Physique : DS1 – Savoir Faire

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Les schémas (donnés ou non) devront être (re)tracés sur vos copies avec soin. Les schémas auront des points attitrés pour chaque question. Il faut savoir être **rapide, précis et propre**.

a) Dans le cas d'un mouvement à forces centrales, démontrez l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite circulaire, puis elliptique. (6 pts)

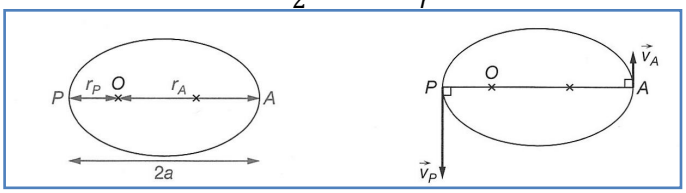
- Mouvement circulaire

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2}m\frac{Gm'}{r} - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2}\frac{|k|}{r} - \frac{|k|}{r} = -\frac{|k|}{2r}$

- Mouvement elliptique

Pour un point matériel en orbite elliptique autour d'une masse m' immobile en O, l'énergie mécanique Em, est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm'}{r}$$



En l'évaluant aux points d'approche et d'éloignement maximaux notés précédemment A et P, la vitesse se réécrit en ces points :

$$v = r\dot{\theta} = \frac{C}{r} \text{ aux points A et P (vitesse orthoradiale)}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} - \frac{Gmm'}{r} \text{ aux points A et P} \Rightarrow r^2 - \frac{1}{2}\frac{mC^2}{E_m} + \frac{Gmm'}{E_m}r = 0$$

Il est clair par construction que cette équation possède exactement deux racines positives, r_A et r_p tel que:

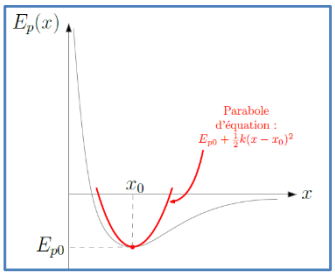
$$r = -\frac{1}{2}\frac{Gmm'}{E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow r_A + r_p = 2a = -\frac{Gmm'}{E_m}$$

D'où : $E_m = -\frac{|k|}{2a}$

b) Soit un point M matériel de masse m se déplaçant sur la droite (Ox) et soumis à l' énergie potentielle $E_p(x)$. Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par (3 pts)

On développe l'énergie potentielle à l'ordre 2 autour de la position d'équilibre x_0 :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} + o(x - x_0)$$



Par définition de la position d'équilibre : $\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$, on pose $k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0}$

$$\Rightarrow E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

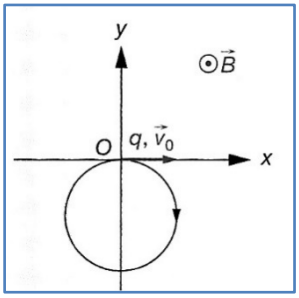
Ainsi on approxime autour de la position d'équilibre la courbe par un puits parabolique, qui correspond à celui d'un oscillateur harmonique de position d'équilibre x_0. Il est donc normal de retrouver l'équation différentielle d'un OH.

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\overrightarrow{u_x} = -k(x - x_0)\overrightarrow{u_x} \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

On pose $X = x - x_0$ et on obtient : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

c) Montrez que la trajectoire d'une charge q dans un champ magnétostatique uniforme est un cercle si $\overrightarrow{v_0}$ est dans un plan orthogonal à $\vec{B}$. Une droite si $\overrightarrow{v_0}$ colinéaire à $\vec{B}$, une hélice dans un cas plus général. (6 pts)

- Mouvement circulaire



Une particule de charge q et masse m placée dans un champ magnétique uniforme et statique $\vec{B} = B_o\overrightarrow{u_z}$. La particule est située initialement au point O et sa vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ est perpendiculaire au champ magnétique.

Le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P_e = 0$ montre que la norme de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient : $m\begin{vmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}=\\ \ddot{z}\end{vmatrix} q\begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\ 0\\ B_0\end{vmatrix} = q\begin{vmatrix}B_0\dot{y}\\ -B_0\dot{x}\\ 0\end{vmatrix}$

Or $\ddot{z} = 0 \Rightarrow z = v_{0z}t + z_0 = 0 \Rightarrow$ la trajectoire est plane si $v_{oz} = 0$

L'intégration des projections sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ donne : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + C_1 \quad (1) \\ m\dot{y} = -qB_0x + C_2 \end{cases}$

Les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ *et* $\dot{y}(0) = 0$ donnent : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + mv_0 \\ m\dot{y} = -qB_0x \end{cases}$

Donc (1) peut s'écrire : $\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{y} = -\frac{q^2B_0^2}{m^2}x \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\dot{x} = -\frac{q^2{B_0}^2}{m^2}y - \frac{qB_0}{m}v_0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases}$ *où* $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ *pulsation cyclotron si on suppose* $q > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) \\ y = A'\cos(\omega_c t) + B'\sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases} \text{ avec comme conditions initiales } \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_c} \\ y(0) = 0 \Rightarrow A' = \frac{v_0}{\omega_c} \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow B' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

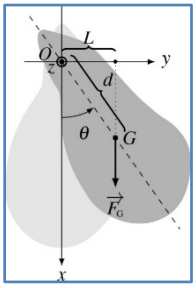
Si on pose $R = \frac{v_0}{\omega_c}$ on obtient :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{(y+R)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+R)^2 = R^2$$

On retrouve bien l'équation d'un cercle de centre $(0, -R)$ et de rayon R si q>0.

