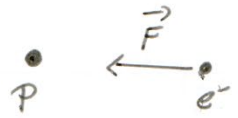
Physique : DS2

Partie A : La raie HI de l'hydrogène (Centrale PC – 2018)

Q1) Soit $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$



Q2) On a $dE_p = -\vec{F}.\overrightarrow{dOM} \Rightarrow E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \underbrace{cste}_{=0}$ avec $\lim_{r\to\infty} E_p = 0$

Q3) Soit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = cste$

$\Rightarrow \vec{v}$ et $\overrightarrow{OM} \in$ au même plan qui est toujours orthogonal à $\vec{L}$

$\Rightarrow$ Le mouvement est plan

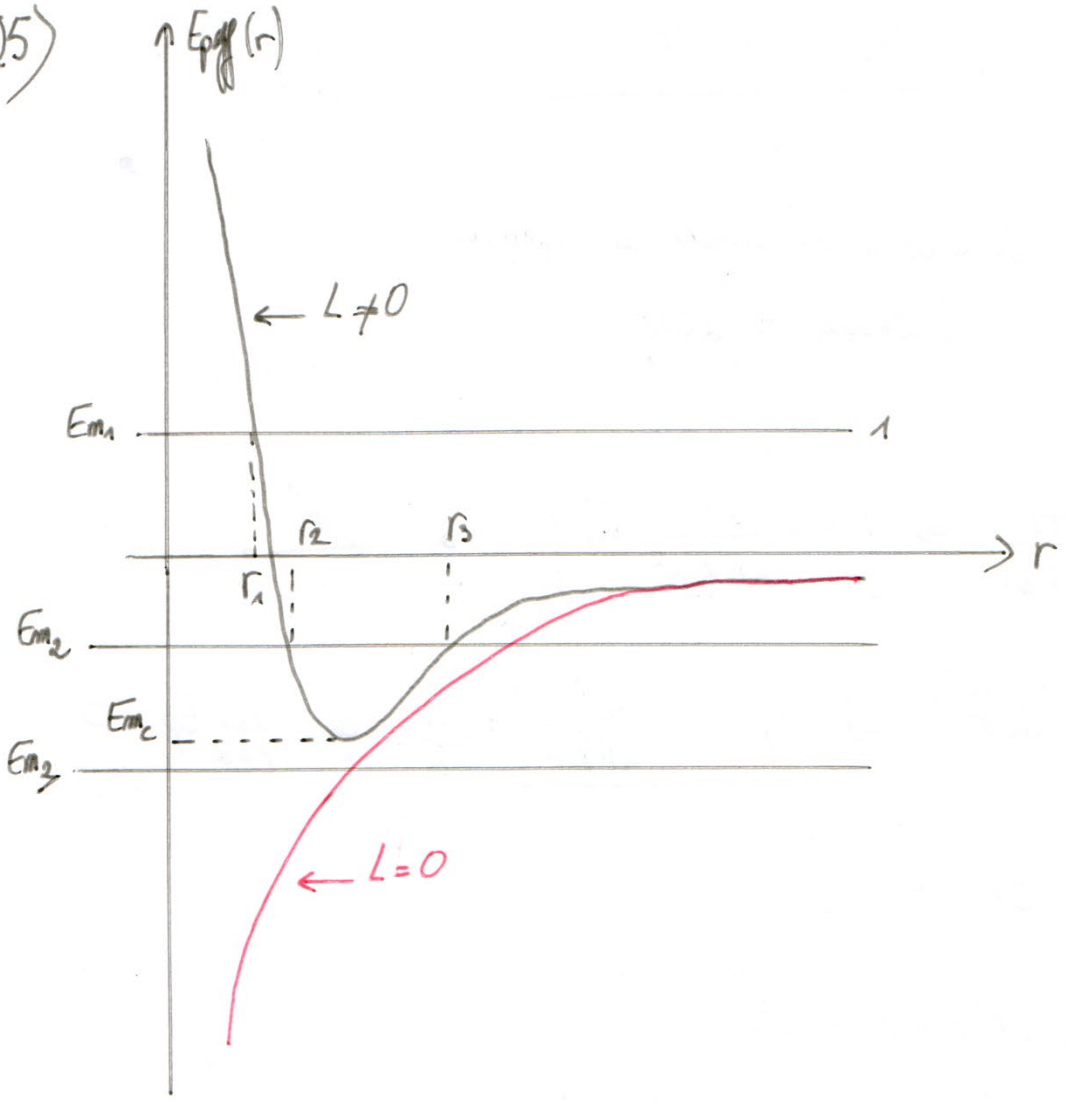
Q4) Soit $E_m = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}m_e\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

or $\|\vec{L}\| = m_e r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}\|}{m_e r^2} = \frac{L}{m_e r^2}$

d'où $E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{r^2}{2}\cdot\frac{L^2}{m_e r^4}$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ où $E_{peff}(r) = \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Q5)



1er cas : $L \neq 0$

- Si $E_m = E_{m_1}$, $r \geq r_1$: état libre (hyperbole)
- Si $E_m = E_{m_2}$, $r_2 \leq r \leq r_3$: état lié (ellipse)
- Si $E_m = 0$, parabole.
- Si $E_m = E_{m_3}$, états impossibles.

