

Physique : DM1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Les **schémas (donnés ou non) devront être (re)tracés sur vos copies avec soin**. Les schémas auront des points attirés pour chaque question. Il faut savoir être **rapide, précis et propre**. (Quelques données numériques sont données à la fin du sujet)

Sujet 1 – Energie thermique des mers (Centrale PC 2024)

À propos de l'environnement marin

Le problème comporte deux parties indépendantes. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

Partie A – L'énergie thermique des mers

En 1869, dans son livre, *Vingt mille lieues sous les mers*, Jules Verne fait référence aux « eaux de surface et les eaux profondes des océans pour produire de l'électricité ». Cette idée d'utiliser la différence de température entre les eaux de surface et les eaux profondes afin de produire de l'électricité est appelée ETM (énergie thermique des mers) en français et OTEC (*Ocean Thermal Energy Conversion*) en anglais.

L'IFREMER considère que le coût du pompage des eaux profondes n'est rentable que pour une différence de température d'au moins $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ entre l'eau de mer chaude prélevée à la surface et l'eau de mer froide prélevée en profondeur.

I Généralités

Q 1. Représenter le diagramme synoptique d'une machine ditherme produisant du travail en précisant les signes des différents échanges énergétiques.

Q 2. Exprimer et calculer le rendement de Carnot de cette machine fonctionnant entre des sources de températures $T_c = 26\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $T_f = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Commenter le résultat.

On envisage l'installation d'une centrale ETM à La Réunion. Le profil de température de l'eau de l'océan autour de cette île est donné sur la figure 1.

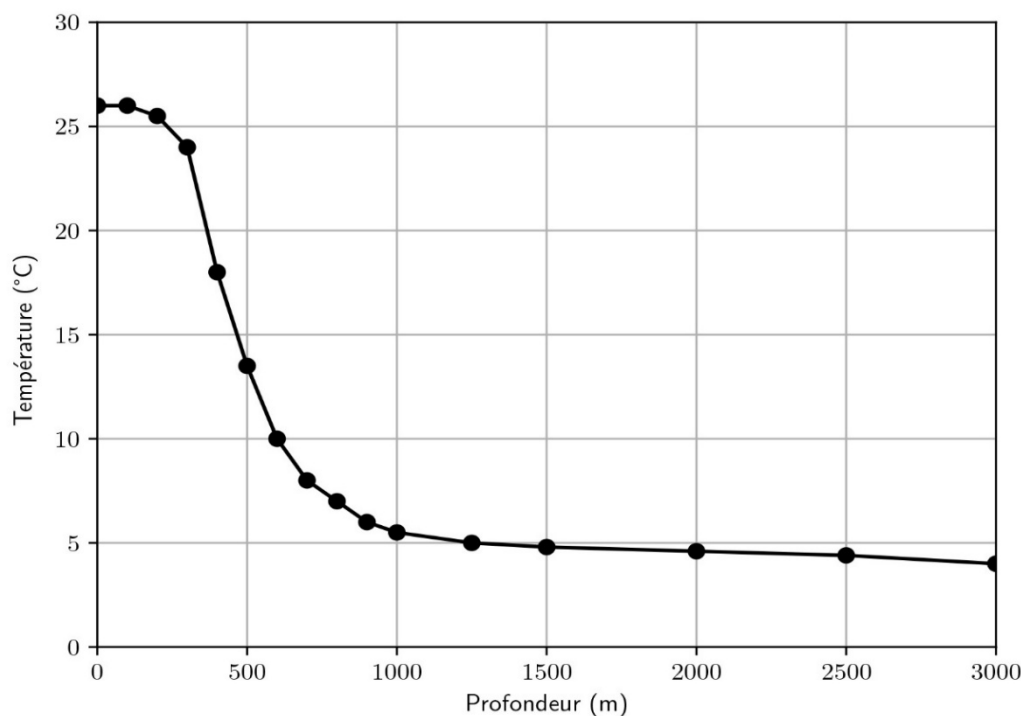


Figure 1 Température de l'eau de l'océan en fonction de la profondeur à La Réunion.

Q 3. Déterminer la profondeur à laquelle on devra prélever l'eau profonde pour qu'une installation à La Réunion soit rentable.

- Q 4. Estimer la pression P à cette profondeur en explicitant la démarche suivie et toute hypothèse effectuée.
- Q 5. Indiquer quelques avantages et quelques inconvénients d'une installation ETM.

