Physique : DS2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Les schémas (donnés ou non) devront être (re)tracés sur vos copies avec soin. Les schémas auront des points attitrés pour chaque question. Il faut savoir être **rapide, précis et propre**. (Quelques données numériques sont données à la fin du sujet)

Partie A

De l'atome d'hydrogène aux galaxies

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm. Cette transition, appelée raie HI à 21 cm, est celle du maser à hydrogène. Elle est aussi à l'origine du rayonnement émis à cette longueur d'onde par le milieu interstellaire constitutif des galaxies. Après avoir étudié l'origine physique de cette transition, nous verrons l'intérêt d'observer des galaxies dans cette fenêtre de rayonnement.

Ce sujet comprend une annexe située en fin de texte et regroupant des extraits de documents, un formulaire et des données numériques.

I La raie HI à 21 cm

Un atome d'hydrogène protoné (isotope ^{1}H dont le noyau est un proton) dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm, c'est ce que l'on appelle usuellement la raie HI à 21 cm. Pour interpréter exactement l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste).

Nous pouvons cependant comprendre qualitativement l'origine de la raie HI à partir des quelques notions simples évoquées dans ce qui suit.

I.A – Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera noté $\vec{L}$.

Q 1. Rappeler l'expression de la force électrostatique $\vec{F}$ s'exerçant sur l'électron.

Q 2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_P de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \to \infty$.

Q 3. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

Q 4. Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{P\,\text{eff}}(r)$$

où $E_{P\,\text{eff}}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital $\vec{L}$ de l'électron.

Q 5. Donner l'allure de la représentation graphique de $E_{P\,\text{eff}}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E et du moment cinétique $\vec{L}$.

Q 6. À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Calculer le rayon r de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique E de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L, e, m_e et ϵ_0.

Q 7. Dessiner une trajectoire de l'électron si $L = 0$.

I.B – Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par

$$L = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

Q 8. Montrer que les orbites sont quantifiées. Déterminer la valeur du rayon a_0 de la première orbite de Bohr.

Q 9. En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.

Q 10. À quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ? Commenter.

Q 11. L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de $\lambda = 21$ cm. Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

PARTIE B

Déviation d'un astéroïde par percussion

On se contentera de réponses courtes.

L'impact d'un astéroïde ou d'une comète sur la Terre pourrait engendrer une catastrophe planétaire. Dans le cadre d'un programme mondial de défense planétaire, les astronomes recensent les géocroiseurs, ces objets célestes susceptibles d'entrer en collision avec la Terre. En cas de danger, une des solutions envisagées est de dévier la trajectoire de l'objet céleste en le percutant avec un engin spatial envoyé depuis la Terre.

Afin de valider cette solution, l'agence spatiale américaine a lancé la mission DART, acronyme anglais signifiant "test de déviation d'un astéroïde double". La cible choisie est un astéroïde nommé Dimorphos, en orbite (à une altitude d'environ un kilomètre) autour d'un autre astéroïde plus gros nommé Didymos. La modification observée de la période de révolution de Dimorphos autour de Didymos à la suite de l'impact a montré que celui-ci pouvait avoir un effet significatif, et que la déviation par percussion est une solution envisageable pour dévier la trajectoire d'un géocroiseur.

Ce problème décrit plusieurs aspects de la mission DART. Dans la partie I, on caractérise l'orbite de Didymos autour du Soleil. Dans la partie II, on montre comment lancer un engin spatial (qu'on nomme DART) depuis la Terre pour qu'il entre en collision avec Dimorphos. La partie III étudie le principe du moteur ionique embarqué à bord de DART afin de le mettre sur la trajectoire voulue. La partie IV est consacrée à la modélisation de l'impact de DART avec Dimorphos, et à l'exploitation des données obtenues à l'issue de la mission.

On supposera dans tout ce problème que la Terre est en mouvement circulaire uniforme autour du Soleil à la distance $r_0 = 150 \times 10^6$ km et à la vitesse $v_0 = 30$ km·s^{-1}. On supposera également que l'orbite de Didymos est dans le même plan que celle de la Terre, et parcourue dans le même sens.

I – Orbite de Didymos autour du Soleil

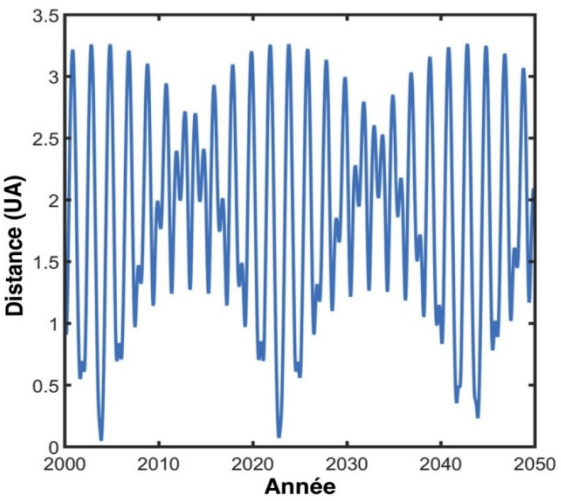


FIGURE 1 – Évolution de la distance séparant la Terre de Didymos entre les années 2000 et 2050, en unités de la distance Terre-Soleil r_0, dite Unité Astronomique. *[Extrait de "Trajectory options for the DART mission", par J. A. Atchison et al., Acta Astronautica (2016), vol. 123, p. 330.]*

Dans cette partie préliminaire, nous allons, grâce à la figure 1, estimer quelques caractéristiques de l'orbite de Didymos.

1. Rappeler en vertu de quel principe le mouvement d'une planète ou d'un astéroïde sous l'attraction du Soleil est dans un plan contenant celui-ci.