2ème cas : $L = 0$

- Si $E_m > 0$: états impossibles
- Si $E_m < 0$: états libres

Q6) Pour avoir une trajectoire circulaire : . $L \neq 0$

. $E_m = E_{m_c} = E_{p,eff,min}$

• Soit $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{L^2}{2m_e} \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\right) + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$

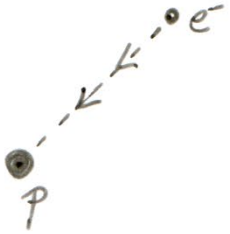
$\Leftrightarrow \frac{L^2}{m_e r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{m_e e^2}$ (1)

• Et $E_m = \frac{1}{2} m_e \frac{L^2}{m_e^2 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ car $\dot{r} = 0$

$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \Rightarrow E_m = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}$ (2)

Q7) Si $L = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ colinéaires
$\Rightarrow$ trajectoire rectiligne



Q8) Soit : $L = mvr = n\hbar$

(1) $\Rightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e e^2}$

$\Rightarrow r = n^2 a_0$ où $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e \cdot e^2} = 52{,}9$ pm

Q9) (2) $\Rightarrow E_m = -\frac{m_e \cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 (n\hbar)^2}$

$\Rightarrow E_m = \frac{E_0}{n^2}$ où $E_0 = -\frac{m_e \cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -13{,}6$ eV

Q10) Soit $\begin{cases} \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \text{(On tient compte des 3 degrés de liberté de translation)} \\ E_i = -E_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \frac{2}{3} \frac{|E_0|}{k_B} \simeq 10^5 K}}$$

Q11) Soit $|E_m - E_0| = E_0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Pour $\begin{cases} n = 2 \text{ on a } |E_2 - E_1| = 10,2 eV \quad \text{cas ①} \\ n \to \infty \text{ on a } |E_m - E_1| = 13,6 eV \quad \text{cas ②} \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} \lambda_1 = hc \cdot \frac{1}{|E_2 - E_1|} = 1,22.10^{-7} m \\ \lambda_2 = hc \cdot \frac{1}{|E_m - E_1|} = 9,13.10^{-8} m \end{cases}$

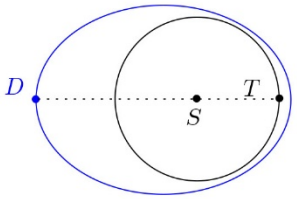
PARTIE B – Déviation d'un astéroïde (X – MPI – 2026)

Sujet X-ENS MPI 2026

Q01. Le mobile (planète, astéroïde) est soumis à la seule force gravitationnelle du Soleil qui est une **force centrale**. L'application du théorème du moment cinétique au mobile dans le référentiel héliocentrique assure que **le moment cinétique se conserve**.

Par définition du moment cinétique $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, le vecteur position est perpendiculaire au moment cinétique à tout instant. **Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et contenant le centre de force.**

Q02. La figure suivante représente la situation lorsque la Terre et Didymos sont en opposition par rapport au Soleil, la distance Terre-Didymos est alors maximale.



Il vient alors $DS_{\max} = r_{\max} = DT_{\max} - r_0 \approx DT_{\max} - r_{\min}$ donc $r_{\max} + r_{\min} \approx DT_{\max}$.

Sur la figure 1, on note $DT_{\max} \approx 3,2\,r_0$ et comme le demi-grand axe de Didymos est donné par $2a = r_{\min} + r_{\max}$, on en déduit $\boxed{a \approx 1,6\,r_0}$.

Q03. La Terre et Didymos étant en rotation autour du Soleil, on applique la troisième loi de Kepler dans sa version historique :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = T_0 \left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}}$$

A.N. : $T = 1 \times 1,6^{3/2} = \sqrt{1,6^3} \approx \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{T \approx 2 \text{ ans}}$

Q04. Partons d'une situation où la Terre et Didymos sont au plus proche autour de l'année 2003 sur la figure 1. Didymos est alors à son périgée, une année plus tard, la Terre est revenue au même point tandis que Didymos a effectué une demi-révolution et se trouve à son apogée, la distance est alors maximale. Cela apparaît cohérent avec la figure avec une distance maximale atteint autour de l'année 2004.