II Centrale ETM en cycle fermé

Un prototype de centrale ETM est installé à La Réunion. Il n'est pas raccordé à l'océan et une pompe à chaleur simule les sources d'eau chaude et d'eau froide. L'ammoniac est le fluide de travail et son évolution est représentée sur la partie centrale de la figure 2. Le cycle réel de l'ammoniac est également représenté figure 3(a), ainsi qu'un cycle virtuel figure 3(b) expliqué ensuite.

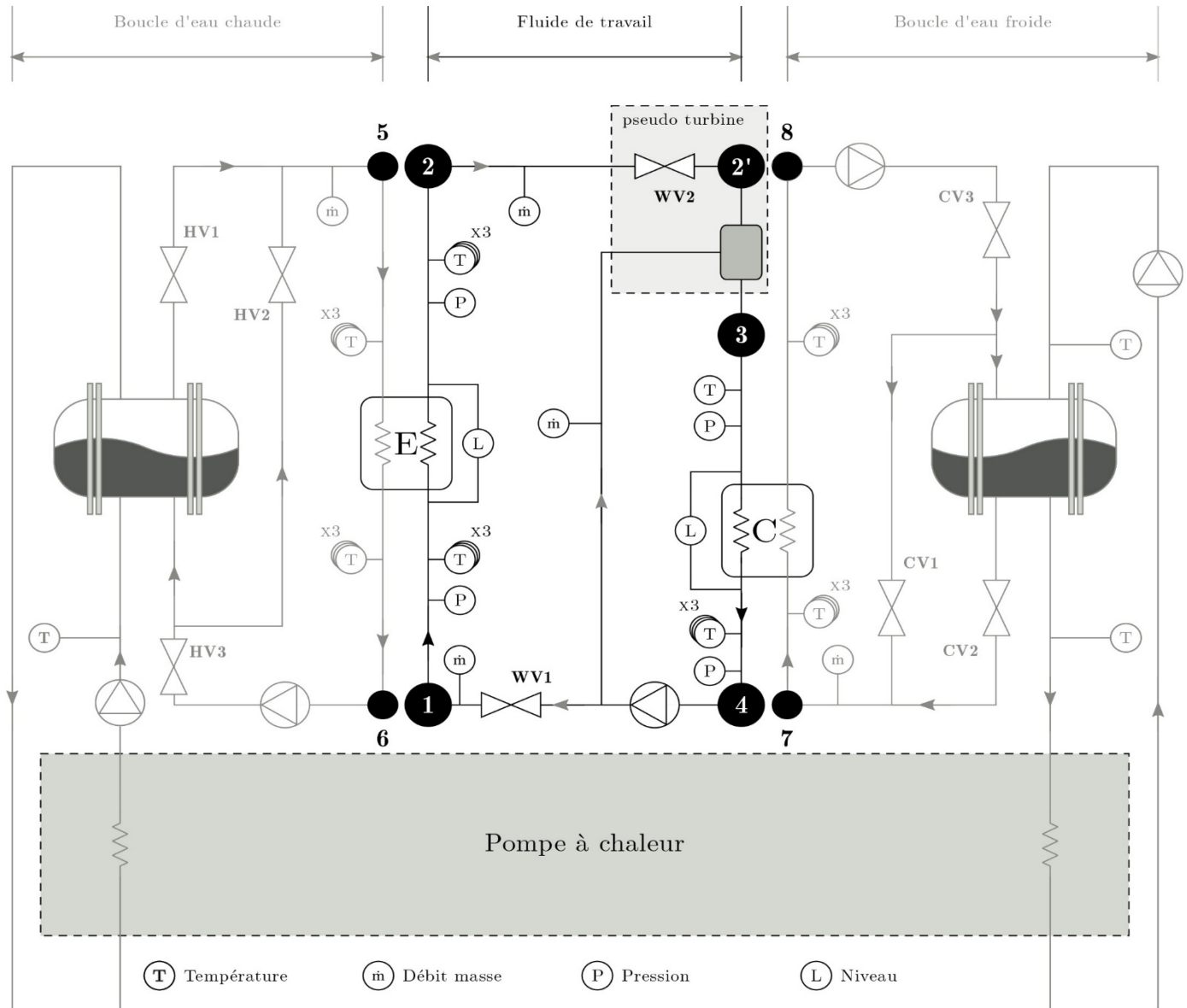


Figure 2 Schéma global du prototype ETM. Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