2. Didymos décrit une orbite elliptique autour du Soleil. Sa distance minimale au Soleil (correspondant au point de l'orbite dit "périhélie") est $r_{\min} = 1{,}01\, r_0$. Le fait que $r_{\min}$ soit très proche de r_0 explique que Didymos passe parfois très près de la Terre, comme on le voit sur la figure 1, notamment en 2022, qui est l'année choisie pour l'impact. Déduire de la figure une estimation du demi-grand axe de l'orbite de Didymos.

3. Déduire de la valeur du demi-grand axe une estimation de la période T de révolution de Didymos autour du Soleil, en années.

4. Validez votre estimation de T en exploitant les données de la figure 1.

II – Orbite de DART autour du Soleil

5. On lance l'engin spatial DART, de masse m, depuis la Terre. On l'envoie suffisamment loin pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la Terre et ne soit plus sensible qu'à celle du Soleil, et on le place dans un premier temps sur la même orbite que la Terre. Que vaut alors sa vitesse autour du Soleil ?

On modifie ensuite légèrement l'orbite de DART afin qu'il atteigne sa cible. Pour cela, on lui communique pendant un bref instant une impulsion parallèle à la direction du Soleil, qui lui donne une vitesse radiale v_1, avec $|v_1| \ll v_0$, sans changer sa vitesse orthoradiale. Sous l'effet de cette impulsion, la trajectoire n'est plus circulaire, mais elliptique.

6. Quelle est la variation de son moment cinétique par rapport au Soleil ?

7. Quelle est la modification de son énergie mécanique par rapport au Soleil ? En déduire la variation du demi-grand axe au premier ordre en $|v_1|/v_0$, en négligeant les corrections du second ordre.

Nous allons maintenant étudier en détail la modification de la trajectoire par deux méthodes.

Première méthode : utilisation de l'énergie potentielle effective

8. On rappelle que le mouvement radial $r(t)$ dans un champ de gravitation newtonien est celui d'une particule à une dimension soumise à une énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$. Établir l'expression de $E_{p,\text{eff}}(r)$ et l'exprimer en fonction de m, r_0, v_0 et r.

9. Comment, à partir de l'énergie potentielle effective, retrouve-t-on le rayon de l'orbite circulaire ? Vérifiez que vous obtenez le résultat attendu.

10. On considère maintenant des trajectoires faiblement elliptiques, telles que $r(t) = r_0 + r_1(t)$ avec, pour tout temps t, $|r_1(t)| \ll r_0$. Pour ces trajectoires, $r(t)$ présente des oscillations de faible amplitude autour de r_0. En utilisant l'expression de $E_{p,\text{eff}}(r)$ obtenue plus haut, déterminer la pulsation ω de ces petites oscillations en fonction de r_0 et v_0.

11. On veut que l'aphélie de l'orbite de DART, défini comme le point de l'orbite où sa distance au Soleil est maximale, coïncide avec le périhélie de l'orbite de Didymos (voir question **2**) ce qui permet un impact. Est-on bien dans le cadre de l'approximation faite à la question précédente ?

12. En utilisant l'expression de $r_1(t)$, déterminer la valeur numérique de $|v_1|$ permettant de réaliser cet objectif.

13. Que vaut la période de la trajectoire elliptique de DART ? Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans calcul ?

14. L'impulsion radiale permettant à DART de passer sur une orbite elliptique lui a été communiquée le 24 décembre 2021. DART a atteint sa cible Dimorphos le 26 septembre 2022, soit trois quarts d'une année plus tard. En déduire si l'impulsion radiale était dirigée vers le Soleil ou dans le sens opposé.

Seconde méthode : constantes du mouvement

On repère un point du plan de la trajectoire par un système de coordonnées polaires (r,θ) centré sur le Soleil. On désigne par $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ les vecteurs unitaires de base.

15. On définit le vecteur $\vec{T} = \vec{v} - B\vec{e}_\theta$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse et B une constante. Montrer que pour une trajectoire donnée, il existe une valeur de B telle que le vecteur $\vec{T}$ soit constant, et déterminer son expression, en y faisant apparaître le moment cinétique.

16. Déterminer B et $\vec{T}$ pour l'orbite circulaire de rayon r_0.

17. Dessinez une orbite elliptique, en précisant la position du Soleil et le sens de parcours. Suivant lequel des deux axes de l'ellipse le vecteur $\vec{T}$ est-il dirigé ? Précisez son sens sur votre dessin.

18. On applique maintenant ces résultats à l'orbite elliptique de DART après qu'une vitesse radiale v_1 lui a été communiquée. Quelles sont les expressions de B et $|\vec{T}|$ dans ce cas, en fonction de v_0 et v_1 ?

19. Déterminer la vitesse de DART au périhélie et à l'aphélie en fonction de v_0 et v_1.

20. Quelle constante du mouvement permet de relier la vitesse à la distance au Soleil en ces deux points ? En déduire l'expression de la distance au Soleil à l'aphélie en fonction de r_0, v_0 et v_1.

21. Vérifier qu'on retrouve bien le résultat de la question **12** dans la limite où $|v_1| \ll v_0$.

Données numériques

Constante de Planck	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1{,}054 \times 10^{-34}$ J·s
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m·s^{-1}
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H·m^{-1}
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Masse du proton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg $= 1836\, m_e$
Facteur de Landé de l'électron	$g_S = 2{,}00$
Facteur de Landé du proton	$g_p = 5{,}58$
Magnéton de Bohr	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \times 10^{-24}$ J·T^{-1}
Constante de Boltzmann	$k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}
Constante de gravitation	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}
Parsec	1 pc $= 3{,}09 \times 10^{16}$ m
Masse du Soleil	$M_\odot = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg