos\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x=2A^2\Big[x+\frac{a}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\Big]_{-a}^{a}=4A^2a=1.$$

Ainsi, on a $A=\dfrac{1}{2\sqrt a}$.

.....

21.4 c) Par décomposition, la probabilité de présence P dans tout l'espace s'écrit

$$P = A^2 \int_0^a \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x + A^2 \int_a^b \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x = A^2 \left[\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a + \frac{A^2}{(b-a)^2}\left[\frac{X^3}{3}\right]_0^{b-a} = \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2(b-a)}{3},$$

où on utilise le changement de variable $X = b - x$. La normalisation de la probabilité donne $A = \sqrt{\dfrac{3}{b}}$.

.....

21.5 En mécanique quantique, un état stationnaire est représenté par une fonction d'onde dont la densité de probabilité de présence $|\Psi(x,t)|^2$ est indépendante du temps.

(a) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \neq f(t)$.

(b) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \cos^2(kx - \omega t) = f(x,t)$.

(c) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \cos^2(kx) \neq f(t)$.

(d) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \cos^2(kx)\cos^2(\omega t) = f(x,t)$.

(e) $|\Psi(x,t)|^2 = 2A^2(1 + \cos((\omega_2 - \omega_1)t)) = f(t)$.

Ainsi, les fonctions d'onde (a) et (c) représentent des états stationnaires.

.....

21.6 a) La grandeur $V(x,t)$ représente l'énergie potentielle. Pour une particule libre, elle est nulle.

.....

21.6 c) Seule la forme $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ permet de retrouver, avec les bons signes, l'énergie totale d'une particule quantique : $\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} + V = \hbar\omega$, où $V = 0$ puisqu'il s'agit d'une particule libre.

.....

21.6 d) La fonction d'onde s'exprime comme une fonction de la forme $f(x - ct)$, il s'agit d'une onde progressive suivant les x croissants.

.....

21.6 f) La densité de probabilité de présence $|\Psi(x,t)|^2$ ne dépend pas du temps alors l'état est stationnaire.

.....

21.7 a) Calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x = A^2 \int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} (1 + \cos(2\alpha x))\,\mathrm{d}x = A^2 \left[x + \frac{1}{2\alpha}\sin(2\alpha x)\right]_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} = \frac{A^2\pi}{2\alpha} = 1.$$

Donc, on a $A = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\pi}}$.

.....

21.7 b) Pour calculer cette probabilité, reprenons le calcul précédent en changeant les bornes d'intégration :

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{4\alpha}} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{A^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4\alpha}} (1 + \cos(2\alpha x))\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\pi}\left[x + \frac{1}{2\alpha}\sin(2\alpha x)\right]_0^{\frac{\pi}{4\alpha}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}.$$

.....

21.7 c) Le calcul de la position moyenne n'est pas nécessaire. Il suffit de remarquer que la densité de probabilité de présence est paire dans l'intervalle. Par conséquent, la position moyenne est nulle : $\langle x \rangle = 0$.

.....

21.8 a) Le calcul de la probabilité de présence dans tout l'espace s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Il s'agit donc de la réponse (b).

.....

21.8 b) La normalisation de la fonction d'onde impose

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = A^2 \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x = 1.$$

Calculons l'intégrale, à l'aide d'une intégration par parties : on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^2}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x}{\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x\right) = 0 - \frac{1}{4\alpha^3}\left[\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\alpha^3}.\end{aligned}$$

Il vient, par normalisation, $A = 2\alpha^{3/2}$.

.....

21.8 c) La probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[0, 1/\alpha]$ se détermine par

$$P = \int_0^{1/\alpha} |\Psi(x,t)|^2 = 4\alpha^3 \int_0^{1/\alpha} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x.$$

Le calcul est similaire au cas précédent en remplaçant le borne supérieure. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/\alpha} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^2}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{1/\alpha} + \int_0^{1/\alpha} \frac{x}{\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\alpha^3} + \frac{1}{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{1/\alpha} + \int_0^{1/\alpha} \frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\alpha^3} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\alpha^3} - \frac{1}{4\alpha^2}\left[\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{1/\alpha} = \frac{1}{4\alpha^3}\left(1 - 5\mathrm{e}^{-2}\right).\end{aligned}$$

Finalement, $P = 1 - 5\mathrm{e}^{-2}$.

.....

21.9 a) Dans la zone I, le potentiel est nul. Donc, d'après l'équation de Schrödinger indépendante du temps,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\varphi_{\mathrm{I}}(x) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E\varphi_{\mathrm{I}}(x).$$

.....

21.9 b) Comme le coefficient $-\dfrac{2m}{\hbar^2}E < 0$, il vient que $\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}} \cos\left(\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}E}x\right) + B_{\mathrm{I}} \sin\left(\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}E}x\right)$.

.....

21.9 c) Dans la zone II, d'après l'équation de Schrödinger indépendante du temps, il vient que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2} + V_{\mathrm{II}}\varphi_{\mathrm{II}}(x) = E\varphi_{\mathrm{II}}(x) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})\varphi_{\mathrm{II}}(x).$$

.....

21.9 d) Comme le coefficient $-\dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}}) < 0$ il vient que

$$\varphi_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}} \cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})}x\right) + B_{\mathrm{II}} \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})}x\right).$$

.....

21.9 e) Dans la zone III, d'après l'équation de Schrödinger indépendante du temps, il vient que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x^2}+V_{\mathrm{III}}\varphi_{\mathrm{II}}(x)=E\varphi_{\mathrm{III}}(x)\quad\text{soit}\quad\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)\varphi_{\mathrm{II}}(x).$$

.....

21.9 f) Comme on a $\dfrac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)>0$, il vient que

$$\varphi_{\mathrm{III}}(x)=A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}+B_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}.$$

.....

21.9 g) Lorsque $x\to+\infty$ dans la zone III, le terme $A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}\to+\infty$, il faut donc le supprimer afin que la fonction d'onde soit de carré sommable. Ainsi, on a $\varphi_{\mathrm{III}}(x)=B_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}$.

.....

21.10 a) En dérivant par rapport à x les expressions données pour les fonctions φ_{I}, φ_{II} et φ_{III}, on trouve directement $\gamma=A_{\mathrm{III}}$, $\alpha=A_{\mathrm{II}}$ et $\beta=A_{\mathrm{I}}$.

.....

21.10 b) On a $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(-Ka)$ donc $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$.

.....

21.10 c) On a $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=-KA_{\mathrm{II}}\sin(-Ka)$ donc $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$.

.....

21.10 e) On a $-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=-KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$ donc $QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$.

.....

21.10 f) D'après les réponses aux questions b) et d), il vient que

$$A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\quad\text{et}\quad A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\quad\text{donc}\quad A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}\quad\text{soit}\quad A_{\mathrm{I}}=A_{\mathrm{III}}.$$

.....

21.10 g) D'après les réponses des questions d) et e), il vient que

$$A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\qquad\text{et}\qquad QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka).$$

Donc, on a $QA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$; et donc $\dfrac{Q}{K}=\tan(Ka)$.

.....

21.11 a) En dérivant par rapport à x les expressions données pour les fonctions φ_{I}, φ_{II} et φ_{III}, on trouve directement $\alpha=A_{\mathrm{III}}$, $\beta=A_{\mathrm{II}}$ et $\delta=A_{\mathrm{I}}$.

.....

21.11 b) On a $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\sin(-Ka)$ donc $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=-A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$.

.....

21.11 c) On a $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(-Ka)$ donc $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$.

.....

21.11 f) D'après les réponses des questions e) et g), il vient que

$$QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\qquad\text{et}\qquad-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka).$$

Donc, on a $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}$; et donc $A_{\mathrm{I}}=-A_{\mathrm{III}}$.

.....

21.11 g) D'après les réponses des questions f) et g), il vient que

$$A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\sin(Ka) \qquad \text{et} \qquad -QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka).$$

Donc, on a $-QA_{\mathrm{II}}\sin(Ka) = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$; et donc $-\dfrac{K}{Q} = \tan(Ka)$.

.....

21.12 a) Grâce à l'approximation donnée dans l'énoncé, on peut écrire :

$$1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2(ka) \approx \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\left(\frac{\mathrm{e}^{ka}}{2}\right)^2 = \frac{V_0^2\mathrm{e}^{2ka}}{16E(V_0-E)}.$$

Le coefficient T s'écrit donc :

$$T = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\mathrm{e}^{-2ka} \quad \text{d'où} \quad T_0 = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}.$$

.....

21.12 b) Le coefficient de transmission est proportionnel à e^{-2ka}. Ainsi, plus la barrière est épaisse (donc plus a est grand), plus la probabilité de transmission diminue.

.....

21.12 c) En explicitant la valeur de k, on voit que le coefficient de transmission est proportionnel à $\mathrm{e}^{-\sqrt{m}}$: plus m augmente, plus la probabilité de transmission diminue. Un proton a donc beaucoup moins de chances d'être transmis qu'un électron.

.....

21.12 d) Si l'énergie E de la particule augmente, k diminue et ainsi, le coefficient de transmission $T = \mathrm{e}^{-2ka}$ augmente.

.....

21.13 a) Dans le cas d'un électron, de masse $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, on trouve $k = 5{,}2 \times 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}$, ce qui conduit à $T = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$.

.....

21.13 b) L'intensité transmise I_t est donnée par $I_t = T \times I = 1,4 \times 10^{-4} \times 10\,\mathrm{mA} = 1{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} = 1{,}4\,\mu\mathrm{A}$.

.....

21.13 c) Même justification que pour la question c) de l'exercice précédent.

.....

21.13 d) En remplaçant par des protons, on obtient $k = 4{,}2 \times 10^{11}\,\mathrm{m}^{-1}$ et $T' = 1,7 \times 10^{-191}$: la probabilité de transmission est extrêmement faible. Par conséquent, $I'_t = T' \times I = 11{,}7 \times 10^{-193}\,\mathrm{A}$.

On peut considérer le courant transmis I'_t nul.

.....

Fiche n° 22. Physique du laser

Réponses

22.1 a) ..... $\boxed{84{,}6\,\mu\text{m}}$

22.1 b) ..... $\boxed{0{,}411\,\text{mm}}$

22.2 a) ..... $\boxed{\dfrac{z_\text{R}^2}{z}}$

22.2 b) ..... $\boxed{w_0}$

22.2 c) ..... $\boxed{\left(k-\dfrac{1}{z_\text{R}}\right)z}$

22.2 d) ..... $\boxed{\exp\left[\text{j}(\omega t-\left(k-\dfrac{1}{z_\text{R}}\right)z)\right]}$

22.2 e) ..... $\boxed{\text{a}}$

22.3 a) ..... $\boxed{z}$

22.3 b) ..... $\boxed{w_0\dfrac{z}{z_\text{R}}}$

22.3 c) ..... $\boxed{kz-\dfrac{\pi}{2}}$

22.3 d) ..... $\boxed{\dfrac{z_\text{R}}{z}\exp\left[\text{j}\left(\omega t-kz+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]}$

22.3 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

22.4 a) ..... $\boxed{\dfrac{w_0}{z_\text{R}}}$

22.4 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

22.5 a) ..... $\boxed{k\dfrac{zr^2}{2(z^2+z_\text{R}^2)}}$

22.5 b) ..... $\boxed{\dfrac{2z_\text{R}}{k}\left(1+\dfrac{z^2}{z_\text{R}^2}\right)}$

22.5 c) ..... $\boxed{\sqrt{\dfrac{\lambda z_\text{R}}{\pi}}}$

22.5 d) ..... $\boxed{E_0 w_0}$

22.6 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

22.6 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

22.7 a) ..... $\boxed{-A_{21}N_2(t)\,\text{d}t}$

22.7 b) ..... $\boxed{N_2^0\exp(-A_{21}t)}$

22.7 c) ..... $\boxed{\tau\ln(2)}$

22.8 a) ..... $\boxed{u_0\Delta\nu}$

22.8 b) ..... $\boxed{\dfrac{\mathcal{J}h\nu}{c\Delta\nu}}$

22.9 a) ..... $\boxed{h\nu\mathcal{J}}$

22.9 b) ..... $\boxed{T^{-1}}$

22.9 c) ..... $\boxed{L^2}$

22.10 a) ..... $\boxed{\sigma\mathcal{J}(N_1(t)-N_2(t))}$

22.10 b) ..... $\boxed{-2\sigma\mathcal{J}D(t)}$

22.10 c) ..... $\boxed{Sc\sigma\mathcal{J}(N_2(t)-N_1(t))\,\text{d}t}$

22.10 d) ..... $\boxed{c\sigma\mathcal{J}D(t)}$

22.10 e) ..... $\boxed{\text{c}}$

22.11 a) ..... $\boxed{\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8}\text{e}^{-x}\,\text{d}x\,\text{d}\theta}$

22.11 b) ..... $\boxed{\mathcal{E}_0\dfrac{\pi D^2}{4\Delta t}}$

22.11 c) ..... $\boxed{P\left(1-\text{e}^{-d^2/D^2}\right)}$

22.11 d) ..... $\boxed{d\sqrt{\dfrac{-1}{\ln\left(1-\frac{P'}{P}\right)}}}$

22.11 e) ..... $\boxed{1{,}50\,\text{cm}}$

22.12 a) ..... $\boxed{\dfrac{P}{f}}$

22.12 b) ..... $\boxed{\dfrac{P}{f\Delta t}}$

22.12 c) ..... $\boxed{\text{b}\,;\,\text{c}\,;\,\text{d}\,;\,\text{a}}$

22.13 a) ..... $\boxed{\dfrac{S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}}$

22.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}}$

22.13 c) ..... $\boxed{\dfrac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2}}$

22.13 d) ..... $\boxed{\dfrac{4 r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}}$

22.14 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

22.14 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

22.14 c) ..... $\boxed{\text{b}}$

22.14 d) ..... $\boxed{\text{d}}$

22.14 e) ..... $\boxed{\text{d}}$

22.14 f) ..... $\boxed{\text{c}}$

22.15 a) ..... $\boxed{I(\nu) = \dfrac{I_{\max}}{1 + m\left(2\pi \frac{nL}{c} \nu\right)^2}}$

22.15 b) ..... $\boxed{\dfrac{c}{2\pi n L \sqrt{m}}}$

22.15 c) ..... $\boxed{\dfrac{c}{\pi n L \sqrt{m}}}$

22.15 d) ..... $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{m}}{2}}$

Corrigés

22.1 a) On écrit $w_0 = \sqrt{\dfrac{\lambda z_\mathrm{R}}{\pi}}$; cela donne : $w_0 = \sqrt{\dfrac{450 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{\pi}} = 84{,}6\,\mu\mathrm{m}$.

.....

22.1 b) On a cette fois $w_0 = \sqrt{\dfrac{10{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{\pi}} = 0{,}411\,\mathrm{mm}$.

.....

22.2 a) Quand $z \ll z_\mathrm{R}$, on a $\dfrac{z_\mathrm{R}}{z} \gg 1$; donc, on a $R(z) \approx \dfrac{z_\mathrm{R}^2}{z}$.