- L'ammoniac passe dans un évaporateur E adiabatique et isobare à double flux sous la pression de 9 bar où l'eau chaude le fait s'évaporer en vapeur juste saturante (point 1 à point 2).
- La vapeur produite est détendue de manière isenthalpique dans la vanne WV2 jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 à point 2'). Une petite quantité de liquide froid, prélevée avant la vanne WV1, est injectée dans la vapeur chaude de façon à diminuer sa température (désurchauffe isobare) (point 2' à point 3). Ces transformations (détente et désurchauffe) sont contrôlées de telle sorte qu'elles donnent les mêmes propriétés au fluide que s'il avait été soumis à une détente isentropique dans une turbine jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 au point 3 figure 3(b)).
- Le fluide de travail est ensuite condensé en liquide juste saturant par un condenseur C adiabatique et isobare à double flux grâce à l'eau froide (point 3 à point 4) puis ramené vers l'évaporateur avec une pompe à la pression de 9 bar (point 4 à point 1) en fonctionnement isentropique (la pompe est notée P_1 sur la figure 3).

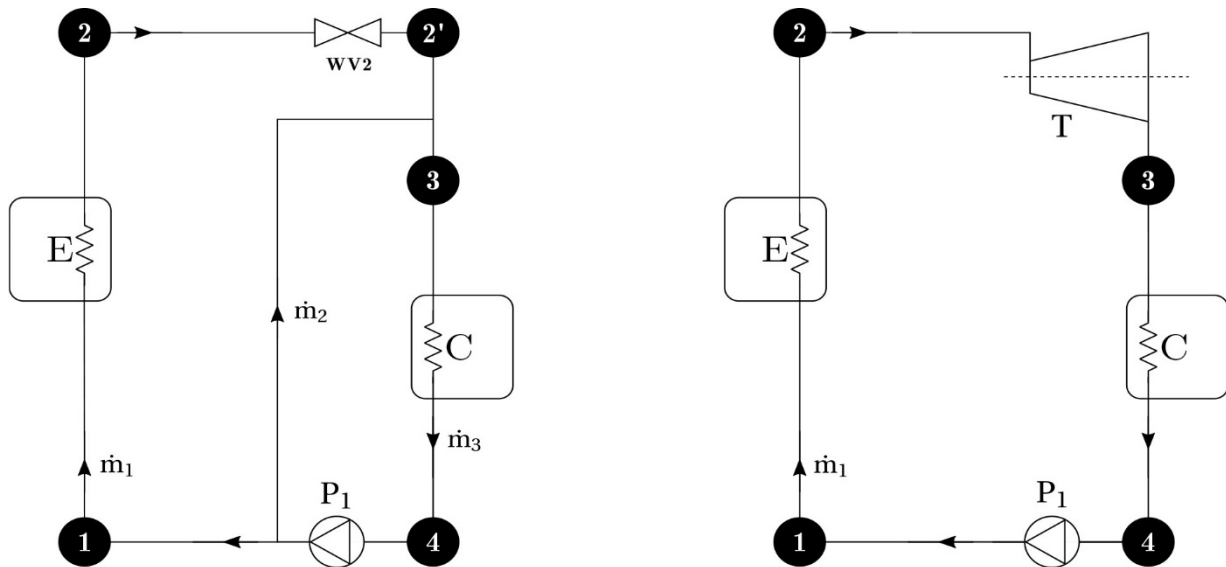


Figure 3 Cycle réel (a) à gauche et cycle virtuel (b) à droite de l'ammoniac.
Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

La centrale fonctionne en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique. Les liquides sont considérés comme incompressibles. Eau chaude et eau froide ont même débit massique. Les transformations isentropiques sont supposées adiabatiques et réversibles.

Données	Débit massique	Température d'entrée (en °C)	Température de sortie (en °C)
Eau chaude	$\dot{m}_e$	$T_5 = 26$	$T_6 = 24,5$
Eau froide	$\dot{m}_e$	$T_7 = 5$	T_8

Tableau 1 Données et notations relatives aux circuits d'eau.

On note x la fraction massique en vapeur de l'ammoniac. On donne le tableau suivant :

Point i	T_i (°C)	P_i (bar)	x_i	h_i (kJ·kg ⁻¹)	s_i (kJ·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)
1	12	9		240	1,15
2'		6			

Tableau 2 Quelques paramètres pour deux points du cycle.

Les diagrammes d'état de l'ammoniac, nommé R717 en tant que fluide frigorigène, sont fournis dans les documents réponses 1 et 2, respectivement dans les systèmes de coordonnées (P, h) et (T, s) .