- Mouvement rectiligne
  Si $\overrightarrow{v_0}$ colinéaire à $\vec{B}$, il n'y a pas de force initiale et donc pas de modification de $\overrightarrow{v_0}$ ...donc le mouvement sera rectiligne
- Mouvement hélicoïdal
  - Si $\overrightarrow{v_0}$ est quelconque il va se rajouter une composante sur z : $z = v_{0z}t + z_0$ ainsi le mouvement en plus d'être circulaire va monter, ce qui va former une trajectoire hélicoïdale de pas $h = v_{0z}T = v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega_c}$
  - Les équations en x(t) et y(t) reste les mêmes à condition de remplacer v_0 par v_{0x}.

d) Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule pesant. (3 pts)



Le solide est soumis à :

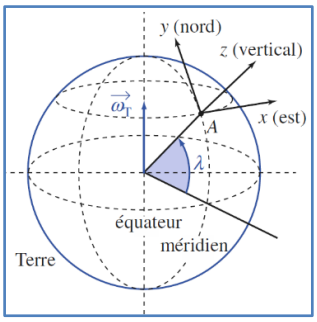
- L'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- Son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G tel que :

$$M_z = -mgdsin\theta$$

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z\ddot{\theta} = M_z = -mgdsin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgdsin\theta}{J_z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z}$$



e) Montrer que les mouvements horizontaux dans le référentiel terrestre sont déviés vers la droite dans l'hémisphère Nord. (6 pts)

Dans les mouvements horizontaux, seule la force de Coriolis peut être responsable d'une déviation.

$$\vec{f_c} = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} cos\lambda\,\dot{z} - \dot{y}\sin\lambda \\ \dot{x}\sin\lambda \\ -\dot{x}\cos\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{f_c}(plan\ horizontal) = 2m\Omega \begin{pmatrix} \dot{y}\sin\lambda \\ -\dot{x}\sin\lambda \\ \dot{x}\cos\lambda \end{pmatrix}$$

- Si l'on suit un méridien dans l'hémisphère Nord, en se dirigeant vers le pôle Nord, on vérifie que $\vec{f_c} = 2m\Omega\,\dot{y}\sin\lambda\ \vec{u_x}$ est une force dirigée vers la droite car $\dot{y} > 0\ et\ \sin\lambda > 0$. (On peut aussi le vérifier avec la règle des trois doigts).
- Si l'on suit un méridien dans l'hémisphère Sud, en se dirigeant vers le pôle Nord, on vérifie que $\vec{f_c} = 2m\Omega\,\dot{y}\sin\lambda\ \vec{u_x}$ est une force dirigée vers la gauche car $\dot{y} > 0\ et\ \sin\lambda < 0$. On retrouvera de même pour les autres situations.
- Si l'on suit un parallèle dans l'hémisphère Nord, en se dirigeant vers l'est, on vérifie : $f_{c,y} = -2m\Omega\,\dot{x}\sin\lambda\ et\ f_{c,z} = +2m\Omega\,\dot{x}\cos\lambda$. Ainsi dans le plan horizontal $f_{c,y} = -2m\Omega\,\dot{x}\sin\lambda < 0$ est une force dirigée vers la droite…On retrouvera de même pour les autres situations.

f) Démontrer que dans l'hémisphère nord, lors de la chute « verticale » d'un objet d'une hauteur h, l'impact sur le sol est décalé vers l'est de $x_f = f(\lambda, h, g, \Omega)$ où Ω est la vitesse angulaire de rotation terrestre. (6 pts)

Envisageons une chute libre dans le référentiel terrestre sans tenir compte de la perturbation liée à la force de Coriolis avec pour CI : $z(0) = h\ et\ \dot{z}(0) = 0$

$$\Rightarrow \ddot{z} = -g \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On envisage maintenant la perturbation ainsi :

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} cos\lambda\dot{z} - \dot{y}\sin\lambda \\ \dot{x}\sin\lambda \\ -\dot{x}\cos\lambda \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega(cos\lambda\dot{z} - \dot{y}\sin\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega\,\dot{x}\sin\lambda \\ \ddot{z} = 2\Omega\,\dot{x}\cos\lambda - g \end{cases}$$

On applique la méthode des perturbations c'est-à-dire on injecte les solutions obtenues sans perturbation (dites à l'ordre zéro) pour calculer la force de Coriolis (à l'ordre 1) ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega \times cos\lambda \times (-gt) \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 - g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}gt^3 \times \Omega\,cos\lambda \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}gt^3\Omega\,cos\lambda \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

D'où : $x_f = \frac{1}{3}gt_F^3\Omega\,cos\lambda = \frac{1}{3}g\Omega\,cos\,\lambda\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} > 0$

On obtient ainsi une déviation vers l'est.