Physique : DS9

Partie I - Le tore (Mines PSI 2014)

(6) ε_0 : permittivité du vide t.q $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\mathrm{Fm^{-1}}$

(7) Soit : $\mathrm{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

or $\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \text{et } \vec{j} = \gamma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{j} = \rho\gamma/\varepsilon_0$

Donc $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho/\tau = 0$ ou $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma} = 10^{-19}\,s$

$\Rightarrow \rho = \rho(0)\, e^{-t/\tau}$ avec $\tau = 10^{-19}\,s$

$\Rightarrow \boxed{\rho \to 0 \text{ au bout de qqs } \tau}$

(8) Dans le cadre de l'ARQS magnétique $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$.

$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

En effet en ordre de grandeur $\begin{cases} \dfrac{B}{a} = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \dfrac{E}{T} \right) & (\alpha) \\ \text{et} \\ E/a = B/T \quad \left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) & (\beta) \end{cases}$

or $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \gamma \gg \dfrac{\varepsilon_0}{T} \Leftrightarrow \boxed{T \gg \tau}$

(9) En régime permanent : $\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \to 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \end{cases}$

D'où $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V \Rightarrow \boxed{\Delta V = 0}$

(10) Soit $\begin{cases} \dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 0 \\ V(0) = U \\ V(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow V = A\theta + B \Rightarrow V = U + \dfrac{\theta(-U)}{\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{V = U\,\frac{\alpha - \theta}{\alpha}}$$

Donc $\vec{E} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{U}{\alpha r}\vec{u}_\theta \\ \text{et} \\ \vec{j} = \dfrac{\gamma U}{\alpha r}\vec{u}_\theta \end{cases}}$

(11) Soit $I = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS}$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\gamma U}{\alpha}\int_a^b \frac{dr}{r}\int_0^c dz \Leftrightarrow \boxed{\frac{\gamma c}{\alpha} U \ln\frac{b}{a} = I}$$

$$\text{et } \boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{\alpha}{\gamma c}\,\frac{1}{\ln(b/a)}}$$

(12) On a : $\boxed{R = \dfrac{L}{\gamma S}}$ or $\ln\dfrac{b}{a} = \ln\left(1 + \dfrac{b-a}{a}\right) \sim \dfrac{b-a}{a}$

$$\text{d'où } R = \frac{\alpha}{\gamma c}\cdot\frac{a}{b-a}$$

$$\text{or } S = c(b-a) \Rightarrow R = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{a}{S}$$

$$\text{et } L = \alpha a \Rightarrow \boxed{R \sim L/\gamma S} \text{ CQFD}$$

III) Etude d'une pince ampèremétique

(13) Dans le cas de l'ARQS magnétique on néglige les phénomènes de propagation t.q : $\tau \ll T$ où $\tau = \frac{a}{c}$ avec a : taille caractéristique du système

or (α) et (β) donnent
$$\frac{B}{a} = \mu_0\left(j + \varepsilon_0 \frac{Ba}{T^2}\right)$$
$$= \mu_0 j + \frac{Ba}{c^2T^2}$$
$$= \mu_0 j + Ba.\left(\frac{\tau}{T}\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{B}{a} = \mu_0 j \text{ si } \tau \ll T$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ si } \tau \ll T}$$

(14) ∗ On a invariance par révolution autour de Oz : $\Rightarrow B(r,z)$

∗ le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est plan de symétrie d'où $\vec{B} = B(r,z)\vec{u_\theta}$

Donc $\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 (i + Ni_1)$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}(i + Ni_1)\vec{u_\theta}}$$

(15) Pour une spire : $\phi = \iint_S \vec{B}.\vec{dS} = \frac{\mu_0}{2\pi}(i + Ni_1)\ln\left(\frac{b'}{a}\right).c$

d'où pour le tore : $\phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi}(i + Ni_1)\,c\ln(b'/a)$

or $\phi = Li_1 + Mi$ d'où
$$\boxed{\begin{cases} L = NM = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} c \ln(b'/a) \\ M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} c\ln(b'/a) \end{cases} \text{ où } b' = a + b}$$

Partie II – Effet Hall (E3A – 2010 – PSI)

IV) Etude de l'effet Hall (E3A - PSI - 2010)

A.1) Soit $\boxed{\vec{j} = -N_m e \vec{v}}$ et $\vec{v} = -|v|\vec{u_y}$

A.2) On a $\vec{F}_{mag} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{F_L}' = N_m dV [-e\vec{v} \wedge \vec{B}]$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F_L}' = \vec{j} dV \wedge \vec{B}}$ où dV = volume de la plaquette.

or $\vec{j}.\vec{S} = I_0 \Leftrightarrow j . hl = I_0$

$\Rightarrow \vec{F_L}' = I_0 \, dy \, \vec{u_y} \wedge \vec{B}$

Après intégration : $\boxed{\vec{F_L} = I_0 L B \vec{u_x}}$

A.3) La force de Laplace provoque une séparation qui crée un champ de Hall tel que : $\vec{F_L} + \vec{F_H} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -e(\vec{v} \wedge \vec{B}) - e\vec{E_H} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E_H} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