Q 6. Sur les diagrammes (P, h) et (T, s) des documents réponses 1 et 2, mentionner les noms des courbes de saturation, puis indiquer la phase stable associée à chaque domaine. Faire apparaître le point critique que l'on définira et donner sa température et sa pression.

On utilise désormais les diagrammes des documents réponses 3 et 4 qui présentent des agrandissements de parties des diagrammes des documents réponses 1 et 2 sans les courbes isochores pour plus de lisibilité :

- le document réponse 3 contient le diagramme (P, h) sur lequel figurent en tirets et points alternés les isothermes graduées en degrés Celsius et en tirets les isentropes graduées en kJ·K⁻¹·kg⁻¹ ;
- le document réponse 4 contient le diagramme (T, s) sur lequel figurent en tirets et points alternés les isobares graduées en bars et en tirets les isenthalpes graduées en kJ·kg⁻¹.

Q 7. Déterminer $T_{\text{vap,HP}}$ et $T_{\text{vap,BP}}$, les températures de vaporisation aux pressions respectives de 9 bar et 6 bar.

Q 8. Déterminer les valeurs numériques des enthalpies massiques de vaporisation $\Delta h_{\text{vap,HP}} = \Delta h_{\text{vap}}(9 \text{ bar})$ et $\Delta h_{\text{vap,BP}} = \Delta h_{\text{vap}}(6 \text{ bar})$.

Q 9. La compression isentrope entre les points 4 et 1 est représentée sur le diagramme (P, h) du document réponse 3. Justifier sa forme.

Q 10. La détente isenthalpe entre les points 2 et 2' est représentée sur le diagramme (T, s) du document réponse 4. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température T_2 , l'enthalpie massique h_2 et l'entropie massique s_2 . Préciser sous quelle(s) phase(s) se trouve l'ammoniac au point 2'.

- Q 11.** La détente isentrope entre les points 2 et 3 est représentée sur le diagramme (P, h) du document réponse 3. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température T_3 , l'enthalpie massique h_3 et l'entropie massique s_3 .
- Q 12.** Représenter sur les diagrammes (P, h) et (T, s) des documents réponses 3 et 4 le cycle effectué par l'ammoniac dans le dispositif ETM. On fera apparaître en particulier les points 1, 2, 2', 3, 4 et 1' (liquide juste saturant à 9 bar).
- Q 13.** Compléter le tableau du document réponse 5.
- Q 14.** En déduire la valeur de c_a , capacité thermique massique de l'ammoniac liquide.
- Q 15.** Expliquer pourquoi on utilise l'ammoniac comme fluide de travail et non de l'eau. Donner néanmoins un inconvénient de l'utilisation de l'ammoniac.
- Q 16.** Établir l'expression suivante du premier principe industriel dans le cas d'un système ouvert à une entrée et une sortie, en écoulement permanent avec un débit massique D_m , en explicitant bien toutes les hypothèses :

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où h_s désigne l'enthalpie massique de sortie, h_e l'enthalpie massique d'entrée, $\mathcal{P}_u$ la puissance utile reçue par le système due aux pièces mobiles et $\mathcal{P}_{th}$ la puissance thermique reçue par le système.

En raison de la taille réduite du prototype, une véritable turbine capable de produire la puissance nécessaire n'était pas disponible. Néanmoins, en considérant le cycle virtuel représenté sur la figure 3(b), où la détente isentropique du point 2 au point 3 est attribuée à une turbine virtuelle, on peut calculer le rendement du cycle.

- Q 17.** Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{th,E,R}$ et $\mathcal{P}_{th,E,V}$, les puissances thermiques reçues par l'ammoniac au niveau de l'évaporateur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.
- Q 18.** Exprimer, en fonction des températures, $\mathcal{P}_{th,ec}$, la puissance reçue par l'eau chaude au niveau de l'évaporateur (cf. figure 2).
- Q 19.** En déduire l'expression et la valeur numérique de $\dot{m}_e$.
- Q 20.** Justifier que l'évolution de l'ammoniac traversant la vanne WV2 est isenthalpique.
- Q 21.** Au niveau du surchauffeur, situé entre les points 2' et 3, donner une relation entre $\dot{m}_1$, $\dot{m}_2$ et $\dot{m}_3$. Calculer $\dot{m}_3$.
- Q 22.** Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{C,R}$ et $\mathcal{P}_{C,V}$, puissances reçues par l'ammoniac au niveau du condenseur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.
- Q 23.** Exprimer dans le cas réel $\mathcal{P}_{ef}$, la puissance reçue par l'eau froide au niveau du condenseur, puis en déduire la valeur de T_8 .
- Q 24.** Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{T,V}$, puissance utile reçue par l'ammoniac dans la turbine T entre les points 2 et 3 du cycle virtuel. Commenter son signe.
- Q 25.** Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{P_1,R}$ et $\mathcal{P}_{P_1,V}$, puissances utiles reçues par l'ammoniac au niveau de la pompe P_1 lors des cycles respectivement réel et virtuel.
- Q 26.** Déduire de l'étude précédente le rendement η_V du cycle virtuel.
- Q 27.** Le rendement obtenu est surestimé. Proposer des justifications.