Q05. Dans le cas de l'interaction gravitationnelle avec un centre de force de masse M, on sait que pour un mouvement circulaire de rayon r la vitesse du mobile est donnée par $v^2 = GM/r$. Pour une orbite de rayon r_0 égal à celui de la Terre, la vitesse est nécessairement $\boxed{v_0 = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Q06. Avec $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ et $\Delta\vec{v} \,//\, \vec{r}$, **le moment cinétique n'est pas modifié.**

Q07. Avant l'impulsion l'énergie mécanique est donnée par $E_{m,i} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$. À la suite de l'impulsion, il vient :

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}m\left(v_0\vec{e}_\theta + v_1\vec{e}_r\right)^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} + \frac{m}{2}v_1^2 = E_{m,i} + \frac{m}{2}v_1^2$$

En conséquence $\boxed{\Delta E_m = \frac{m}{2}v_1^2}$.

Pour une trajectoire liée elliptique et une attraction gravitationnelle, on sait que l'énergie mécanique a pour expression $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ en conséquence :

$$-\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{2r_0} + \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} - \frac{v_1^2}{GM} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \times \frac{v_1^2}{GM/r_0} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\right)$$

Il vient $\boxed{a = \frac{r_0}{1 - (v_1/v_0)^2}}$. Le demi-grand axe ne varie pas à l'ordre 1 en $|v_1|/v_0$.

Q08. La conservation du moment cinétique permet de définir la constante des aires $C = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$. Il vient alors :

$$E_m = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{GMm}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

En conséquence (avec $v_0^2 = GM/r_0$) : $\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = mv_0^2\left[\frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{r_0}{r}\right]}$.

Q09. La trajectoire circulaire est associée au minimum de l'énergie potentielle effective :

$$E'_{p,\text{eff}}(r) = mv_0^2\left(-\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{r_0}{r^2}\right)$$

On note que $\boxed{E'_{p,\text{eff}}(r = r_0) = 0}$.

Q10. L'énergie mécanique étant conservée, sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} + mv_0^2\left[-\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{r_0}{r^2}\right] = 0$$

Avec $r(t) = r_0 + r_1(t)$, il vient à l'ordre 1 en r_1/r_0 :

$$0 = \ddot{r}_1(t) + \frac{v_0^2}{r_0}\left[-\frac{1}{\left(1 + r_1(t)/r_0\right)^3} + \frac{1}{\left(1 + r_1(t)/r_0\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 \approx \ddot{r}_1(t) + \frac{v_0^2}{r_0}\left[-\left(1 - 3\frac{r_1(t)}{r_0}\right) + \left(1 - 2\frac{r_1(t)}{r_0}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = \ddot{r}_1(t) + \left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 r_1(t)}$$

On obtient l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation $\boxed{\omega = \frac{v_0}{r_0}}$. **La période**

de cet oscillateur harmonique est donc égale à la période de révolution de la Terre autour du Soleil.

Q11. Avec $r_{\min} = 1,01\,r_0$, on a bien $\boxed{\dfrac{r_{\min} - r_0}{r_0} \ll 1}$. On se trouve bien dans le cadre de l'approximation $|r_1|/r_0 \ll 1$.

Q12. $r_1(t) = r_{10}\cos(\omega t + \varphi)$ avec r_{10} qui doit être choisi tel que l'aphélie de DART $r_0 + r_{10}$ soit égal au périhélie de Didymos $r_{\min} = 1,01\,r_0$, on en déduit donc $r_{10} = 0,01\,r_0$.

Très généralement, le complément d'énergie fourni à la sonde DART lui permet d'osciller dans le puits harmonique avec une énergie mécanique complémentaire d'expression : $E'_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}_1^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2 r_1^2$. À son aphélie, $\dot{r}_1 = 0$, le complément d'énergie est entièrement sous forme d'énergie potentielle en conséquence :

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r_{10}^2 = \frac{m}{2}v_1^2 \quad \Rightarrow \quad r_{10}^2 = \frac{v_1^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{10} = \frac{r_0\,|v_1|}{v_0}}$$

Avec $r_{10} = 0,01\,r_0$, on en déduit : $\boxed{|v_1| = 0,01\,v_0}$, c'est-à-dire $\boxed{v_1 = 0,3\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Q13. La trajectoire de DART est la combinaison du mouvement circulaire de rotation auquel on ajoute une oscillation radiale de même période (Cf. Q10). **La période de révolution de DART est donc celle de la Terre en accord avec le fait que le demi-grand axe n'est pas modifié au premier ordre en** $|v_1|/v_0$.

Q14. Comme $r_1(t)$ est une fonction sinusoïdale avec $r_1(t=0) = 0$, on a nécessairement $r_1(t) = r_{10}\sin(\omega t)$ ou $r_1(t) = -r_{10}\sin(\omega t)$.