.....

22.2 b) Quand $z \ll z_\mathrm{R}$, on a $\dfrac{z}{z_\mathrm{R}} \ll 1$; il vient $w(z) \approx w_0$.

.....

22.2 c) Quand $z \ll z_\mathrm{R}$, on a $\arctan\left(\dfrac{z}{z_\mathrm{R}}\right) \approx \dfrac{z}{z_\mathrm{R}}$, on obtient alors

$$\phi(r,z) \approx \left(k - \frac{1}{z_\mathrm{R}}\right) z + \frac{k r^2 z}{2 z_\mathrm{R}^2} \approx \left(k - \frac{1}{z_\mathrm{R}}\right) z \qquad \text{car } \frac{k r^2}{z_\mathrm{R}^2} \ll \frac{1}{z_\mathrm{R}}.$$

.....

22.2 d) Pour $z \ll z_\mathrm{R}$, on a montré que $w(z) \approx w_0$. Si $r \ll w_0$, on a $\exp\left(-\dfrac{r^2}{w_0^2}\right) \approx 1$. Comme on a montré à la question c) que $\phi \approx \left(k - \dfrac{1}{z_\mathrm{R}}\right) z$, il vient dès lors :

$$\psi(r,z,t) = \psi(z,t) \approx \exp\left[\mathrm{j}(\omega t - \left(k - \frac{1}{z_\mathrm{R}}\right) z)\right].$$

.....

22.2 e) L'expression de $\psi(z,t)$ établie à la question d) est caractéristique de celle d'une onde plane progressive harmonique. D'où la réponse (a).

.....

22.3 a) Quand $z \gg z_\mathrm{R}$, on a $\dfrac{z_\mathrm{R}}{z} \ll 1$; donc, on a $R(z) \approx z$.

.....

22.3 b) Quand $z \gg z_\mathrm{R}$, on a $w(z) \approx w_0 \dfrac{z}{z_\mathrm{R}}$.

.....

22.3 c) Quand $z \gg z_\mathrm{R}$, on a $\dfrac{z}{z_\mathrm{R}} \gg 1$ et $\arctan\left(\dfrac{z}{z_\mathrm{R}}\right) \approx \dfrac{\pi}{2}$. On obtient ainsi $\phi(r,z) \approx kz - \dfrac{\pi}{2}$ car $\dfrac{kr^2}{2z} \ll 1$.

.....

22.3 d) Quand $z \gg z_\mathrm{R}$, $r \ll w_0$ et $z \gg kr^2$, la vibration scalaire s'écrit :

$$\psi(r,z,t) \approx \psi(z,t) \approx \frac{z_\mathrm{R}}{z} \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

.....

22.3 e) Dans l'expression de la vibration scalaire $\psi(z,t) \approx \dfrac{z_\mathrm{R}}{z} \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$, on reconnaît la forme caractéristique d'une onde progressive harmonique sphérique, dont l'amplitude décroît comme l'inverse de la distance au point source (ici en $z = 0$). D'où la réponse (b).

.....

22.4 a) La divergence angulaire du faisceau est donnée par la relation : $\tan(\theta) = \dfrac{w(z)}{z} \approx \dfrac{w_0}{z_\mathrm{R}}$.

.....

22.4 b) On a montré que $\tan(\theta) \approx \dfrac{w_0}{z_\mathrm{R}}$. La fonction tangente étant croissante sur $[0, \pi/2]$, θ croît quand z_R diminue, d'où la réponse (b).

.....

22.5 a) On écrit $-\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_\mathrm{R})} = -\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z^2+z_\mathrm{R}^2)}(z - \mathrm{j}z_\mathrm{R})$. En remarquant que $(-\mathrm{j}) \times (-\mathrm{j}) = -1$, il vient :

$$-\mathrm{j}k\frac{r^2(z-\mathrm{j}z_\mathrm{R})}{2(z+\mathrm{j}z_\mathrm{R})} = \frac{-kr^2}{2(z^2+z_\mathrm{R}^2)}(z_\mathrm{R} + \mathrm{j}z) \qquad \text{donc} \qquad \theta = k\frac{zr^2}{2(z^2+z_\mathrm{R}^2)}.$$

.....

22.5 b) On réécrit $\exp\left(-\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_\mathrm{R})}\right) = \exp\left(-k\dfrac{r^2 z_\mathrm{R}}{2(z^2+z_\mathrm{R}^2)}\right)\exp(-j\theta)$. On sait que $|\mathrm{e}^{-j\theta}| = 1$.

On forme le module carré de $\exp\left(-\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_\mathrm{R})}\right)$ qui donne

$$\left|\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_\mathrm{R})}\right)\right|^2 = \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \quad \text{avec} \quad w^2(z) = \frac{2\left(z^2+z_\mathrm{R}^2\right)}{kz_\mathrm{R}} = \frac{2z_\mathrm{R}}{k}\left(1 + \frac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}\right).$$

.....

22.5 c) On a montré à la question précédente que $w^2(z) = \dfrac{2z_\mathrm{R}}{k}\left(1 + \dfrac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}\right)$. Comme on a $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, on en déduit que $w^2(z) = \dfrac{\lambda z_\mathrm{R}}{\pi}\dfrac{(z^2+z_\mathrm{R}^2)}{z_\mathrm{R}^2}$. On en déduit $w(z) = w_0\sqrt{1 + z^2/z_\mathrm{R}^2}$ en posant $w_0 = \sqrt{\dfrac{\lambda z_\mathrm{R}}{\pi}}$.

.....

22.5 d) On calcule : $A(z) = E_0\dfrac{z_\mathrm{R}}{\sqrt{(z^2+z_\mathrm{R}^2)}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{1+z^2/z_\mathrm{R}^2}}$. On en déduit, compte tenu de l'expression proposée pour $w(z)$, que $A(z)w(z) = E_0 w_0$.

.....

22.6 a) On calcule : $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha}[\exp(-\alpha t)]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$, soit la réponse (c).

.....

22.6 b) Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^\infty t \times \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\alpha}\exp(-\alpha t)\right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2}$.

.....

22.7 a) Entre les dates t et $t+\mathrm{d}t$, la variation du nombre d'atomes par unité de volume sur le niveau 2 vaut : $\mathrm{d}N_2 = -A_{21}N_2(t)\,\mathrm{d}t$ (avec un signe « $-$ » car le niveau 2 se dépeuple).

.....

22.7 b) En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient l'équation différentielle à variables séparées : $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{N_2} = -A_{21}\,\mathrm{d}t$. En intégrant entre $t=0$ et une date t quelconque, on obtient : $\ln\left(\dfrac{N_2(t)}{N_2(0)}\right) = -A_{21}t$.

Ainsi, on a $N_2(t) = N_2^0\exp(-A_{21}t)$.

.....

22.7 c) On a immédiatement : $N_2\big(T_{1/2}\big) = N_2^0\exp(-A_{21}T_{1/2}) = \dfrac{N_2^0}{2}$, d'où $\exp(-A_{21}T_{1/2}) = \dfrac{1}{2}$, qui donne $-A_{21}T_{1/2} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit encore $-A_{21}T_{1/2} = -\ln(2)$. On obtient finalement : $T_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{A_{21}} = \tau\ln(2)$.

.....

22.8 a) La densité spectrale d'énergie, c'est-à-dire l'énergie électromagnétique par unité de volume et par unité de fréquence étant constante pour les fréquences comprises entre $\nu - \Delta\nu/2$ et $\nu + \Delta\nu/2$ et nulle partout ailleurs, l'énergie volumique s'écrit simplement $\varpi = u_0\Delta\nu$.

.....

22.8 b) Pour répondre, raisonnons pendant la durée $\mathrm{d}t$ au cours de laquelle les photons parcourent dans le milieu la distance $\mathrm{d}\ell = c\,\mathrm{d}t$.

La quantité $\varpi = u_0\Delta\nu$ représente l'énergie volumique du rayonnement.

L'énergie contenue dans le volume $\mathrm{d}V = cS\,\mathrm{d}t$ peut s'écrire sous les deux formes égales

$$\mathrm{d}E = (u_0\Delta\nu)Sc\,\mathrm{d}t = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance du faisceau, reliée à son éclairement par $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{P}}{S}$. On obtient ainsi : $(u_0\Delta\nu)Sc\,\mathrm{d}t = \mathcal{E}S\,\mathrm{d}t$, soit $(u_0\Delta\nu)c = \mathcal{E}$. En utilisant la relation $\mathcal{E} = h\nu\mathcal{J}$, on aboutit à : $u_0 = \dfrac{h\nu\mathcal{J}}{c\Delta\nu}$.

.....

22.9 a) L'éclairement du faisceau, c'est-à-dire sa puissance surfacique, est le produit de l'énergie d'un photon par le nombre de photons par unité de temps et unité de surface qui traversent le faisceau, soit $\mathcal{E} = \mathcal{J}h\nu$.

.....

22.9 b) Les grandeurs $\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t}$ représentent une probabilité (terme sans dimension) par atome et par unité de temps. Ces termes sont donc homogènes à l'inverse d'un temps, soit $\left[\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t}\right] = T^{-1}$.

.....

22.9 c) En raisonnant avec les dimensions, on a

$$[\sigma_{12}] = \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t}\right]}{[\mathcal{J}]} \qquad \text{donc} \qquad [\sigma_{12}] = \frac{T^{-1}}{L^{-2}.T^{-1}} = L^2.$$

Même raisonnement pour σ_{21} : les grandeurs σ_{12} et σ_{21} sont homogènes à une surface.

On appelle généralement σ_{12} la section efficace d'absorption et σ_{21} la section efficace d'émission stimulée.

.....

22.10 a) En négligeant les pertes par émission spontanée, la population d'atomes sur le niveau 2 diminue, par unité de temps, de $\sigma\mathcal{J}N_2(t)$ du fait du processus d'émission stimulée et augmente, toujours par unité de temps de $\sigma\mathcal{J}N_1(t)$ du fait du processus d'absorption du rayonnement. D'où le bilan : $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \sigma\mathcal{J}(N_1(t) - N_2(t))$.

.....

22.10 b) Puisque $N_1(t)+N_2(t)=\mathrm{C^{ste}}$, on aura dans le milieu, $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=2\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$, qui donne avec la question précédente : $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=-2\sigma\mathcal{J}D(t)$.

.....

22.10 c) Pendant la durée $\mathrm{d}t$, le rayonnement parcourt dans la cavité une distance égale à $c\,\mathrm{d}t$ et balaie le volume égal à $\mathrm{d}V=Sc\,\mathrm{d}t$.

Dans ce volume, $N_2(t)\sigma\mathcal{J}\,\mathrm{d}V$ photons sont produits par émission stimulée et $N_1(t)\sigma\mathcal{J}\,\mathrm{d}V$ photons sont absorbés par le milieu traversé par le rayonnement. La production nette de photons dans le volume $\mathrm{d}V$ pendant $\mathrm{d}t$ vaut donc : $\mathrm{d}\mathcal{N}(t)=\sigma\mathcal{J}(N_2(t)-N_1(t))\,\mathrm{d}V=\sigma\mathcal{J}D(t)\,\mathrm{d}V=Sc\sigma\mathcal{J}D(t)\,\mathrm{d}t$.

.....

22.10 d) En reprenant le résultat de la question précédente, on a immédiatement : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t}=c\sigma\mathcal{J}D(t)$.

La quantité $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t}$ *est le flux surfacique de photons.*

.....

22.10 e) Les équations d'évolution de $D(t)$ et $\mathcal{J}$ établies en b) et d), s'écrivent en régime stationnaire :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=0=-2\sigma\mathcal{J}D\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t}=\sigma\mathcal{J}D.\end{cases}$$

Puisque $D(t)<0$, la seule solution possible est $\mathcal{J}=0$, soit la réponse (c).

Ce résultat montre qu'il est impossible d'obtenir un effet laser avec un système à deux niveaux seulement.

.....

22.11 a) Si on différencie de chaque côté de l'équation $x=4\dfrac{\rho^2}{D^2}$, il vient que $\mathrm{d}x=8\dfrac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{D^2}$ donc que $\rho\,\mathrm{d}\rho=\dfrac{D^2}{8}\,\mathrm{d}x$.

Si on étudie les bornes de l'intégrale, pour $\rho=0$ il vient que $x=0$, et pour $\rho\to\infty$ il vient que $x\to\infty$. Ainsi, on a

$$P=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\mathrm{e}^{-4\frac{\rho^2}{D^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta.$$

.....

22.11 b) On calcule l'intégrale précédente :

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\times\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\infty}=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times2\pi\times1=\mathcal{E}_0\frac{\pi D^2}{4\Delta t}.\end{aligned}$$

.....

22.11 c) On utilise le même changement de variable que précédemment, en faisant garde à la nouvelle borne de l'intégrale : pour $\rho=d/2$ il vient que $x=\dfrac{4(d/2)^2}{D^2}=\dfrac{d^2}{D^2}$. D'où

$$\begin{aligned}P'&=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{d^2/D^2}\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\times\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{d^2/D^2}=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times2\pi\times\Big(1-\mathrm{e}^{-d^2/D^2}\Big)\\&=\mathcal{E}_0\frac{\pi D^2}{4\Delta t}\Big(1-\mathrm{e}^{-d^2/D^2}\Big)=P\Big(1-\mathrm{e}^{-d^2/D^2}\Big).\end{aligned}$$

.....

22.11 d) À partir de l'expression de P', il vient

$$P' = P\Big(1 - \mathrm{e}^{-d^2/D^2}\Big) \quad \text{donc} \quad \frac{P'}{P} = 1 - \mathrm{e}^{-d^2/D^2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{-d^2/D^2} = 1 - \frac{P'}{P}.$$

Donc,

$$-\frac{d^2}{D^2} = \ln\left(1 - \frac{P'}{P}\right) \quad \text{donc} \quad D = d\sqrt{\frac{-1}{\ln\big(1 - \frac{P'}{P}\big)}}.$$

.....

22.11 e) À partir de l'expression de D, il vient que

$$D = d\sqrt{\frac{-1}{\ln\big(1 - \frac{P'}{P}\big)}} = 2{,}00\,\mathrm{cm}\sqrt{\frac{-1}{\ln\big(1 - \frac{4{,}15\,\mathrm{mW}}{5{,}00\,\mathrm{mW}}\big)}} = 1{,}50\,\mathrm{cm}.$$

.....

22.12 a) Soit E l'énergie délivrée par la source durant une seconde, il vient que $E = \overline{P}\times 1\,\mathrm{s}$. Le nombre d'impulsions émises par la source durant une seconde N est donnée par la cadence f, soit $N = f \times 1\,\mathrm{s}$. Ainsi, l'énergie contenue dans une impulsion est telle que

$$E_{\mathrm{pulse}} = \frac{E}{N} = \frac{\overline{P} \times 1\,\mathrm{s}}{f \times 1\,\mathrm{s}} = \frac{\overline{P}}{f}.$$

.....