$\Leftrightarrow \vec{E_H} = +\dfrac{\vec{j}}{N_m e} \wedge \vec{B}$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{E_H} = k_E (\vec{j} \wedge \vec{B}) \text{ où } k_E = +\dfrac{1}{N_m e}}$

A.4) D'où : $V_H = V(P_1) - V(P_2)$

$= \int_{P_2}^{P_1} dV = \int_{P_2}^{P_1} -\vec{E}.\vec{dl} = -E_H l = -k_E j B l.$

$\Leftrightarrow V_H = -\dfrac{jBl}{N_m . e} = -\dfrac{I_0/hl . Bl}{N_m . e}$

$\Leftrightarrow V_H = \dfrac{R_H}{h} I_0 B$ avec $\boxed{R_H = -\dfrac{1}{eN_m} = -k_E}$

A.5) A.N : $\begin{cases} R_H = \underline{\underline{-3{,}7 . 10^{-4} C^{-1} m^3}} \\ B = \dfrac{V_H}{R_H} \dfrac{h}{I_0} = \underline{\underline{1{,}0 \text{ T}}} \end{cases}$

A.6 On définit : $\boxed{S_B = \dfrac{V_H}{B} = \dfrac{R_H I_0}{h}} = \underline{0{,}12\ VT^{-1}}$

A.7 On a $V_H = R_H \dfrac{I_0 B}{h} \Rightarrow \dfrac{\Delta V_H}{V_H} = \dfrac{\Delta R_H}{R_H}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_H}{V_H} = \frac{R_H(t+\Delta t) - R_H(t)}{R_H(t)} = e^{-a\Delta t} - 1$$

$$\underset{D.L}{\simeq} -a\Delta t.$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\Delta V_H}{V_H} = -0{,}14}$$

A.8 On a $\begin{cases} F_L = I_0 L B \\ V_H = -\dfrac{1}{N_n e} \dfrac{I_0 B}{h} \end{cases} \Rightarrow V_H = \dfrac{-F_L}{N_n e h L} \Rightarrow \boxed{\xi = -\dfrac{1}{N_n e L h}}$

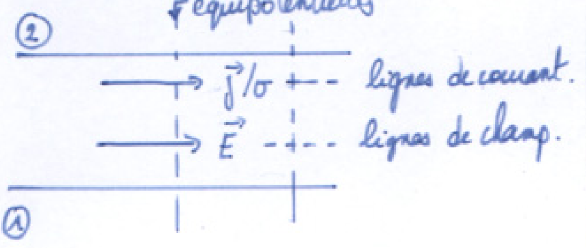
A.9 Soit $\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E_H}$ avec $\vec{j} = \sigma \vec{E_0}$

$$\Leftrightarrow \vec{j} = \sigma(\vec{E} - \vec{E_H})$$

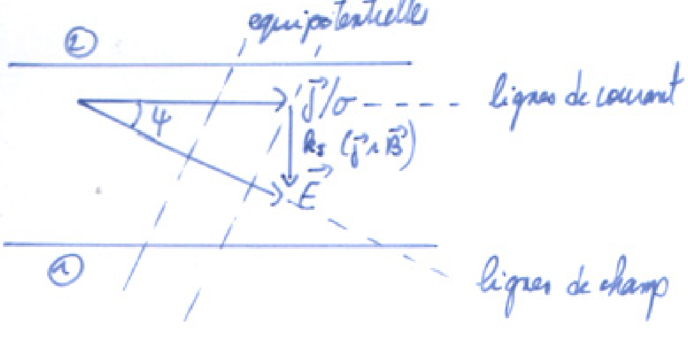
$$\Leftrightarrow \vec{j} = \sigma(\vec{E} - k_E \vec{j} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \boxed{k_E = k_J}$$

Donc $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\sigma} + k_E \vec{j} \wedge \vec{B}}$

A.10 Si : $\vec{B} = \vec{0}$



Si : $\vec{B} \neq \vec{0}$



A.11) D'après le schema : $\tan\Psi = \dfrac{k_J j B}{j/\sigma}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tan\Psi = \sigma k_J B}$$

or $k_J = -R_H$ d'où :

$$\Psi = \text{Arctan}(-R_H \sigma B) \simeq \underline{82°}$$

A.12) • Si $\begin{cases} y_1 = y_2 : V_H = V(P_1) - V(P_2) \\ y_1 \neq y_2 : V(P_1) - V(P_2) = V_H + \Delta V \end{cases}$ t.q : $\Delta V = E_0 \delta$.

or $\dfrac{\Delta V}{V_H} < 0{,}01$

$$\Leftrightarrow \frac{j\delta/\sigma}{R_H \cdot jB\ell} < 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta < 0{,}01 \cdot \ell B R_H \sigma}$$

$\Leftrightarrow \underline{\delta < 0{,}74\ \text{mm}}$: précision difficile à atteindre

• On peut ajouter un générateur de tension continue variable qu'on réglerait pour que $V_{mesuré} = 0$ en absence de champ magnétique afin de compenser ΔV.

Ainsi au voltmètre on mesurerait alors que V_H.