En $t = 3T/4$, $\omega t = \dfrac{2\pi}{T}\times\dfrac{3T}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$. Afin d'obtenir un maximum pour cet instant, il faut retenir la solution $r_1(t) = -r_{10}\sin(\omega t)$

En particulier $\boxed{\dot{r}_1(t=0) = -\omega r_{10} < 0}$ ce qui nécessite une **impulsion initiale en direction du Soleil**.

Q15. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - B\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{GM}{r^2}\vec{e}_r + B\dot{\theta}\vec{e}_r$. Pour assurer $\vec{T} = \overrightarrow{\text{cste}}$, cela impose (avec $L = mr^2\dot{\theta}$ la norme du moment cinétique) :

$$B = \frac{GM}{r^2\dot{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{GMm}{L}}$$

Q16. Pour un mouvement circulaire, la vitesse est orthoradiale est $v_0^2 = \dfrac{GM}{r_0}$, en conséquence :

$$B = \frac{GMm}{mr_0v_0} = \frac{GM}{r_0}\times\frac{1}{v_0} = \frac{v_0^2}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = v_0}$$

$$\vec{T} = v_0\vec{e}_\theta - v_0\vec{e}_\theta \ \Rightarrow\ \boxed{\vec{T} = \vec{0}}$$

Q17. Le vecteur $\vec{T}$ étant une constante du mouvement, plaçons nous au périhélie pour le déterminer.

En ce point P, le vecteur vitesse et le vecteur unitaire orthoradial sont perpendiculaires à l'axe principal de l'ellipse, donc $\vec{T}$ **est dans le plan de la trajectoire et perpendiculaire à l'axe principal de l'ellipse.**

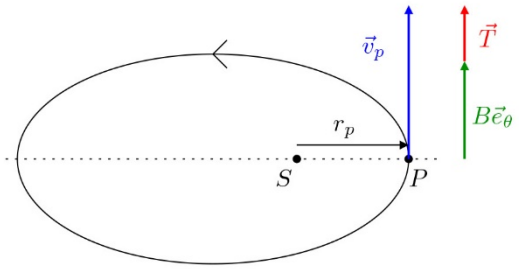
D'une part : $B = \dfrac{GMm}{L} = \dfrac{GMm}{mr_pv_p} = \dfrac{GM}{r_pv_p}$.

En exprimant l'énergie mécanique au périhélie, il vient :

$$\frac{m}{2}v_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{r_a + r_p} \quad \Rightarrow \quad v_p^2 = \frac{2GM}{r_p}\left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p}\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_p = 2\frac{GM}{r_pv_p}\left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p}\right] \quad \Rightarrow \quad v_p = 2\left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p}\right]B$$

Comme $r_a \geqslant r_p$, le terme entre crochets est toujours inférieur à $1/2$, donc $\boxed{v_p \geqslant B}$, le cas d'égalité étant obtenu pour la trajectoire circulaire comme on l'a montré à la question Q16. On en déduit ainsi le sens du vecteur $\vec{T}$ et le schéma demandé :



Q18. On sait que $B = \dfrac{GMm}{L}$. Par ailleurs, le moment cinétique est conservé lors de la manœuvre modifiant la trajectoire de DART, le moment cinétique est donc celui de la trajectoire circulaire, en conséquence $\boxed{B = v_0}$ (Cf. Q16).

Avec un complément de vitesse par rapport au mouvement circulaire $\Delta\vec{v} = -|v_1|\vec{e}_r$, il vient :

$$\vec{T} = v_0\vec{e}_\theta - |v_1|\vec{e}_r - v_0\vec{e}_\theta \ \Rightarrow\ \boxed{\|\vec{T}\| = |v_1|}$$

Q19. À l'aphélie et au périhélie, le vecteur vitesse est purement orthoradial et les trois vecteurs $\vec{v}$, $\vec{T}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires. D'après la figure ci-dessus, il vient :

$$\boxed{v_p = v_0 + |v_1|} \quad \text{et} \quad \boxed{v_a = v_0 - |v_1|}$$

Q20. En exploitant la **constante des aires**, il vient $\boxed{r_p(v_0+|v_1|)=r_a(v_0-|v_1|)}$.

Avec $r_p+r_a=2a$, il vient :

$$2a=r_a\left(1+\frac{v_0-|v_1|}{v_0+|v_1|}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_a=a\left(1+\frac{|v_1|}{v_0}\right)}$$

En exploitant le résultat obtenu à la question Q07, on en déduit finalement :

$$\boxed{r_a=\frac{r_0}{1-(v_1/v_0)^2}\left(1+\frac{|v_1|}{v_0}\right)}$$

Q21. Au premier ordre en $|v_1|/v_0$, il vient :

$$r_a=r_0\left(1+\frac{|v_1|}{v_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{10}=r_0\frac{|v_1|}{v_0}}$$

On retrouve le résultat de la question Q12.