22.12 b) La puissance d'une impulsion P_{pulse} correspond à la quantité d'énergie fournie pendant la durée Δt de l'impulsion, soit

$$P_{\mathrm{pulse}} = \frac{E_{\mathrm{pulse}}}{\Delta t} = \frac{\overline{P}}{f\Delta t}.$$

.....

22.12 c) On a :

(a) $P_{\mathrm{pulse},a} = \dfrac{\overline{P}_a}{f_a \Delta t_a} = \dfrac{20\,\mathrm{W}}{20\times 10^3\,\mathrm{Hz} \times 10 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{W}$

(b) $P_{\mathrm{pulse},b} = \dfrac{\overline{P}_b}{f_b \Delta t_b} = \dfrac{8{,}0\,\mathrm{W}}{10\times 10^3\,\mathrm{Hz} \times 2{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 4{,}0 \times 10^5\,\mathrm{W}$

(c) $P_{\mathrm{pulse},c} = \dfrac{\overline{P}_c}{f_c \Delta t_c} = \dfrac{1{,}8\,\mathrm{W}}{10\times 10^3\,\mathrm{Hz} \times 700 \times 10^{-12}\,\mathrm{s}} = 2{,}6 \times 10^5\,\mathrm{W}$

(d) $P_{\mathrm{pulse},d} = \dfrac{\overline{P}_d}{f_d \Delta t_d} = \dfrac{1{,}5\,\mathrm{W}}{80\times 10^6\,\mathrm{Hz} \times 140 \times 10^{-15}\,\mathrm{s}} = 1{,}3 \times 10^5\,\mathrm{W}.$

.....

22.13 a) D'après la formule il vient $S = S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \big(r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\big)^k = S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2} \frac{1}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}} = \frac{S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}.$

.....

22.13 b) On a

$$\begin{aligned} I = |S|^2 &= \frac{\big|S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}\big|^2}{\big|1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\big|^2} = \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{\big(1 - r_1 r_2 \cos(\phi)\big)^2 + r_1^2 r_2^2 \sin^2(\phi)} \\ &= \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{1 - 2r_1 r_2 \cos(\phi) + r_1^2 r_2^2 \cos^2(\phi) + r_1^2 r_2^2 \sin^2(\phi)} \\ &= \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi)} = \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{1 - 2r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + 4r_1 r_2 \sin^2\big(\frac{\phi}{2}\big)} \\ &= \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{\big(1 - r_1 r_2\big)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2\big(\frac{\phi}{2}\big)}. \end{aligned}$$

.....

22.13 c) En divisant I par $(1-r_1r_2)^2$, il vient que

$$I = \frac{1}{(1-r_1r_2)^2} \times \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1-r_1r_2)^2 + 4r_1r_2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1-r_1r_2)^2}}{1+\frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{I_{\max}}{1+m\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

On peut alors identifier $I_{\max} = \dfrac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1-r_1r_2)^2}$ et également le coefficient $m = \dfrac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}$.

.....

22.15 a) Au voisinage de 0, on a au premier ordre $\sin(x) \sim x$. D'où $I(\nu) \approx \dfrac{I_{\max}}{1+m\left(2\pi\frac{nL}{c}\nu\right)^2}$.

.....

22.15 b) On cherche $\nu_1 > 0$, tel que $I(\nu_1) = \dfrac{I_{\max}}{2}$. On s'attend à avoir $2\pi\dfrac{nL}{c}\nu_1 \ll 1$, ce qui permet d'utiliser le développement limité de $I(\nu)$ établi à la question précédente.

On résout $\dfrac{I_{\max}}{1+m\left(2\pi\frac{nL}{c}\nu_1\right)^2} = \dfrac{I_{\max}}{2}$, qui donne $m\left(2\pi\dfrac{nL}{c}\nu_1\right)^2 = 1$, soit $\nu_1 = \dfrac{c}{2\pi nL\sqrt{m}}$.

.....

22.15 c) La fonction $I(\nu)$ étant paire, la largeur à mi-hauteur demandée vaut $\delta\nu = 2\nu_1$ soit $\delta\nu = \dfrac{c}{\pi nL\sqrt{m}}$.

.....

22.15 d) La finesse de la cavité est $F = \dfrac{c}{2nL}\dfrac{\pi nL\sqrt{m}}{c}$ soit $F = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{m}$.

.....

Fiche n° 23. Propagation des ondes et interfaces

Réponses

23.1 a) ..... $\boxed{0{,}78}$

23.1 b) ..... $\boxed{0{,}96}$

23.1 c) ..... $\boxed{2{,}1}$

23.2 a) ..... $\boxed{70{,}4\,\text{dB}}$

23.2 b) ..... $\boxed{7\,\text{dB}}$

23.2 c) ..... $\boxed{10^6}$

23.3 a) ..... $\boxed{\text{Dans l'eau.}}$

23.3 b) ..... $\boxed{\text{Par 4}}$

23.3 c) ..... $\boxed{\text{Dans l'acier}}$

23.4 a) .. $\boxed{-p_1 \cos(\omega t - k_x x - k_y y)(k_x \vec{e_x} + k_y \vec{e_y})}$

23.4 b) .. $\boxed{\dfrac{p_1}{\rho_0 \omega}(k_x \vec{e_x} + k_y \vec{e_y}) \sin(\omega t - k_x x - k_y y)}$

23.5 a) ..... $\boxed{\dfrac{k p_1}{\omega \rho_0} \cos(kx - \omega t)\vec{e_x}}$

23.5 b) ..... $\boxed{\dfrac{k p_1}{\omega \rho_0} \sin(kx) \sin(\omega t)\vec{e_x}}$

23.5 c) ..... $\boxed{\dfrac{A}{\rho_0 \omega r}\Big[-\dfrac{1}{r}\sin(kr - \omega t) + k\cos(kr - \omega t)\Big]\vec{e_r}}$

23.6 a) ..... $\boxed{\phi = \pi/2 \text{ et } k = n\pi/L}$

23.6 b) ..... $\boxed{\phi = \pi/2 \text{ et } k = (n + 1/2)\pi/L}$

23.6 c) ..... $\boxed{\phi = 0 \text{ et } k = n\pi/L}$

23.7 a) ..... $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t}}$

23.7 b) ..... $\boxed{\rho_0 \operatorname{div} \vec{v_1}}$

23.7 c) ..... $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial p_1}{\partial t}}$

23.8 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.8 b) ..... $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}}$

23.8 c) ..... $\boxed{c^2 \dfrac{f''}{f} = \dfrac{\ddot{g}}{g}}$

23.9 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

23.9 b) ..... $\boxed{3{,}14 \times 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}}$

23.9 c) ..... $\boxed{106\,\text{minutes}}$

23.10 a) ..... $\boxed{\rho S v(x,t)\,\text{d}t}$

23.10 b) ..... $\boxed{\rho v(x + \text{d}x, t) S\,\text{d}t}$

23.10 c) ..... $\boxed{-\rho S\,\text{d}t[v(x + \text{d}x, t) - v(x,t)]}$

23.10 d) ..... $\boxed{-\rho S \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,\text{d}x\,\text{d}t}$

23.11 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

23.11 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.11 c) ..... $\boxed{\text{d}}$

23.11 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

23.12 a) ..... $\boxed{\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}}$

23.12 b) ..... $\boxed{\dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}}$

23.12 c) ..... $\boxed{\text{oui}}$

23.12 d) ..... $\boxed{\pi}$

23.13 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

23.13 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

Corrigés

23.1 a) On a $\log(6) = \log(3 \times 2) = \log(3) + \log(2) \approx 0{,}78$.

.....

23.1 b) On a $\log(4+5) = \log(9) = \log\left(3^2\right) = 2\log(3) \approx 0{,}96$.

.....

23.1 c) On a $\log(125) = \log\left(5^3\right) = 3\log(5) \approx 2{,}1$.

.....

23.2 a) En notant les intensités sonores en décibel $I_{1,\text{dB}}$ et $I_{2,\text{dB}}$ et les intensités linéaires I_1 et I_2, on a

$$I_{\text{dB}} = 10\log\left(\frac{I_1 + I_2}{I_0}\right) \quad \text{avec} \quad I_1 = I_0 \times 10^{I_{1,\text{dB}}/10} \quad \text{et} \quad I_2 = I_0 \times 10^{I_{2,\text{dB}}/10}.$$

.....

23.2 b) On peut écrire

$$I_{\text{dB}} = 10\log\left(\frac{5I}{I_0}\right) = 10\log 5 + 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 7 + 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

L'intensité acoustique augmente de 7 dB.

.....

23.2 c) On cherche un entier n tel que

$$I_{\text{dB}} = 10\log\left(\frac{nI}{I_0}\right) \geqslant 120 \qquad \text{donc tel que} \qquad n \geqslant \frac{I_0}{I} \times 10^{12} \quad \text{avec} \quad I = I_0 \times 10^{60/10}.$$

On trouve $n \geqslant 10^6$.

.....

23.3 a) Le rapport des deux vitesses au carré s'exprime $\rho_a\chi_a/\rho_e\chi_e = 1{,}3 \times 10^2$. Les ondes acoustiques se propagent plus rapidement dans l'eau.

.....

23.3 b) En multipliant la température par 4, on multiplie la vitesse par $\sqrt{4} = 2$.

.....

23.3 c) Le rapport des deux vitesses au carré s'exprime $E\rho_e\chi_e/\rho_a = 20/7{,}8 > 1$. L'onde acoustique se propage plus rapidement dans l'acier.

.....

23.4 a) On a $\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\vec{e_y}$.

.....

23.4 b) En utilisant le résultat de la question précédente, on peut écrire que

$$\vec{v} = \frac{p_1}{\rho_0\omega}(k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y})\sin(\omega t - k_x x - k_y y) + \vec{A},$$

où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

.....

23.5 a) On peut écrire $-\overrightarrow{\text{grad}}\, p = p_1 k \sin(\omega t - kx)\,\vec{e}_x$ donc $\vec{v_1} = \dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\cos(kx - \omega t)\,\vec{e}_x + \vec{A}$, où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

.....

23.5 b) On peut écrire $-\overrightarrow{\text{grad}}\, p = p_1 k \sin(kx)\cos(\omega t)\,\vec{e}_x$ donc $\vec{v_1} = \dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\sin(kx)\sin(\omega t)\vec{e_x} + \vec{A}$, où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

.....

23.5 c) On peut écrire $-\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \dfrac{A}{r}\left[\dfrac{1}{r}\cos(kr-\omega t) + k\sin(kr-\omega t)\right]\vec{e}_r$.
On a alors en intégrant et en divisant par ρ_0

$$\vec{v_1} = \frac{A}{\rho_0\omega r}\left[-\frac{1}{r}\sin(kr-\omega t) + k\cos(kr-\omega t)\right]\vec{e_r} + \vec{A},$$

où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

.....

23.6 a) À tout instant t, on a $p(0,t) = 0$ donc $\cos(\phi) = 0$. On déduit $\phi = \pi/2$. À tout instant t, $p(L,t) = 0$ donc $\cos(kL + \pi/2) = \sin(kL) = 0$. On en déduit $k = n\pi/L$.

.....

23.6 b) Les conditions aux limites imposent $v(L,t) = 0$ et $p(0,t) = 0$.

.....

23.6 c) Les conditions aux limites imposent $v(L,t) = 0$ et $v(0,t) = 0$.

.....

23.7 a) On écrit $\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = (\rho_0+\rho_1)\dfrac{\partial\vec{v_1}}{\partial t} \approx \rho_0\dfrac{\partial\vec{v_1}}{\partial t}$ en ne gardant que les termes d'ordre 1.

.....

23.7 b) On a $\rho\,\text{div}\,\vec{v} = (\rho_0+\rho_1)\,\text{div}\,\vec{v_1} \approx \rho_0\,\text{div}\,\vec{v_1}$ en ne gardant que les termes d'ordre 1.

.....

23.7 c) La pression p_0 ne dépend ni du point M d'observation ni de t. Donc, à l'ordre 1, on a

$$\rho\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, p\right) \approx \rho_0\frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

.....

23.8 a) Le terme $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ est homogène à une pression divisée par une surface tandis que $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ est homogène à une pression divisée par un temps au carré.

.....

23.8 b) On injecte la solution proposée dans l'équation de d'Alembert. On obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad -p_0\omega^2\cos(\omega t - kx) = -c^2 p_0 k^2\cos(\omega t - kx)$$
$$\text{donc} \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\cos(\omega t - kx) = 0 \quad \text{donc} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

.....

23.8 c) On injecte la solution proposée dans l'équation de d'Alembert. On obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad f(x)\ddot{g}(t) = c^2 f''(x)g(t).$$

.....

23.9 a) Un débit de volume s'exprime en m^3 par intervalle de temps dt en s.

.....

23.9 b) Le débit de volume s'exprime $D_v = \pi R^2 v$. L'application numérique donne $D_v = 3{,}14\times10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$.

.....

23.9 c) Le volume d'eau dans la piscine s'exprime $V = hL\ell$. Le temps nécessaire à la remplir s'écrit donc $\tau = V/D_v = hL\ell/D_v$. L'application numérique donne $\tau = 106$ minutes.

.....

23.10 a) La masse de fluide δm_x traversant S_x entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'exprime : $D_{m,x}\,\mathrm{d}t = \rho S v(x,t)\,\mathrm{d}t$.

.....

23.10 b) La masse de fluide $\delta m_{x+\mathrm{d}x}$ traversant $S_{x+\mathrm{d}x}$ entre t et $t+\mathrm{d}t$ s'expriment $D_{m,x+\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t = \rho S v(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t$.

.....

23.10 c) La masse de fluide entrant dans le volume s'exprime $\delta m = \delta m_x - \delta m_{x+\mathrm{d}x} = -\rho S\,\mathrm{d}t[v(x+\mathrm{d}x,t) - v(x,t)]$.

.....

23.10 d) La masse δm s'exprime $\delta m = -\rho S\,\mathrm{d}t[v(x+\mathrm{d}x,t) - v(x,t)] = -\rho S\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

23.11 a) Le coefficient de proportionnalité entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est un réel positif $2 = 2\exp[0\mathrm{j}]$.

.....

23.11 b) Le coefficient de proportionnalité entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est un imaginaire pur $\mathrm{j} = \exp[\mathrm{j}\pi/2]$.

.....

23.11 c) On a $1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\exp(\mathrm{j}\pi/4)$.

.....

23.11 d) Le coefficient de proportionnalité entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est un réel négatif $-5 = 5\exp[\pi\mathrm{j}]$.

.....

23.12 a) Les continuités de la vitesse et de la surpression en $x = 0$ permettent d'écrire

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z_1}(1 - \underline{r}) = \frac{\underline{t}}{Z_2} \quad \text{donc} \quad \underline{r} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

.....

23.12 b) À la question précédente, on a établi l'expression de $\underline{r}$ et sachant que $1 + \underline{r} = \underline{t}$, on en déduit

$$\underline{t} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

.....

23.12 c) Le coefficient de transmission $\underline{t}$ est réel et positif, la surpression de l'onde transmise est donc en phase avec celle de l'onde incidente.

.....

23.12 d) Le coefficient de réflexion est réel et négatif, le déphasage entre la surpression de l'onde réfléchie et celle de l'onde incidente est donc de π.

.....

23.13 a) La force de pression s'exprime

$$\overrightarrow{F_{P,g}} = -\iint_{\mathcal{S}} P(0^-,t)\overrightarrow{\mathrm{d}S_g} = \iint_{\mathcal{S}} P(0^-,t)\overrightarrow{\mathrm{d}S}\overrightarrow{e_x} = [P_0 + p_{i0}\cos(\omega t) + p_{r0}\cos(\omega t + \phi_r)]S\overrightarrow{e_x}.$$

.....

23.13 b) La force de pression s'exprime

$$\overrightarrow{F_{P,d}} = -\iint_{\mathcal{S}} P(0^+,t)\overrightarrow{\mathrm{d}S_d} = -\iint_{\mathcal{S}} P(0^+,t)\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x} = -[P_0 + p_{t0}\cos(\omega t + \phi_t)]S\overrightarrow{e_x}.$$

.....

Fiche n° 24. Propagation des ondes et dispersion

Réponses

24.1 a) $\boxed{\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)}}$

24.1 b) $\boxed{k' = \omega/c}$

24.1 c) $\boxed{k'' = 1/\delta}$

24.2 a) $\boxed{\text{b}}$

24.2 b) $\boxed{\text{a}}$

24.2 c) $\boxed{\text{b}\,\text{c}\,\text{d}}$

24.2 d) $\boxed{\text{a}\,\text{c}}$

24.2 e) $\boxed{\text{a}}$

24.3 $\boxed{\text{b}}$

24.4 a) $\boxed{\text{c}}$

24.4 b) $\boxed{k = \omega/c}$

24.4 c) $\boxed{c^2 \dfrac{f''}{f} = \dfrac{g''}{g}}$

24.5 $\boxed{\text{c}}$

24.6 a) $\boxed{\text{Pas de dispersion ni d'absorption}}$

24.6 b) $\boxed{\text{Absorption sans dispersion}}$

24.6 c) $\boxed{\text{Dispersion sans absorption}}$

24.6 d) $\boxed{\text{Absorption et dispersion}}$

24.7 a) $\boxed{\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{c}}$

24.7 b) $\boxed{\underline{k} = \dfrac{\omega}{c}(1 + \mathrm{j}\omega \dfrac{\eta}{\mu_0 c^2})^{-1/2}}$

24.7 c) $\boxed{\omega^2 = \underline{k}^2 c^2 + \mathrm{j}mc^2\underline{k}}$

24.7 d) $\boxed{\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{u \pm c}}$

24.8 a) $\boxed{\sqrt{\dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}}}$

24.8 b) $\boxed{\sqrt{\dfrac{\gamma k}{\mu}}}$

24.8 c) $\boxed{\sqrt{gh}}$

24.8 d) $\boxed{\sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{g}{\omega}}$

24.9 a) $\boxed{\text{a}}$

24.9 b) $\boxed{\dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$

24.9 c) $\boxed{c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

24.10 a) $\boxed{2\dfrac{\omega}{k}}$

24.10 b) $\boxed{v_\mathrm{g} = \dfrac{3\omega}{2k}}$

24.10 c) $\boxed{\sqrt{gh}}$

24.10 d) $\boxed{\dfrac{g}{2\omega}}$

24.11 a) $\boxed{\text{e}}$

24.11 b) $\boxed{0 \text{ ou } +\infty}$

24.11 c) $\boxed{Z_\mathrm{c}}$

24.11 d) $\boxed{1}$

24.11 e) $\boxed{\dfrac{4ZZ_\mathrm{c}}{(Z + Z_\mathrm{c})^2}}$

24.12 a) $\boxed{0{,}99}$

24.12 b) $\boxed{0{,}99}$

24.12 c) $\boxed{2{,}4 \times 10^{-4}}$

24.13 a) $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}(z) = (k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2})E}$

24.13 b) $\boxed{\dfrac{p\pi}{L}}$

24.13 c) ..... $\boxed{E_0 \sin(\frac{n\pi}{L} z) \cos(\omega t - kx) \overrightarrow{u_y}}$

24.13 d) ..... $\boxed{5\,\text{GHz}}$

24.14 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

24.14 b) ..... $\boxed{9{,}2\,\text{mm}}$

24.15 a) ..... $\boxed{\text{f}}$

24.15 b) ..... $\boxed{161\,\text{Hz}}$

24.16 a) ..... $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E}}$

24.16 b) ..... $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\mu_0\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E})}$

24.16 c) ..... $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

Corrigés

24.1 a) En notation complexe usuelle, on a $\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-(\omega/c)x+\mathrm{j}x/\delta)}$.

.....

24.1 b) En notation complexe usuelle, on a $\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-(\omega/c)x+\mathrm{j}x/\delta)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{k}x)}$ et on identifie $k' = \omega/c$.

.....

24.1 c) En notation complexe usuelle, on a $\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-(\omega/c)x+\mathrm{j}x/\delta)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{k}x)}$ et on identifie $k'' = 1/\delta$.

.....

24.2 a) Les variables spatiales et temporelles sont découplées et l'onde est de la forme $f(z) \times g(t)$: il n'y a pas de propagation. De plus f et g sont périodiques : l'onde est stationnaire. Par ailleurs, l'amplitude est constante, donc il n'y a aucun amortissement. Réponse (b).

.....

24.2 b) Les variables spatiales et temporelles sont couplées de la forme $\omega t - kz$. Il y a propagation selon les z croissants. Par ailleurs l'amplitude est constante, donc il n'y a aucun amortissement. Réponse (a).

.....

24.2 c) Les variables spatiales et temporelles sont découplées de la forme $f(z) \times g(t)$: il n'y a pas de propagation. De plus f et une exponentielle décroissante : l'onde est immédiatemment amortie, c'est donc une onde évanescente. Réponses (b), (c), (d).

.....

24.2 d) Les variables spatiales et temporelles sont couplées de la forme $\omega t - kz$: il y a propagation. De plus l'amplitude de l'onde est de la forme $A\exp(-kz)$, elle est donc amortie (en l'occurrence exponentiellement). Comme il y a propagation, on ne parle pas d'onde évanescente. Réponses (a), (c).

.....

24.2 e) Les variables spatiales et temporelles sont couplées de la forme $\omega t - kz$. Il y a propagation selon les z décroissants. Par ailleurs l'amplitude est constante, donc il n'y a aucun amortissement. Réponse (a).

.....

24.3 On réalise l'application numérique dans chaque cas, dans la même unité afin de pouvoir comparer les valeurs obtenues.

$$\text{(a)} : c_s = \sqrt{\frac{\frac{7}{5} \times 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times 250\,\text{K}}{2{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}}} = 1\,206\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\text{(b)} : c_s = \sqrt{\frac{\frac{5}{3} \times 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times 350\,\text{K}}{4{,}0 \times 10^{-2}\,\text{kg/mol}}} = 348\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\text{(c)} : c_s = \sqrt{\frac{\frac{7}{5} \times 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times 293\,\text{K}}{16 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}}} = 462\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\text{(d)} : c_s = \sqrt{\frac{\frac{7}{5} \times 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times 273\,\text{K}}{14 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}}} = 476\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

La situation où la vitesse du son est la plus faible est la (b).

.....

24.4 b) On injecte la solution proposée dans l'équation de la question précédente. On a

$$\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kx) = c^2 k^2 p_0 \cos(\omega t - kx) \qquad \text{donc} \qquad \omega^2 = c^2 k^2.$$

Fréquence et norme du vecteur d'onde étant des grandeurs strictement positives, on a $\omega = ck$.

.....

24.4 c) On injecte la solution proposée dans l'équation de la question précédente.

On a $f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$, ou encore $c^2 \dfrac{f''}{f} = \dfrac{g''}{g}$ (en admettant que f et g ne s'annulent pas sur le domaine considéré).

.....

24.5 Seules les équations de d'Alembert témoignent d'une propagation idéale, ce qui exclut les réponses (a), (b) et (c) dans lesquelles sont présents des termes d'ordre 0 ou 1. La réponse (c) fait apparaître la forme du laplacien scalaire dans un système de coordonnées cartésiennes et peut se réécrire : $\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, qui est bien une équation de d'Alembert. (c).

.....

24.6 a) C'est la relation de dispersion associée à l'équation d'onde de d'Alembert.

Elle témoigne d'une propagation idéale.

.....

24.6 b) La partie imaginaire du vecteur d'onde n'est pas nulle, et sa partie réelle est proportionnelle à la pulsation.

.....

24.6 c) Le vecteur d'onde est réel et il n'est pas proportionnel à la pulsation.

.....

24.6 d) La partie imaginaire du vecteur d'onde n'est pas nulle, et sa partie réelle n'est pas proportionnelle à la pulsation.

.....

24.7 a) Dans chaque cas, on injecte la solution p de l'énoncé dans l'équation proposée. Une dérivée spatiale conduit à un préfacteur $-k$ et une dérivée temporelle à un préfacteur ω. Dans le cas d'une dérivée croisée $\partial x \partial t$ on pourra vérifier que l'ordre de dérivation n'importe pas (le théorème de Schwarz s'applique).

.....

24.8 a) On a $\omega^2 = \dfrac{\gamma h}{\mu} \times k^4$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{\dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}}$.

La vitesse de phase dépend de la norme du vecteur d'onde k, donc de la pulsation ω.

.....

24.8 b) On a $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu}$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\gamma k h}{\mu}$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{\dfrac{\gamma k h}{\mu}}$.

.....

24.8 c) On a $\omega^2 = ghk^2$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = gh$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{gh}$.

.....

24.8 d) On a $\omega^2 = gk$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{g}{k}$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$.

On peut aussi exprimer la vitesse via la pulsation ω, soit en injectant $k = \omega^2/g$ (énoncé) soit en l'identifiant dès le départ. Quelque soit la méthode, on a finalement : $v_\phi = \dfrac{g}{\omega}$.

.....

24.9 a) La fonction $k(\omega)$ proposée tend asymptotiquement vers la droite d'équation $k = \omega$ en $+\infty$, ce qui exclut la réponse (c). Par ailleurs, la fonction $k(\omega)$ proposée n'est pas définie si $\omega < \omega_p$, donc elle ne peut pas être continue sur $\mathbb{R}$, ce qui exclut la réponse (b). La fonction doit donc être non définie sur l'intervalle $[-\omega_p, \omega_p]$, ce qui est bien le cas de la réponse (a).

.....

24.9 b) On a $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$. On divise membre à membre par ω^2, il vient : $1 = \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} + c^2 \dfrac{k^2}{\omega^2}$.

En isolant $\dfrac{k}{\omega}$, on obtient : $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2}$. En prenant la racine, on obtient $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$.

Le résultat est bien homogène à une vitesse et est exprimé en fonction de la pulsation ω et non de la norme du vecteur d'onde k.

.....

24.9 c) On a $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, donc $\omega = \sqrt{(kc)^2 + \omega_p^2}$. On calcule la dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{c^2 k}{\sqrt{(kc)^2 + \omega_p^2}}$.

En remarquant que $(kc)^2 + \omega_p^2 = \omega^2$ et en injectant la vitesse de phase v_ϕ obtenue précédemment, il vient :

$$v_g(\omega) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}.$$

.....

24.10 a) On exprime $\omega = f(k)$ puis on réalise le calcul de dérivation.

Ici $\omega = \sqrt{\dfrac{\gamma h}{\mu}} k^2$ donc $v_g = 2k\sqrt{\dfrac{\gamma h}{\mu}} = 2v_\phi = 2\dfrac{\omega}{k}$ (en identifiant la vitesse de phase v_ϕ de l'entraînement précédent).

.....

24.10 b) Ici $\omega = \sqrt{\dfrac{\gamma k^3 h}{\mu}}$ donc $v_g = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{\gamma k h}{\mu}} = \dfrac{3}{2}v_\phi = \dfrac{3\omega}{2k}$ (en identifiant au v_ϕ de l'entraînement précédent).

.....

24.10 c) Ici $\omega = \sqrt{ghk}$ donc $v_g = \sqrt{gh} = v_\phi = \dfrac{\omega}{k}$. Dans ce cas, la vitesse de groupe coïncide avec la vitesse de phase.

.....

24.10 d) Ici $\omega = \sqrt{gk}$ donc $v_g = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{v_\phi}{2} = \dfrac{g}{2\omega}$.

.....

24.11 a) La dimension d'une impédance est celle d'une résistance, dont l'unité est le ohm (ω). De nombreuses méthodes sont possibles, comme par exemple l'exploitation de la formule du facteur de qualité (sans dimension) dans un circuit RLC :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{donc} \qquad \dim(R) = \dim\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right) = \dim\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\right)$$

On identifie que la bonne réponse est la réponse (e).

.....

24.11 b) Si $R = 1$ c'est que l'onde électrique est totalement réfléchie, autrement dit le câble est court-circuité ($Z = 0$) ou coupe-circuité ($Z \to +\infty$).

.....

24.11 c) S'il y a adaptation dimpédance, c'est que toute la puissance électrique est absorbée par la charge, autrement dit l'impédance vaut celle du câble ($Z = Z_c$).

.....

24.11 d) Le condensateur ou la bobine ne consomme pas de puissance moyenne, l'onde électrique est totalement réfléchie ($R = 1$).

.....

24.11 e) La conservation de la puissance au point de jonction assure que $R+T = 1$, donc $T = 1-R = \dfrac{4ZZ_c}{(Z+Z_c)^2}$.

.....

24.12 a) On calcule les impédances de l'air et de l'eau. Les application numériques donnent $Z_{air} = 442\,\text{USI}$ et $Z_{eau} = 1{,}5 \times 10^6\,\text{USI}$. En injectant dans l'expression de R fournie, on trouve $R \approx 1$, autrement dit l'onde sonore est totalement réfléchie à l'interface air/eau.

.....

24.12 b) Permuter Z_1 et Z_2 dans l'expression du coefficient de réflexion en puissance R ne modifie pas sa valeur. On trouve comme précédemment $R \simeq 1$.

.....

24.12 c) On calcule les impédances de l'air et du béton. Les application numériques donnent $Z_{air} = 442\,\text{USI}$ et $Z_{béton} = 7{,}4 \times 10^6\,\text{USI}$. En injectant dans l'expression de T fournie, on trouve $T \ll 1$, autrement dit l'onde est totalement réfléchie.

.....

24.13 a) En projection sur (Oy) on a $\dfrac{d^2E}{dz^2}(z)\cos(\omega t - kx) - E(z)k^2\cos(\omega t - kx) + \dfrac{1}{c^2}E(z)\omega^2\cos(\omega t - kx) = 0$, avec $\cos(\omega t - kx) \neq 0$.

.....

24.13 b) Comme $E(z = L) = 0$ alors $E_0 \sin KL = 0$ donc $KL = p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$ car $L > 0$.

.....

24.13 c) En injectant l'expression de l'amplitude dans celle du champ, on a $\vec{E} = E_0 \sin(\dfrac{n\pi}{L}z)\cos(\omega t - kx)\vec{u_y}$.

.....