Données et formulaire

Données numériques partie A

Pression atmosphérique	$P^0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau de mer	$\rho_1 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_e = 4,0 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Débits massiques de l'ammoniac	$\dot{m}_1 = 4,0 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\dot{m}_2 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$

Données numériques partie B

Masse volumique de l'air $\rho_2 = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Formulaire

— Pour φ un champ scalaire, $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = \Delta\varphi$.

— Pour $\vec{v}$ un champ vectoriel, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$.

— Dérivée particulière d'une grandeur intensive scalaire $f(x, y, z, t)$:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

où (v_x, v_y, v_z) sont les coordonnées du champ des vitesses eulérien.

— Dérivée particulière d'une grandeur intensive vectorielle $\vec{f}(x, y, z, t)$:

$$\frac{D\vec{f}}{Dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} \right),$$

où (v_x, v_y, v_z) sont les coordonnées du champ des vitesses eulérien.

• • • FIN • • •

Sujet 2 : – Tunnel du Fréjus (Mines-Ponts PC – 2016)

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple $\vec{j}$ pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple $\hat{e}_z$ tel que $\|\hat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

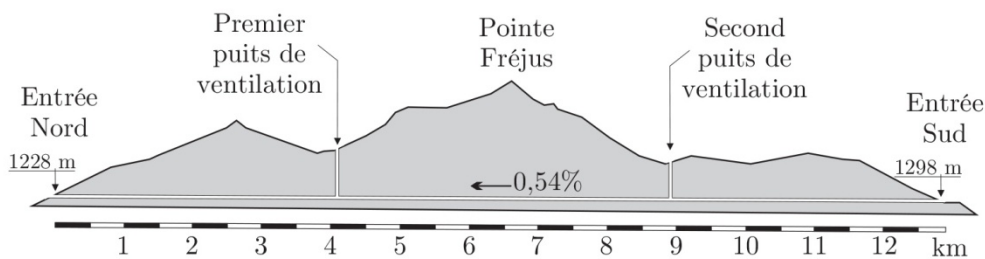


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

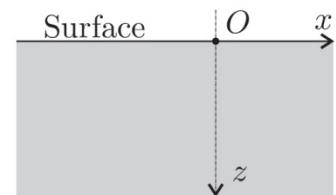


FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z=0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ \text{C}$. (Voir figure 2).

❑ 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.

❑ 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

❑ 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .

❑ 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface S . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et $\mathcal{S}$ puis en fonction de ρ_s , c_s , $\mathcal{S}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $T(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - kz)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de k qu'on mettra sous la forme $k = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❑ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ SI}$.

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

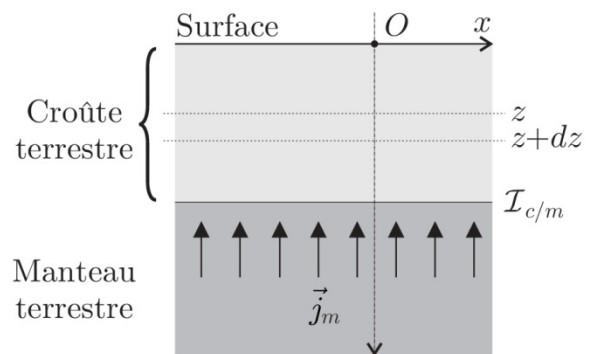


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, en régime stationnaire, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface $\mathcal{S}$, comprise entre z et $z + dz$.

❑ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H , L_c , $\mathcal{P}$, j_m , κ et $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10,0$ km.

▣ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \rightarrow +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

▣ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

▣ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x, z = h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x, z = 0)$ en fonction de h , $T(x, z = h)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$.

Déterminer $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_S . En déduire que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1 , c_2 , c_3 et δ en fonction des données du problème.