24.13 d) Pour le fondamental ($p = 1$), on a $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{L^2}$. Par identification, on a $\omega_{c1} = \dfrac{\pi c}{L}$. De plus, par définition, on sait que $\omega_{c1} = 2\pi f_{c1}$, donc $f_{c1} = \dfrac{c}{2L}$. L'application numérique donne $f_{c1} = 5\,\text{GHz}$.

.....

24.14 a) L'équation d'onde est ici une équation de diffusion dont le coefficient de diffusion est $\dfrac{1}{\mu_0\gamma}$. Il s'exprime en m^2/s, il est donc homogène au produit d'une fréquence par le carré d'une longueur.

.....

24.14 b) On réalise l'application numérique, la précision étant de deux chiffres significatifs :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}} \times 5{,}96 \times 10^{7}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}} \times 2\pi \times 50\,\mathrm{Hz}}} = 9{,}2\,\mathrm{mm}.$$

.....

24.15 a) Une fréquence étant attendue, son unité est en hertz ou en inverse d'un temps. Seule la vitesse faisant apparaître un temps (unité : m/s), celle-ci doit forcément être au numérateur et hors de la racine (ou à une puissance 2 sous la racine). Cela exclut les réponses (a), (b), (c), (e). Parmi les deux options restantes, on constate que l'argument de la racine est sans dimension pour la réponse (d), autrement dit f_0 est de la même dimension qu'une vitesse : cela exclut la réponse (d). Par élimination on choisit donc la réponse (f), mais on peut facilement la confirmer en constatant que la dimension de l'argument sous la racine est l'inverse d'une surface, donc la vitesse est multipliée par l'inverse d'une longueur une fois la racine prise en compte : f_0 est bien homogène à une fréquence, donc réponse (f).

.....

24.15 b) On réalise l'application numérique, la précision étant de trois chiffres significatifs :

$$f_0 = \frac{320\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{2\pi}\sqrt{\frac{10{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2}}{1{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \times 100 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}} = 161\,\mathrm{Hz}.$$

.....

24.16 a) Le résultat est immédiat en injectant $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ dans l'expression fournie.

.....

24.16 b) On injecte (MF) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{\partial\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}}{\partial t}$.

On injecte (MA) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma\vec{E}) = -\mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

.....

24.16 c) En combinant les réponses aux questions précédentes, on obtient une équation de diffusion :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

.....

Fiche n° 25. Cinématique des fluides

Réponses

25.1 a) $\boxed{2{,}59 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}}$

25.1 b) $\boxed{2{,}59 \times 10^{2}\,\mathrm{kg \cdot h^{-1}}}$

25.2 $\boxed{\text{b}}$

25.3 $\boxed{\text{c}}$

25.4 a) $\boxed{8{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$

25.4 b) $\boxed{22\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$

25.5 a) $\boxed{\text{b}}$

25.5 b) $\boxed{\frac{\pi}{2}\rho V_0 R^2}$

25.6 $\boxed{\text{c}}$

25.7 a) $\boxed{0}$

25.7 b) $\boxed{\text{oui}}$

25.7 c) $\boxed{\text{non}}$

25.7 d) $\boxed{\text{oui}}$

25.8 a) $\boxed{\vec{0}}$

25.8 b) $\boxed{\text{oui}}$

25.8 c) $\boxed{-v_0 y + \phi_0}$

25.9 a) $\boxed{\vec{0}}$

25.9 b) $\boxed{-\frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}y^2 + \phi_0}$

25.9 c) $\boxed{\text{non}}$

25.9 d) $\boxed{\text{impossible}}$

25.10 a) $\boxed{\vec{0}}$

25.10 b) $\boxed{\vec{0}}$

25.10 c) $\boxed{\vec{0}}$

25.11 a) $\boxed{-\omega x \vec{e_z}}$

25.11 b) $\boxed{\text{oui}}$

25.12 a) $\boxed{\text{d}}$

25.12 b) $\boxed{\text{b}}$

25.12 c) $\boxed{\vec{0}}$

25.13 a) $\boxed{\frac{x}{\tau}\vec{e_x}}$

25.13 b) $\boxed{\vec{0}}$

25.13 c) $\boxed{\text{non}}$

25.13 d) $\boxed{\frac{x}{\tau^2}\vec{e_x}}$

25.14 a) $\boxed{\omega a^2}$

25.14 b) $\boxed{\text{oui}}$

25.14 c) $\boxed{\text{oui}}$

25.14 d) $\boxed{\omega \vec{e_z}}$

25.15 $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau) \\ 0 \\ \frac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau) \end{pmatrix} K\exp(-t/\tau)}$

25.16 a) $\boxed{\text{oui}}$

25.16 b) $\boxed{\text{oui}}$

25.16 c) $\boxed{\beta \ln(r) - \frac{\alpha}{r}\theta}$

25.16 d) $\boxed{-\frac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}}$

Corrigés

25.1 a) On convertit le volume en m^3 et la durée en heures : on a

$$D_v = \frac{15{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{(3 \times 60 + 14) \times \dfrac{1}{3600}\ \mathrm{h}} = 2{,}59 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

.....

25.1 b) Cette fois, on convertit le volume en masse grâce à la masse volumique de l'eau, en gardant la même durée : on a

$$D_v = \frac{1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 15{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{214 \times \dfrac{1}{3600}\ \mathrm{h}} = 2{,}59 \times 10^2\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

.....

25.2 Calculons le débit pour chaque cas donné :

- 100 kg d'eau pendant 50 min correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{100\,\mathrm{kg}}{1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 50\,\mathrm{min} \times 60\,\mathrm{s/min}} = 3{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

- 0,2 mol d'eau pendant 3 ms correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{0{,}2\,\mathrm{mol} \times 18{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}}{1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 3{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

- 18 m^3 d'eau pendant 2 jours correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{18\,\mathrm{m}^3}{2\,\mathrm{jours} \times 24\,\mathrm{h/jour} \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} = 1{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

C'est par conséquent l'écoulement (b) qui possède le débit volumique le plus important.

.....

25.3 On exprime d'abord la masse volumique du fluide en fonction des données du problème : $\rho = \dfrac{D_m}{Sv}$. On réalise ensuite les applications numériques pour les deux valeurs extrêmes de débit massique afin d'obtenir un encadrement de la valeur de masse volumique. On prend soin de convertir les grandeurs dans le système d'unités internationales et de calculer correctement la surface de la section circulaire ($S = \pi r^2 = \pi \dfrac{d^2}{4}$). Ainsi, on a

$$\rho_{\min} = \frac{70\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(\frac{6\,\mathrm{mm}}{2})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \frac{6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = 1{,}2\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$$

et $$\rho_{\max} = \frac{80\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(\frac{6\,\mathrm{mm}}{2})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \frac{6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = 1{,}4\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}.$$

En conclusion on a $\rho = (1{,}3 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$, les fluides potentiels sont donc le miel et la glycérine. Réponse (c).

.....

25.4 a) Dans le cas d'un écoulement uniforme, on a $D_{v1} = v_1 S_1$. Ici, on a

$$S_1 = h_1 \times l_1 = 1{,}5 \times 10^3\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}5 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2 \quad \text{et} \quad D_{v1} = \frac{4\,700\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}}{3\,600\,\mathrm{s} \cdot \mathrm{h}^{-1}} = 1{,}306\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

On en déduit la vitesse moyenne : $v_1 = \dfrac{D_{v1}}{S_1} = \dfrac{1{,}306\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}}{1{,}5 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2} = 8{,}7\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

.....

25.4 b) Par conservation du débit (écoulement incompressible), on a $D_{v1} = D_{v2}$ donc $v_1 S_1 = v_2 S_2$. D'où,

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = 8{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \times \frac{1{,}5\times10^{-1}\,\mathrm{m^2}}{6{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{m^2}} = 22\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

.....

25.5 a) La formule (a) n'est pas homogène : le produit $r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ est homogène à un volume, et non une surface. De plus, il faut intégrer de 0 à 2π et non de 0 à π : la formule (c) est donc également incorrecte.

.....

25.5 b) Par définition, $D_m = \iint \rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. En coordonnées cylindriques, on obtient ainsi

$$D_m = \rho V_0 \iint \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \rho V_0 \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^R \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r = \rho V_0 \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi\rho V_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right).$$

Ainsi, $D_m = \dfrac{\pi}{2}\rho V_0 R^2$.

.....

25.6 On a $\dfrac{\partial}{\partial t}(v_0\sin(\omega t)\vec{e_y}) = \omega v_0\cos(\omega t)\vec{e_y} \neq \vec{0}$.

.....

25.7 a) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(v_0\vec{e_z}) = 0$.

.....

25.7 b) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

25.7 c) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}) = 2k \neq 0$; ainsi, l'écoulement est compressible.

.....

25.7 d) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(kz\vec{e_x}) = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

25.8 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(v_0\vec{e_y}) = \vec{0}$.

.....

25.8 b) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$; ainsi, l'écoulement est irrotationnel.

.....

25.8 c) On a $\vec{v} = v_0\vec{e_y} = -\dfrac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y}\vec{e_y}$ donc $\phi(y) = -v_0 y + \phi_0$.

.....

25.9 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}) = \vec{0}$.

.....

25.9 b) On a

$$\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y} = -\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\vec{e_y} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -kx\,\mathrm{d}x - ky\,\mathrm{d}y.$$

Donc, $\phi - \phi_0 = -\displaystyle\int_0^x kx\,\mathrm{d}x - \int_0^y ky\,\mathrm{d}y$ et donc $\phi(x,y) = -\dfrac{k}{2}x^2 - \dfrac{k}{2}y^2 + \phi_0$.

.....

25.9 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(kz\vec{e_x}) = k\vec{e_y} \neq \vec{0}$: l'écoulement n'est pas irrotationnel mais tourbillonnaire.

.....

25.10 a) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \dfrac{\partial(v_0\vec{e_y})}{\partial t} = \vec{0}$.

.....

25.10 b) On a $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(v_0\dfrac{\partial}{\partial y}\right)v_0\vec{e_y} = \vec{0}$.

.....

25.10 c) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \vec{0}$.

.....

25.11 a) On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(x)) = -\frac{\partial v_z(x)}{\partial x}\vec{e_y} + \frac{\partial v_y(x)}{\partial x}\vec{e_z} = \omega\vec{e_y} \qquad \text{donc} \qquad v_y(x) = A \text{ et } v_z(x) = -\omega x + B,$$

avec A et B des constantes d'intégration.
Comme on a $\vec{v}(x=0) = \vec{0}$, on en déduit $0 = v_y(0) = A$ et $0 = v_z(0) = B$. Donc, $\vec{v}(x) = -\omega x\vec{e_z}$.

.....

25.11 b) On a $\text{div}(\vec{v}(x)) = \text{div}(-\omega x\vec{e_z}) = \dfrac{\partial v_z(x)}{\partial z} = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

25.12 a) On a

$$\vec{v}^2(z) = v_0^2\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2(z)}{2}\right) = \frac{\text{d}}{\text{d}z}\left(v_0^2\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_z} = -v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1-\left(\frac{z}{L}^2\right)\right)\vec{e_z}.$$

.....

25.12 b) On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(z)) = \frac{\text{d}}{\text{d}z}\left(v_0\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_y} = -v_0\frac{2z}{L^2}\vec{e_y}$$

$$\text{donc} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(z))\wedge\vec{v}(z) = -v_0\frac{2z}{L^2}\left(v_0\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_y}\wedge\vec{e_x} = v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}.$$

.....

25.12 c) On a $\left(\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(z) = -v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1-\left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z} + v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1-\left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z} = \vec{0}$.

.....

25.13 a) On a $\vec{v}(x) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(x) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\dfrac{x^2}{2\tau}+\phi_0\right) = \dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}$.

.....

25.13 b) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(x,y,z,t) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{\text{d}v_x(x)}{\text{d}z}\vec{e_y} - \dfrac{\text{d}v_x(x)}{\text{d}y}\vec{e_z} = \vec{0}$.

.....

25.13 c) On a $\text{div}\,\vec{v}(x,y,z,t) = \text{div}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{\text{d}\left(\frac{x}{\tau}\right)}{\text{d}x} = \dfrac{1}{\tau} \neq 0$. Donc, l'écoulement n'est pas incompressible.

.....

25.13 d) On a $\overrightarrow{a_{\text{M}}}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) + \left[\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right]\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \vec{0} + \left[\dfrac{x}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{x}{\tau^2}\vec{e_x}$.

.....

25.14 a) Il y a continuité de la vitesse en $r=a$, ce qui se traduit par $\omega a = \dfrac{K}{a}$ d'où $K = \omega a^2$.

.....

25.14 b) On voit que $v_r = 0$: ainsi, la divergence de la vitesse est nulle, ce qui correspond à un écoulement incompressible.

.....

25.14 c) Pour $r \geqslant a$, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\text{d}K}{\text{d}r}\vec{e_z} = \vec{0}$. L'écoulement est donc irrotationnel hors du coeur.

.....

25.14 d) Pour $r \leqslant a$, le vecteur tourbillon s'écrit $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(\omega r^2)}{\mathrm{d}r}\vec{e_z} = \dfrac{1}{2r} \times 2r\omega\vec{e_z} = \omega\vec{e_z}$.

.....

25.15 La dérivée particulaire à calculer porte sur le champ de vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

Le champ à dériver est exprimé dans un système de coordonnées cartésiennes. En projetant cette équation vectorielle sur une base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et en développant l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes on obtient trois équations scalaires qui sont les composantes a_x, a_y et a_z :

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \\
a_y &= \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} \\
a_z &= \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Calculons les différentes composantes. On a

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{3z-2x}{\tau}K\exp(-t/\tau) + \big(2\times(2x-3z) - 3\times(3x-2z)\big)K^2\exp(-2t/\tau) \\
&= \left(\frac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau)\right)K\exp(-t/\tau) \\
\text{et}\quad a_y &= 0 \\
\text{et}\quad a_z &= \frac{2z-3x}{\tau}K\exp(-t/\tau) + \big(3\times(2x-3z) - 2\times(3x-2z)\big)K^2\exp(-2t/\tau) \\
&= \left(\frac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau)\right)K\exp(-t/\tau).
\end{aligned}$$

Finalement, en écrivant la solution $\vec{a} = a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}$ sous forme matricielle (vecteur colonne) on a :

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau) \\ 0 \\ \dfrac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau) \end{pmatrix} K\exp(-t/\tau).$$

.....

25.16 a) On a $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\left(-\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r}\right) = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

25.16 b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}\right) = \vec{0} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\alpha}{r}\right)\vec{e_z} = \vec{0}$; ainsi, l'écoulement est irrotationnel.

.....

25.16 c) On a

$$\vec{v} = -\frac{\beta}{r}\vec{e_r} + \frac{\alpha}{r}\vec{e_\theta} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\Phi = \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\beta}{r}\,\mathrm{d}r - \alpha\,\mathrm{d}\theta.$$

Donc,

$$\Phi(r,\theta) - \Phi(1,0) = \int_1^r \frac{\beta}{r}\,\mathrm{d}r - \int_0^\theta \alpha\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{et donc} \qquad \Phi(r,\theta) = \beta\ln(r) - \alpha\theta.$$

.....

25.16 d) L'écoulement est stationnaire et irrotationnel. Donc, on a

$$\vec{a_p} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\beta^2+\alpha^2}{2r^2}\right) = -\frac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}.$$

.....

Fiche n° 26. Dynamique des fluides

Réponses

26.1 a) $\boxed{v(y) = \frac{v_0}{a} y}$

26.1 b) $\boxed{v(y) = \frac{v_0}{a} y - \frac{K}{2} a y \left(1 - \frac{y}{a}\right)}$

26.1 c) $\boxed{v(r) = -\frac{K R^2}{4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$

26.2 a) $\boxed{D_v = v_0 a b}$

26.2 b) $\boxed{D_v = A\pi\frac{R^4}{2}}$

26.3 a) $\boxed{\text{b}}$

26.3 b) $\boxed{\text{c}}$

26.3 c) $\boxed{\text{a}}$

26.4 a) $\boxed{\frac{\rho V L}{\eta}}$

26.4 b) $\boxed{\frac{V}{\Omega L}}$

26.4 c) $\boxed{\frac{\eta}{\rho \Omega L^2}}$

26.5 a) $\boxed{M.L^{-1}.T^{-1}}$

26.5 b) $\boxed{L^2.T^{-1}}$

26.5 c) $\boxed{\text{d}}$

26.6 a) $\boxed{\mu g \vec{e_z}}$

26.6 b) $\boxed{L\left(P_0 h - \mu g \frac{h^2}{2}\right)\vec{e_z}}$

26.7 a) $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}\vec{e_x}}$

26.7 b) $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1}$

26.7 c) $\boxed{\left[\frac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right] S\vec{e_x}}$

26.8 a) $\boxed{2A\eta\vec{e_x}}$

26.8 b) $\boxed{2A\eta h L^2 \vec{e_x}}$

26.9 a) $\boxed{5{,}2 \times 10^{-3}}$

26.9 b) $\boxed{3{,}4 \times 10^{-5}\,\text{N}}$

26.9 c) $\boxed{6{,}7 \times 10^{-6}\,\text{N}}$

26.9 d) $\boxed{4{,}0 \times 10^{-5}\,\text{N}}$

26.9 e) $\boxed{\frac{2\mu_a R^2}{9\eta}}$

26.9 f) $\boxed{0{,}5\,\text{ms}}$

26.10 a) $\boxed{P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}}$

26.10 b) $\boxed{-P(x + \mathrm{d}x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}}$

26.10 c) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau}$

26.10 d) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau}$

26.10 e) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau}$

26.10 f) $\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}\,P}$

26.11 a) $\boxed{\vec{0}}$

26.11 b) $\boxed{\text{b}}$

26.11 c) $\boxed{\text{d}}$

26.12 a) $\boxed{\text{d}}$

26.12 b) $\boxed{\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\tau\,\vec{e_x}}$

26.12 c) $\boxed{\text{a}}$

26.13 a) $\boxed{\text{d}}$

26.13 b) $\boxed{\text{a}}$

26.13 c) $\boxed{\vec{0}}$

26.14 a) ..... $\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(\text{M}, t) + \vec{F}_{\text{V,a}}}$

26.14 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

26.14 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

26.15 a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

26.15 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

26.15 c) ..... $\boxed{U\dfrac{z}{a}}$

26.15 d) ..... $\boxed{\text{c}}$

26.16 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

26.16 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

26.16 c) ..... $\boxed{\text{b}}$

26.16 d) ..... $\boxed{\text{d}}$

26.17 a) .... $\boxed{\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu\vec{g}}$

26.17 b) ..... $\boxed{\dfrac{2\Delta P}{\mu}}$

26.17 c) ..... $\boxed{D_V = v_{\text{B}} s = Ss\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\mu(S^2 - s^2)}}}$

26.18 a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

26.18 b) ... $\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(x, z) + \eta\Delta\vec{v}(z) + \mu\vec{g}}$

26.18 c) ..... $\boxed{\dfrac{\partial P(x,z)}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}}$

26.18 d) ..... $\boxed{v(z) = v_0\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)}$

26.18 e) ..... $\boxed{P(x) = P_0 - \dfrac{2\eta v_0}{h^2}x}$

26.19 a) .... $\boxed{\begin{array}{r}\mu\dfrac{\partial \vec{v}(z,t)}{\partial t} = \\ -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z,t) + \eta\Delta\vec{v}(z,t) + \mu\vec{g}\end{array}}$

26.19 b) ..... $\boxed{\mu\dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}}$

26.19 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mu}{\eta}h^2}$

26.19 d) ..... $\boxed{2\text{ h }46\text{ min }40\text{ s}}$

26.19 e) ..... $\boxed{\dfrac{\text{d}^2 v(z)}{\text{d}z^2} = 0}$

26.19 f) ..... $\boxed{v(z) = \dfrac{v_p}{h}z}$

26.19 g) ..... $\boxed{-\eta\dfrac{v_p}{h}S\overrightarrow{e_x}}$

26.20 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

26.20 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

26.21 a) ..... $\boxed{v_{\text{B}}^2 = v_{\text{A}}^2 + 2gh}$

26.21 b) ..... $\boxed{\dfrac{R^2}{a^2}v_{\text{A}}}$

26.21 c) ..... $\boxed{\sqrt{2gh}}$

26.22 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

26.22 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

26.22 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

26.23 a) ..... $\boxed{\dfrac{U}{T}\dfrac{\partial \overrightarrow{v^*}}{\partial t^*}}$

26.23 b) ..... $\boxed{\dfrac{U^2}{L}\left(\overrightarrow{v^*} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^*\right)(\overrightarrow{v^*})}$

26.23 c) ..... $\boxed{\dfrac{U}{L^2}\Delta^*(\overrightarrow{v^*})}$

26.23 d) ..... $\boxed{\rho U^2}$

26.23 e) ..... $\boxed{\dfrac{L}{UT}}$

26.23 f) ..... $\boxed{\dfrac{U^2}{gL}}$

26.23 g) ..... $\boxed{\dfrac{\rho LU}{\eta}}$

Corrigés

26.1 a) On a $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = 0$ donc $v(y) = A + By$. Les conditions aux limites permettent d'écrire $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{a}$.

.....

26.1 b) On a $v(y) = A + By + \dfrac{K}{2}y^2$. Les conditions aux limites permettent d'écrire $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{a} - \dfrac{K}{2}a$.

.....

26.1 c) On a $v(r) = \dfrac{Kr^2}{4} + B\ln(r) + A$. La constante B doit être nulle pour éviter la divergence de v en $r = 0$. La condition aux limites $v(0) = 0$ permet de trouver $A = -\dfrac{KR^2}{4}$.

.....

26.2 b) On peut écrire

$$D_v = 2\pi A\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = A\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right] \times \left[\int_{r=0}^{R}\left(R^2 - r^2\right)r\,\mathrm{d}r\right] = A\pi\frac{R^4}{2}.$$

.....

26.3 a) Un dauphin peut être modélisé par un cylindre dont le rayon est de 50 cm environ. La vitesse doit de plus être exprimée en mètre par seconde : $20\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 20/3{,}6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On a donc $\mathrm{Re} = \dfrac{20 \times 0{,}50}{3{,}6 \times 10^{-6}}$.

.....

26.3 b) Une balle de tennis a un diamètre de l'ordre de 6 cm.

.....

26.3 c) Un moucheron a une taille caractéristique de l'ordre de 1 mm.

.....

26.4 a) On a $\|\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\| \sim \rho V^2/L$ et $\|\Delta\vec{v}\| \sim v/L^2$.

.....

26.5 a)

- La dimension du laplacien du champ des vitesses est : $[\Delta(\vec{v})] = \dfrac{[\text{vitesse}]}{[\text{longueur}]^2} = L^{-1}.T^{-1}$.
- La dimension de la force volumique visqueuse est $[f_{\text{vis}}] = \dfrac{[\text{force}]}{[\text{volume}]} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L^3} = M.L^{-2}.T^{-2}$.
- La dimension de la viscosité dynamique est : $[\eta] = \dfrac{M.L^{-2}.T^{-2}}{L^{-1}.T^{-1}}$ soit $[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$.

.....

26.5 b) La dimension de la viscosité cinématique se déduit du résultat précédent sur la viscosité dynamique

$$[\nu] = \frac{M.L^{-1}.T^{-1}}{M.L^{-3}} = L^2.T^{-1}.$$

.....

26.5 c) On calcule en unités du système international avec $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$: on a $\nu = \dfrac{10^{-3}\,\text{usi}}{10^3} = 10^{-6}\,\text{usi}$.

.....

26.6 a) On a $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(z) = -\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e_z} = \mu g\vec{e_z}$.

.....

26.6 b) On écrit $\delta\overrightarrow{F_P} = P(z)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = P(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x} = (P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}$. En intégrant sur toute la surface, on a :

$$\overrightarrow{F_P} = \iint_{(S)} P(z)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{h} (P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x} = L\overrightarrow{e_x}\left[P_0 z - \frac{\mu g}{2}z^2\right]_0^h = L\left(P_0 h - \mu g\frac{h^2}{2}\right)\overrightarrow{e_x}.$$

.....

26.7 a) Comme le gradient est constant, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x) = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} = \dfrac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1}\overrightarrow{e_x}$. Avec les conditions données, on obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x) = \frac{P_2 - P_1}{L}\overrightarrow{e_x}.$$

.....

26.7 b) En primitivant la composante selon $(\mathrm{O}x)$ et en utilisant les conditions aux limites, on obtient :

$$\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1.$$

.....

26.7 c) On a

$$\delta\overrightarrow{F_P} = P(L)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\left[\frac{P_2 - P_1}{L}(L - x_1) + P_1\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}.$$

Sachant que $P(x)$ ne dépend ni de y, ni de z, on obtient par intégration : $\overrightarrow{F_P} = \left[\dfrac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right]S\overrightarrow{e_x}$.

.....

26.8 a) On écrit $\eta\Delta(\overrightarrow{v}(z)) = \eta\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{v}(z)}{\mathrm{d}z^2} = \eta\dfrac{\mathrm{d}^2\left(Az^2\right)}{\mathrm{d}z^2}\overrightarrow{e_x} = 2A\eta\overrightarrow{e_x}$.

.....

26.8 b) On écrit $\delta\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \eta\dfrac{\partial Az^2}{\partial z}\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x} = 2A\eta z\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x}$.

En sommant sur toute la surface, sachant $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $z = h$, on obtient :

$$\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \iint_S \delta\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{L} 2A\eta h\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2A\eta h L^2\overrightarrow{e_x}.$$

.....

26.9 a) On a $\mathrm{Re} = \dfrac{\mu_\mathrm{g}\,\mathrm{d}v_\ell}{\eta} = \dfrac{1{,}3\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\times1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}\times3{,}8\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}}{0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 5{,}3\times10^{-3}$.

.....

26.9 b) On a $\|\overrightarrow{F_\mathrm{t}}\| = 6\pi\eta R v_\ell = 6\pi 0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}\,\dfrac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\,3{,}8\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}} = 3{,}4\times10^{-5}\,\mathrm{N}$.

.....

26.9 c) La bille étant entièrement immergé, $V_\mathrm{s,i} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, d'où la norme de la poussée d'Archimède :

$$\|\overrightarrow{\Pi}\| = \mu_\mathrm{g}\frac{4}{3}\pi R^3 g = 1{,}3\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^3 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 6{,}7\times10^{-6}\,\mathrm{N}.$$

.....

26.9 d) Sachant que la masse de la bille est $m = \mu_\mathrm{a}V$ avec le volume $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ de la bille, on a :

$$\|\overrightarrow{P}\| = \mu_\mathrm{a}\frac{4}{3}\pi R^3 g = 7{,}8\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^3 9{,}81\,\mathrm{m/s^{-2}} = 4{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{N}.$$

.....

26.9 e) La seconde loi de Newton dans un référentiel galiléen donne :

$$m\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}_t.$$

En projetant selon l'axe vertical, on obtient :

$$\mu_{\mathrm{a}}\frac{4}{3}\pi R^3\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \mu_{\mathrm{a}}\frac{4}{3}\pi R^3 g - \mu_{\mathrm{g}}\frac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi\eta R v(t) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{\tau} = \left(1 - \frac{\mu_{\mathrm{g}}}{\mu_{\mathrm{a}}}\right)g,$$

avec $\tau = \dfrac{2\mu_{\mathrm{a}}R^2}{9\eta}$.

.....

26.9 f) On écrit $\tau = \dfrac{2\times 7{,}8\times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\left(5\times 10^{-4}\,\mathrm{m}\right)^2}{9\times 0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 4{,}6\times 10^{-4}\,\mathrm{s} \approx 0{,}5\,\mathrm{ms}.$

.....

26.10 c) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}x)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote x et sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote $x+\mathrm{d}x$. La surface faisant déjà intervenir le produit $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on peut considérer la pression comme égale à $P(x,y,z)$ en tout point de la surface en x et à $P(x+\mathrm{d}x,y,z)$ sur la surface en $x+\mathrm{d}x$.

Il vient en projection sur $(\mathrm{O}x)$: $\mathrm{d}F_{Px} = [+P(x,y,z) - P(x+\mathrm{d}x,y,z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Par un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\mathrm{d}F_{Px} = \left[-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Px} = -\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

26.10 d) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}y)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote y et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote $y+\mathrm{d}y$.

Comme précédemment, il vient en projection sur $(\mathrm{O}y)$: $\mathrm{d}F_{Py} = [+P(x,y,z) - P(x,y+\mathrm{d}y,z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}y$ donne :

$$\mathrm{d}F_{Py} = \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Py} = -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

26.10 e) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}z)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote z et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote $z+\mathrm{d}z$.

On a : $\mathrm{d}F_{Pz} = [+P(x,y,z) - P(x,y,z+\mathrm{d}z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, qui donne par le même raisonnement que précédemment :

$$\mathrm{d}F_{Pz} = \left[-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Pz} = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

26.10 f) En reprenant les résultats précédents, la résultante des forces pressantes exercée sur le volume particulaire $\mathrm{d}\tau$ s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = -\left[\dfrac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right]\mathrm{d}\tau$, d'où $\overrightarrow{f_P} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{F_P}}{\mathrm{d}\tau} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P.$

.....

26.11 a) La résultante des forces de pression s'écrit $\overrightarrow{F_P} = -\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}\overrightarrow{S_{\mathrm{ext}}} = -\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$. Si la pression est uniforme, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{F_P} = \vec{0}$.

.....

26.11 b) Pour que la distribution initiale des pressions, avec P_2 sur S_2 soit la même que la superposition de P_1 uniforme partout et de P' extérieure sur S_2, il faut que $P' = P_2 - P_1$.

.....

26.11 c) On calcule la résultante des forces de pression sur Σ en utilisant la superposition des deux distributions précédentes. La contribution pour P_1 uniforme donne une résultante nulle (voir question a).
La contribution pour P' donne : $\overrightarrow{F_P} = -P' S_2 \overrightarrow{e_z}$, soit $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2) S_2 \overrightarrow{e_z}$.

.....

26.12 a) Compte tenu de la définition prise pour $\mathrm{d}\overrightarrow{f_{\text{vis}}}$, la force extérieure au volume particulaire $\mathrm{d}\tau$ qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ située à la cote y est directement $\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}(y,t) = +\overrightarrow{f_{\text{vis}}}(y,t) = -\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$. La force visqueuse extérieure exercée sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ en $y + \mathrm{d}y$ est celle due aux couches fluides situées en $y' \geqslant y + \mathrm{d}y$, donc, en vertu du principe des actions réciproques, l'opposée de celle exercée par les couches situées en $y' \leqslant y + \mathrm{d}y$. On aura donc $\mathrm{d}\overrightarrow{F_2}(y + \mathrm{d}y, t) = -\overrightarrow{f_{\text{vis}}}(y + \mathrm{d}y, t) = +\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$. La bonne réponse est la réponse (d).

.....

26.12 b) On reprend l'expression de $\mathrm{d}\vec{F}$ de la question précédente et on forme un développement de Taylor-Young de $v_x(y,t)$ par rapport à y limité au premier ordre en $\mathrm{d}y$, soit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y, t) \approx \frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Il vient $\mathrm{d}\vec{F} = +\eta \left[\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y, t) - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$ soit $\mathrm{d}\vec{F} = +\eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$.

.....

26.12 c) On sait que pour un fluide incompressible, le champ des vitesses vérifie l'équation locale $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$: la réponse (c) n'est donc pas pertinente. On a montré à la question précédente que pour un champ de vitesses du type $\vec{v}(\mathrm{M},t) = v_x(y,t)\,\overrightarrow{e_x}$, la force volumique de viscosité au sein du fluide s'écrit $\overrightarrow{f_{\text{visc}}}(\mathrm{M},t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\tau} = +\eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\overrightarrow{e_x}$, dont la généralisation à un champ de vitesses quelconque conduit à $\overrightarrow{f_{\text{visc}}}(\mathrm{M},t) = \eta \Delta(\vec{v})$, soit la réponse (a).

.....

26.13 a) La dimension de $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est : $[\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}] = \dfrac{[\text{vitesse}]}{[\text{temps}]} = L.T^{-2}$.

La dimension de $\rho \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est donc : $\left[\rho \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right] = M.L^{-3}.L.T^{-2} = \dfrac{[\text{force}]}{[\text{volume}]}$. La bonne réponse est la réponse (d).

.....

26.13 b) On rappelle que $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v})$. Pour un écoulement stationnaire, on a $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$. Pour un écoulement uniforme, $\vec{v}$ ne dépend pas du point choisi, donc $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = \vec{0}$.

La bonne réponse est donc la réponse (a).

.....

26.13 c) Si les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, le champ eulérien des vitesses est du type

$$\vec{v}(\mathrm{M},t) = v_x(\mathrm{M},t)\,\overrightarrow{e_x}$$

en choisissant l'axe des x suivant la direction de $\vec{v}$. Pour un écoulement incompressible et homogène, on a $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0$. Comme l'écoulement est stationnaire : $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

L'accélération convective vaut ici : $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = \left(v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right)(\vec{v}) = \vec{0}$. D'où $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \vec{0}$.

.....

26.14 a) On a $\vec{v}(\mathrm{M},t) = \vec{0}$ donc $\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(\mathrm{M},t) + \vec{F}_{\mathrm{V,a}}$.

.....

26.14 b) Une particule d'eau de masse m subit une force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_{\mathrm{M}}(t)$ donc

$$\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \vec{P}_V + \vec{F}_{V,\mathrm{ie}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}.$$

.....

26.14 c) Une particule d'eau de masse m se trouvant à une distance r de l'axe $(\mathrm{O}z)$ subit une force d'inertie d'entraînement $-mr\omega^2\vec{e_r}$ donc

$$\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \vec{P_V} + \vec{F}_{V,\mathrm{ie}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}.$$

.....

26.15 a) L'accélération locale $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est nulle car l'écoulement est stationnaire. L'accélération convective se réduit ici à : $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = v(z)\dfrac{\partial v(z)}{\partial x}\vec{e_x}$. L'écoulement étant supposé incompressible, le champ des vitesses vérifie l'équation locale $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v(z)}{\partial x} = 0$. On obtient ainsi : $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$.

.....

26.15 b) On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes et en cartésiennes seulement, les composantes du laplacien vectoriel sont le laplacien des composantes, soit ici : $\Delta(\vec{v}) = \Delta(v_x)\vec{e_x}$ (les autres composantes de $\vec{v}$ sont nulles).

Or, on a $\Delta(v_x) = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$. Comme $v_x = v(z)$ ne dépend que de z, il reste $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_x}$.

La bonne réponse est la réponse (b).

.....

26.15 c) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant $(\mathrm{O}x)$ donne ici : $\dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0$, qui s'intègre en $v(z) = Az + B$.

Les conditions aux limites donnent ici, en $z = \pm a$: $\begin{cases} +U = Aa + B \\ -U = -Aa + B \end{cases}$ On en déduit $B = 0$ et $A = \dfrac{U}{a}$.

Finalement, on a $v(z) = U\dfrac{z}{a}$.

.....

26.15 d) On écrit que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{v}$, soit ici $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{U}{a}z \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{U}{a} \\ 0 \end{vmatrix} = \dfrac{U}{a}\vec{e_y}$: la réponse (c) est la bonne.

.....

26.16 a) L'équation de conservation de la masse avec $\rho = C^{\mathrm{ste}}$ conduit à $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v(r,z)}{\partial z} = 0$: la composante axiale v_z de $\vec{v}$ ne dépend que de r.

.....

26.16 b) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la direction radiale $\vec{e_r}$ donne : $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial r} + 0$: la bonne réponse est la réponse (a).

.....

26.16 c) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la direction axiale $(\mathrm{O}z)$ donne : $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r)}{\partial r}\right)$.

Le membre de gauche de cette équation aux dérivées partielles ne dépend que de z (on a montré à la question précédente que P ne dépendait pas de r), tandis que le membre de droite ne dépend que de r : ces deux membres de l'équation ne peuvent qu'être égaux à une constante numérique C. La bonne réponse est la réponse (a).

.....

26.16 d) Puisque $\dfrac{\partial P}{\partial z} = C^{\text{ste}}$, et que P ne dépend que de z, la loi $P(z)$ est une loi affine et $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \dfrac{P(L)-P(0)}{L-0}$.

L'équation de Navier-Stokes donne en projection sur $(\mathrm{O}z)$, avec ce qui a été déjà vu :

$$\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{[P(L)-P(0)]}{L} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{[P(L)-P(0)]}{\eta L}r,$$

qui s'intègre entre 0 et r en :

$$r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} - 0 = \frac{[P(L)-P(0)]}{2\eta L}r^2 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{[P(L)-P(0)]}{2\eta L}r.$$

Une seconde intégration par rapport à r entre 0 et r conduit à : $v(r) - v(0) = \dfrac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}r^2$.

Il reste à déterminer $v(0)$, en utilisant la condition aux limites en $r = R$ où $v(R) = 0$. On obtient ainsi :

$$0 - v(0) = \frac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}R^2.$$

Finalement, le champ des vitesses d'un écoulement de Poiseuille cylindrique s'écrit :

$$v(r) = \frac{[P(0)-P(L)]}{4\eta L}(R^2 - r^2).$$

.....

26.17 a) On a $\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\mathrm{M},t) + \left(\vec{v}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(\mathrm{M},t)\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(\mathrm{M},t) + \mu\vec{g}$.

.....

26.17 b) On écrit $\mu\dfrac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \mu g(R-r) + P_\mathrm{A} - P_\mathrm{B} = \mu\dfrac{v_\mathrm{B}^2}{2} = \mu\dfrac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \Delta P$ donc $v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2 = \dfrac{2\Delta P}{\mu}$.

.....

26.17 c) On a $v_\mathrm{B}^2 = v_\mathrm{A}^2 + \dfrac{2\Delta P}{\mu}$ et $v_\mathrm{A} = \dfrac{s}{S}v_B$ donc $v_\mathrm{B}^2\left(1 - \left(\dfrac{s}{S}\right)^2\right) = \dfrac{2\Delta P}{\mu}$ et $v_B = S\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}$.

On en déduit :

$$D_V = v_\mathrm{B}s = Ss\sqrt{\frac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}.$$

.....

26.18 a) On écrit $\dfrac{\partial \vec{v}(z)}{\partial t} + (\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}(z) = \vec{0} + v(z)\dfrac{\partial v(z)}{\partial x}\vec{e_x} = \vec{0}$.

.....

26.18 b) En régime permanent, l'accélération d'une particule de fluide étant nulle et la seule autre force volumique est celle de pesanteur :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(x,z) + \eta\Delta(\vec{v}(z)) + \mu\vec{g}.$$

.....

26.18 c) On a

$$\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P(x,z)}{\partial z}\vec{e_z} = \eta\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}\vec{e_x} - \mu g\vec{e_z}.$$

Donc la projection selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ donne : $\dfrac{\partial P(x,z)}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$.

.....

26.18 d) La primitive par rapport à z donne : $\eta\dfrac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = -Az + C$ et la seconde primitive conduit à

$$\eta v(z) = -\frac{A}{2}z^2 + Cz + D.$$

Avec les trois conditions, on trouve $D = \eta v_0$, $C = 0$ et $A = \dfrac{2\eta v_0}{h^2}$ d'où en éliminant η, $v(z) = v_0\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)$.

.....

26.18 e) Comme $A = \dfrac{2\eta v_0}{h^2}$, la primitive par rapport à x donne : $P(x) = -Ax + B$ et avec la condition $P(0) = P_0$, on a $B = P_0$ d'où $P(x) = P_0 - Ax$.

.....

26.19 a) L'accélération convective est nulle : on a $(\vec{v}(z,t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}(z,t) = v(z)\dfrac{\partial \overrightarrow{v(z)}}{\partial x} = \vec{0}$.
Il n'y a pas de gradient de pression dans le sens de l'écoulement donc la pression ne dépend que de z et de t. On a

$$\mu \frac{\partial \vec{v}(z,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z,t) + \eta \Delta(\vec{v}(z,t)) + \mu \vec{g}.$$

.....

26.19 b) On a

$$\mu \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\vec{e_x} = -\frac{\partial P(z,t)}{\partial z}\vec{e_z} + \eta \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\vec{e_x} - \mu g \vec{e_z}.$$

Donc selon (Ox), on a $\mu \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$. On reconnaît l'équation de diffusion.

.....

26.19 c) L'équation précédente est une équation de diffusion donc en ordre de grandeur $\mu \dfrac{v}{\tau} \approx \eta \dfrac{v}{h^2}$ d'où $\tau \approx \dfrac{\mu}{\eta} h^2$.

.....

26.19 d) On calcule $\tau \approx \dfrac{h^2}{\nu} = \dfrac{(1 \times 10^{-1}\,\text{m})^2}{1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 1{,}0 \times 10^4\,\text{s}$ soit environ 2 h 46 min 40 s.

.....

26.19 e) On a $0 = \eta \dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$ donc $\dfrac{\text{d}^2 v(z)}{\text{d}z^2} = 0$; c'est l'équation de Laplace.

.....

26.19 f) On a $\dfrac{\text{d}v(z)}{\text{d}z} = A$ puis $v(z) = Az + B$ avec A et B des constantes d'intégration. D'après les conditions aux limites, on a $0 = v(0) = B$ et $v_p = v(h) = Ah$ d'où $A = \dfrac{v_p}{h}$ et donc $v(z) = \dfrac{v_p}{h} z$.

.....

26.19 g) On a $\overrightarrow{F_\text{v}} = -\eta \dfrac{\text{d}}{\text{d}z}\left(\dfrac{v_p}{h} z\right)_{z=h} S\vec{e_x} = -\eta \dfrac{v_p}{h} S\vec{e_x}$.

.....

26.20 a) En notant $\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$, l'équation qui régit l'écoulement peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = \vec{0}.$$

qui montre que la charge $C = \dfrac{\vec{v}^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} + gz$ est constante dans tout le volume de l'écoulement irrotationnel. La bonne réponse est la réponse (a).

.....

26.20 b) En considérant l'air à l'extérieur d'un cyclone en écoulement stationnaire, incompressible, parfait et irrotationnel, la forme étendue de la relation de Bernoulli, donne entre le bord du cyclone où $v = 200\,\text{km/h}$ et le centre où la vitesse est nulle $\rho \dfrac{v^2}{2} + P_\text{min} = P_\text{max}$ donc $P_\text{max} - P_\text{min} = \dfrac{1{,}2\,\text{kg/m}^3 \times (200\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}/3{,}6)^2}{2} \approx 20\,\text{mbar}$.

.....

26.21 a) La relation de Bernoulli sur une l.d.c. entre un point A de la surface libre à la pression atmosphérique P_0 et un point du jet de sortie en B, lui aussi au contact de l'atmosphère, donc à la pression P_0 donne :

$$P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_\text{A}^2 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2.$$

D'où $v_\text{B}^2 = v_\text{A}^2 + 2gh$.

.....

26.21 b) L'incompressibilité du fluide entraîne la conservation du débit-volume : on a $S_\mathrm{A} v_\mathrm{A} = S_\mathrm{B} v_\mathrm{A}$. Comme on a aussi $S_\mathrm{A} = \pi R^2$ et $S_\mathrm{B} = \pi a^2$, on en déduit $v_\mathrm{B} = \dfrac{R^2}{a^2} v_\mathrm{A}$.

.....

26.21 c) Comme $a \ll R$, on aura $v_\mathrm{A} \ll v_\mathrm{B}$, d'où $v_\mathrm{B} \simeq \sqrt{2gh}$.

.....

26.22 a) Avec $(\mathrm{O}z)$ suivant la verticale ascendante, on a $\vec{g} = -g\vec{e_z}$. On en déduit $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$. La bonne réponse est la réponse (c).

.....

26.22 b) En faisant circuler l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant, on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ car $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}$. Il reste $\displaystyle\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\vec{v_\mathrm{A}}^2 - \vec{v_\mathrm{A}}^2}{2}$.

Pour le terme de droite, on a $\displaystyle -\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + g\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{P_\mathrm{A} - P_\mathrm{A}}{\rho} - g(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{A})$.

.....

26.22 c) Le calcul mené à la question b) montre que $P_\mathrm{A} + \dfrac{\rho\vec{v_\mathrm{A}}^2}{2} + \rho g z_\mathrm{A} = P_\mathrm{A} + \dfrac{\rho\vec{v_\mathrm{A}}^2}{2} + \rho g z_\mathrm{A}$, donc constante, à condition de rester sur une même ligne de courant liant A et B. La bonne réponse est donc la réponse (c).

.....

26.23 a) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \dfrac{U\partial\vec{v^*}}{T\partial t^*} = \dfrac{U}{T}\dfrac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*}$.

.....

26.23 b) On trouve $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = \left(U\vec{v^*} \cdot \dfrac{1}{L}\overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(U\vec{v^*}) = \dfrac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*})$.

.....

26.23 c) On a $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{1}{L^2}\Delta^*(U\vec{v^*}) = \dfrac{U}{L^2}\Delta^*(\vec{v^*})$.

.....

26.23 d) Compte tenu des résultats précédents, l'équation de Navier-Stokes se réécrit, en divisant par $\rho = C^\mathrm{ste}$:

$$\frac{U}{T}\frac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*}) = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}^*(P)}{L} - g\vec{e_z} + \frac{\eta U}{\rho L^2}\Delta^*(\vec{v^*}).$$

En multipliant chaque terme par $\dfrac{L}{U^2}$, il vient :

$$\frac{L}{UT}\frac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*} + \left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\left(\frac{P}{\rho U^2}\right) - \frac{gL}{U^2}\vec{e_z} + \frac{\eta}{\rho LU}\Delta^*(\vec{v^*}).$$

Par identification, il vient $P^* = \rho U^2$.

.....

26.23 e) L'expression obtenue à la question précédente donne immédiatement $\mathcal{S}_\mathrm{tr} = \dfrac{L}{UT}$.

.....

26.23 f) Le nombre de Froude est tel que $\dfrac{1}{\mathcal{F}_\mathrm{r}} = \dfrac{gL}{U^2}$, d'où $\mathcal{F}_\mathrm{r} = \dfrac{U^2}{gL}$.

.....

26.23 g) On identifie $\dfrac{1}{\mathrm{Re}} = \dfrac{\eta}{\rho LU}$ qui donne $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho LU}{\eta}$.

.....

Fiche n° 27. Bilans en mécanique des fluides

Réponses

27.1 a) non homogène

27.1 b) homogène

27.1 c) non homogène

27.1 d) homogène

27.2 a) $5{,}9 \times 10^4\,\text{Pa}$

27.2 b) $1{,}3 \times 10^2\,\text{J/kg}$

27.3 a) oui

27.3 b) oui

27.3 c) oui

27.3 d) oui

27.4 a) (c)

27.4 b) (b)

27.4 c) (b)

27.4 d) (c)

27.4 e) (b)

27.5 a) $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\mu} = \text{cte}$

27.5 b) $gz + \dfrac{P}{\mu} = \text{cte}$

27.5 c) $v = 0{,}99\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

27.6 a) $D_v = 0{,}55\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$

27.6 b) (c)

27.6 c) (b)

27.6 d) $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\text{W}$

27.6 e) (c)

27.7 a) $\xi = 0{,}05$

27.7 b) $3{,}1 \times 10^2\,\text{Pa}$

27.7 c) 2×10^{-4}

27.7 d) $60\,\mu\text{m}$

27.8 a) $U_1 = U_2 = 3{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

27.8 b) $3{,}0\,\text{bar}$

27.9 a) (c)

27.9 b) (c)

27.9 c) $-\mathcal{P}$

27.9 d) $\dfrac{1}{2} D_\text{m} v_2^2\,\text{d}t$

27.9 e) $\dfrac{1}{2} D_\text{m} v_1^2\,\text{d}t$

27.9 f) $\mathcal{P} = \dfrac{1}{2} D_\text{m}(v_1^2 - v_2^2)$

27.9 g) $\mathcal{P} = 100\,\text{W}$

27.10 a) $\text{d}m_1 = D_{m1}\,\text{d}t$

27.10 b) $\text{d}m_2 = D_{m2}\,\text{d}t$

27.10 c) $\text{d}m = \text{d}m_1 - \text{d}m_2$

27.10 d) $D_{m1} = D_{m2}$

27.11 a) $m^*(t) = m(t) + \text{d}m_1$

27.11 b) $m^*(t + \text{d}t) = m(t + \text{d}t) + \text{d}m_2$

27.11 c) $\text{d}m^* = 0$

27.11 d) $\text{d}m_1 = \text{d}m_2$

27.12 a) $m\vec{g}$

27.12 b) $-\lambda\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$

27.12 c) $\vec{0}$

27.12 d) $\vec{dp} = D_\text{m}\,\vec{u}\,\text{d}t$

27.12 e) $\overrightarrow{F_\text{P}} = -D_\text{m}\,\vec{u}$

27.13 a) ..... $\boxed{Sc\,\mathrm{d}t}$

27.13 b) ..... $\boxed{\vec{p}(t) = \frac{h}{\lambda} nSc\,\mathrm{d}t\vec{e_x}}$

27.13 c) ..... $\boxed{\vec{p}(t+\mathrm{d}t) = -\frac{h}{\lambda} nSc\,\mathrm{d}t\vec{e_x}}$

27.13 d) ..... $\boxed{\vec{F}_{\text{photons}\to\text{voile}} = 2\frac{h}{\lambda} nSc\vec{e_x}}$

27.14 a) ..... $\boxed{P_1 S_1 \vec{u}_x}$

27.14 b) ..... $\boxed{-P_2 S_2 \vec{u}_x}$

27.14 c) ..... $\boxed{-\vec{F}}$

27.14 d) ..... $\boxed{D_\mathrm{m}\vec{v_2}\,\mathrm{d}t}$

27.14 e) ..... $\boxed{D_\mathrm{m}\vec{v_1}\,\mathrm{d}t}$

27.14 f) ..... $\boxed{\vec{F} = (P_1 S_1 - P_2 S_2)\vec{u}_x}$

27.14 g) ..... $\boxed{F = 200\,\mathrm{N}}$

Corrigés

27.1 a) Comme le membre de gauche est homogène à une énergie massique, on voit que le terme ρ est en trop dans le membre de droite.

.....

27.1 b) Le membre de gauche est homogène à un débit massique (en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) fois une énergie massique (en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$), ce qui revient à une puissance. Le terme de droite étant également une puissance, l'équation est homogène.

.....

27.1 c) Il manque un ρ au dénominateur dans le terme de droite : $-D_\mathrm{m}\dfrac{\Delta P}{\rho}$.

.....

27.1 d) Le terme de gauche est homogène à une longueur : il mesure directement la perte de charge en hauteur. L'équation est homogène.

.....

27.2 a) La perte de charge correspond au terme gh_pc sauf qu'en l'état, elle correspond à une perte d'énergie massique. Pour obtenir une perte de pression, il faut multiplier par μ_0. Ainsi, $\Delta P_\mathrm{pc} = \mu_0 g h_\mathrm{pc}$.

.....

27.2 b) Sans variation de pression et de vitesse, la relation de Bernoulli généralisée s'écrit :

$$g\Delta z = w_u - gh_\mathrm{pc} \qquad \text{donc} \qquad w_u = g(\Delta z + h_\mathrm{pc}).$$

.....

27.3 a) Le fluide est ici un liquide. C'est un fluide incompressible donc l'écoulement est également incompressible.

.....

27.3 b) Le fait que $s \ll S$ permet de qualifier l'écoulement de quasi-stationnaire car, par conservation du débit volumique, la vitesse de la surface libre de l'eau dans le réservoir est très faible devant la vitesse de sortie ; autrement dit, on a $\dot{h} \ll v_B$.

.....

27.3 c) On néglige toute perte de charge, ce qui revient à dire que l'écoulement est parfait.

.....

27.3 d) Le fluide est de l'eau liquide, qu'on peut considérer comme une phase condensée incompressible et indilatable, c'est à dire de masse volumique constante.

.....

27.4 a) Le récipient est ouvert sur l'extérieur en A et en B, la pression est donc égale à la pression atmosphérique en ces deux points.

.....

27.4 b) Le débit volumique est défini comme $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$. La réponse (b) est donc la seule correcte.

.....

27.4 d) À partir de l'égalité des deux débits volumiques, on peut écrire $v_\mathrm{A} = \dfrac{s v_\mathrm{B}}{S}$. Comme $s \ll S$, on en déduit que $v_\mathrm{A} \ll v_\mathrm{B}$.

.....

27.4 e) Avec les résultats des questions précédentes (égalité des pressions et vitesse négligeable en A), la relation de Bernoulli devient :

$$g z_\mathrm{A} = \frac{v_\mathrm{B}^2}{2} + g z_\mathrm{B}.$$

On obtient donc la réponse (a) avec $h(t) = z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B}$.

.....

27.5 a) La cote z reste constante, les contributions de pesanteur gz se compensent.

.....

27.5 b) La vitesse v est faible, les contributions cinétiques $\dfrac{v^2}{2}$ sont négligées.

.....

27.5 c) On obtient $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 0{,}99\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

.....

27.6 a) Le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec S la section de la canalisation. Soit $D_v = U\pi\dfrac{D^2}{4}$ d'où $D_v = 7{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \times \pi \times \dfrac{(10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} = 5{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s} = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$

.....

27.6 b) La vitesse en A avant la pompe étant négligeable et celle en B valant U, on a $\Delta v^2 = U^2$.

Avant la pompe et après le robinet, la pression vaut P_0, pression atmosphérique donc $\Delta P = 0$.

Le point B est situé à la distance L au-dessus de A donc $\Delta z = L$. Dans le terme de droite, w_u est le travail massique fourni par la pompe et $g h_\mathrm{pc} = \Delta e_\mathrm{pcr}$ est la perte d'énergie massique due aux pertes régulières le long du tuyau de longueur L.

La relation de Bernoulli s'écrit donc : $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \Delta e_\mathrm{pcr} = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$.

.....

27.6 c) La relation de Bernoulli donnée est un bilan d'énergie massique il faut le multiplier par une masse et le diviser par un temps pour obtenir une puissance c'est à dire multiplier par un débit massique.

.....

27.6 d) On déduit de la première question : $w_u = \dfrac{1}{2}U^2 + gL + \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2 = gL + \dfrac{1}{2}U^2\left(1 + \xi\dfrac{L}{D}\right)$.

Or, on a $\mathcal{P} = D_\mathrm{m} w_u = \mu D_v w_u$. Donc

$$\mathcal{P} = \mu D_v\left[\frac{1}{2}U^2 + gL + \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2\right] = \mu D_v\left[gL + \frac{1}{2}U^2\left(1 + \xi\frac{L}{D}\right)\right].$$

L'application numérique donne $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$.

.....

27.6 e) Il faut que la puissance soit supérieure à $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$, on prend donc la pompe ayant une puissance immédiatement supérieure.

.....

27.7 a) On calcule la rugosité relative $\frac{\varepsilon}{D} = 0{,}02$ et on lit sur l'axe des ordonnées la valeur de ξ.

.....

27.7 b) On a $\Delta P = \frac{1}{2}\rho U^2 \xi \frac{\ell}{D} = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \times \left(0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2 \times 0{,}05 \times \frac{10\,\mathrm{m}}{20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$.

.....

27.8 a) Comme le diamètre de tout le circuit est constant, on a : $U_1 = U_2 = \frac{D_v}{S} = \frac{4D_v}{\pi D^2}$.

.....

27.8 b) Réécrivons la relation de Bernoulli entre le début du tuyau vertical et un point en aval du robinet en la rendant homogène à une pression :

$$\frac{1}{2}\mu\left(U^2 - U^2\right) + P_0 - P_i + g\mu(L - 0) = -\frac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2).$$

Donc, on a $P_i = P_0 + g\mu L + \frac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2)$.

.....

27.9 a) La force volumique associée à la résultante des forces de pression s'écrit $\vec{f}_p = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$. La pression étant uniforme, la résultante des forces pressantes est nulle.

.....

27.9 b) Les forces pressantes étant nulles, elles ne travaillent pas.

.....

27.9 c) D'un point de vue énergétique, ce qui est fourni par un système est reçu par un autre.

.....

27.9 d) La masse élémentaire $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ sort à la vitesse $\vec{v_2}$ en aval pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

27.9 e) La masse élémentaire $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ entre à la vitesse $\vec{v_1}$ en amont pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

27.9 f) En régime stationnaire la variation d'énergie cinétique est $\frac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2)\,\mathrm{d}t$. Le théorème de la puissance cinétique donne alors $\frac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2) = -\mathcal{P}$.

.....

27.11 c) Le système (S^*) étant fermé, sa masse ne varie pas, donc $\mathrm{d}m^* = 0$.

.....

27.11 d) On a $\mathrm{d}m^* = m^*(t + dt) - m^*(t) = m(t + dt) + \mathrm{d}m_2 - m(t) - \mathrm{d}m_1 = 0$.

Comme $m(t + dt) = m(t)$ en régime stationnaire, il reste $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$.

.....

27.12 d) Dans le référentiel de la fusée, les gaz éjectés ont une vitesse nulle lorsqu'ils sont encore dans la fusée. Durant $\mathrm{d}t$, une masse $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ est éjectée de la fusée à une vitesse $\vec{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{d}p} = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t\,\vec{u}$.

.....

27.12 e) Les gaz éjectés subissent une force $-\vec{F}_P$ opposée à celle $\vec{F}_P$ de poussée subie par la fusée (troisième loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction).

Le bilan de quantité de mouvement pour les gaz éjectés dans le référentiel de la fusée s'écrit : $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\vec{F}_P$ avec $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m}\,\vec{u}$. On obtient donc $\vec{F}_P = -D_\mathrm{m}\,\vec{u}$.

.....

27.13 b) La quantité de mouvement de l'ensemble des photons est $N\vec{p}_{1\text{ photon}}$ où N est le nombre de photons qui vont heurter la voile durant dt.

.....

27.13 d) Par application de la loi de la quantité de mouvement appliquée aux photons, on a

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)=\vec{F}_{\text{voile}\to\text{photons}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{donc} \qquad \vec{F}_{\text{voile}\to\text{photons}}=\frac{\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}=-2\frac{h}{\lambda}nSc\vec{e_x}.$$

Par application du principe des actions réciproques, on a $\vec{F}_{\text{voile}\to\text{photons}}=2\dfrac{h}{\lambda}nSc\vec{e_x}$.

.....

27.14 a) L'écoulement est unidimensionnel, la pression est donc uniforme sur toute section droite de la canalisation. En amont la force pressante est motrice.

.....

27.14 b) L'écoulement est unidimensionnel, la pression est donc uniforme sur toute section droite de la canalisation. En aval la force pressante est résistante.

.....

27.14 c) Il suffit d'invoquer le principe des actions réciproques (la troisième loi de Newton).

.....

27.14 d) La masse élémentaire $D_{\text{m}}\,\mathrm{d}t$ sort à la vitesse $\vec{v_2}$ en aval pendant la durée dt.

.....

27.14 e) La masse élémentaire $D_{\text{m}}\,\mathrm{d}t$ entre à la vitesse $\vec{v_1}$ en amont pendant la durée dt.

.....

27.14 f) En régime stationnaire la variation de quantité de mouvement est $D_{\text{m}}(\vec{v_2}-\vec{v_1})\,\mathrm{d}t$.

Le théorème de la quantité de mouvement donne alors $D_{\text{m}}(\vec{v_2}-\vec{v_1})=P_1S_1\vec{u}_x-P_2S_2\vec{u}_x-\vec{F}$ puisque v_1 et v_2 peuvent être négligées.

.....