

# Physique : DS8 – Savoir Faire

## I) Sphère uniformément chargée en volume (/5)

Calculer le champ  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$  créé en tout point de l'espace par une sphère chargée uniformément en volume.

La distribution de charge envisagée dans cet exemple est une boule de rayon  $R$ , de charge  $Q$  homogène, centrée en 0 origine du repère.

- Choix d'un repérage adapté

Le repérage sphérique est le mieux adapté à la situation. La distribution de masse est caractérisée par la charge volumique  $\rho(r)$  tel que :  $\rho(r > R) = 0$  et  $\rho(r < R) = \rho_0$ .

- Étude des symétries et des antisymétries

Tous les plans qui contiennent 0 et M sont plans de symétrie de la distribution de masse. On en déduit que :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

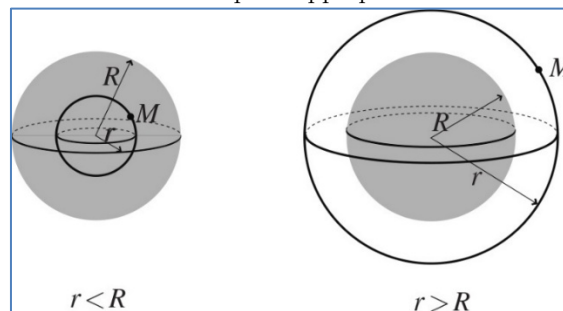
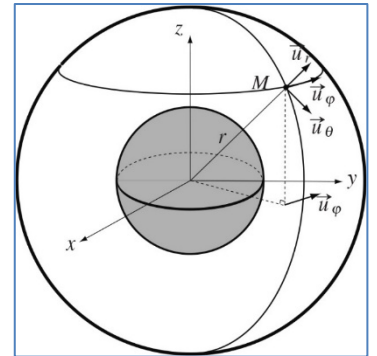
- Étude des invariances

La distribution de charge est invariante par rotation autour de tous les axes qui passent par 0, on en déduit que :

$$E(M) = E(r).$$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

Sur la sphère de centre 0 et rayon  $r$ , le champ de gravitation prend en tout point la même valeur. On choisit comme surface de Gauss donc la sphère  $\Sigma$  de volume  $V$  pour appliquer le théorème de Gauss.



D'après le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \text{Or } \begin{cases} Q_{int}(r > R) &= Q \\ Q_{int}(r < R) &= \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 \end{cases} \\ \text{d'où } \begin{cases} \vec{E}(r > R) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r < R) &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que la boule vue de l'extérieur est équivalente à une charge ponctuelle situé au centre.

$$\text{Or : } \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow dV = -E dr$$

$$\text{d'où } \begin{cases} V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + A \\ V(r < R) = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + B \end{cases}$$

Par convention :  $A=0$  et, on calcule B par continuité de  $V$  :

$$\begin{aligned} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} &= -\frac{QR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + B \Leftrightarrow B = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} \\ \text{Donc } \begin{cases} V(r > a) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ V(r < a) &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) \end{cases} \end{aligned}$$

## II) Energie de constitution du noyau (/5)

Calculer l'énergie de constitution du noyau.

L'énergie de constitution de cette sphère est définie comme le travail qu'il faut fournir, de manière quasistatique, pour la construire en prenant les charges à l'infini. On va considérer qu'on construit la sphère très lentement et on supposera à chaque instant le système à l'équilibre sous l'action de l'opérateur qui construit la sphère et de l'interaction électrostatique avec la portion de sphère déjà créée.

$$\overrightarrow{dF_{op}} + \overrightarrow{dF_{elec}} = \vec{0} \Rightarrow \delta^2 W_{op} = -\delta^2 W_{elec} = d^2 E_p$$

$$\Rightarrow \delta W_{op} = dE_p(\text{final}) - dE_p(\text{initial})$$

La sphère de rayon  $r$  a déjà été construite, elle porte la charge  $q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ , l'opérateur va amener la charge  $dq = \rho 4\pi r^2 dr$  (couronne sphérique concentrique) de l'infini à  $r$ .

$$\delta W_{op} = dE_p(\text{final}) - dE_p(\text{initial})$$

$$\Rightarrow \delta W_{op} = dq(V(r) - V(\infty))$$

$$\Rightarrow \delta W_{op} = dq \left( \rho \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r} - 0 \right) = \rho 4\pi r^2 dr \times \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \delta W_{op} = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r^4$$

Pour obtenir la sphère de rayon  $R$ , on intègre cette expression pour  $r$  variant de 0 à  $R$ , il vient :

$$\Rightarrow E_{\text{noyau}} = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \frac{R^5}{5}$$

$$\text{Or : } Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho^2 = \frac{9}{16\pi^2 R^6} Q^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{noyau}} = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \times \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6} \times \frac{R^5}{5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R}$$

L'énergie électrostatique de constitution d'un noyau atomique est égale à :

$$E_{\text{noyau}} = \frac{3}{5} \times \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} > 0$$

## III) Dipôle électrostatique (/5)

Calculer le potentiel créé par un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire. En déduire le champ électrostatique.

Approximation dipolaire : On calcule le potentiel dans le cas où  $r \gg a$  où  $a = NP$

Soit :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} r_2^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} \\ r_1^2 = (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM})^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OM} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_2^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar \cos\theta \\ r_1^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\frac{a}{2} r \cos\theta = \frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos\theta \end{cases}$$

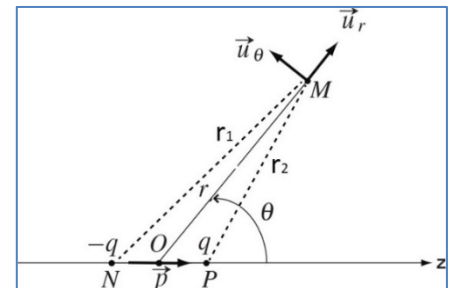
Par un développement limité en  $a/r$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \sim \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right) \\ \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \sim \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right) \end{cases}$$

D'où :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta - 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right)$$

$$\Leftrightarrow V(M) = \frac{q a \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



a) Calcul du champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire.

Soit :  $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2 \frac{q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos \theta \vec{u}_r + p \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

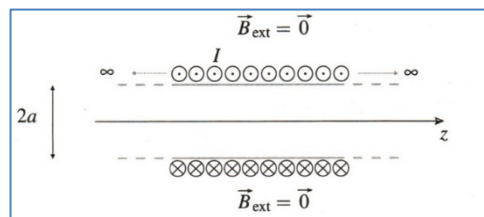
$$\text{Or : } \begin{cases} \vec{p} \cdot \vec{u}_r = p \cos \theta \\ \vec{p} \cdot \vec{u}_\theta = -p \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p \cos \theta \vec{u}_r = 2(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r \\ p \sin \theta \vec{u}_\theta = -(\vec{p} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - ((\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r + (\vec{p} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta)]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}]$$

#### IV) Solénoïde (/3)

Calculer le champ  $\vec{B}$  créé par un solénoïde infini.



Le solénoïde infini est un dispositif idéalisé qui présente des propriétés de symétries intéressantes, on admet qu'il impose un champ magnétique nul à l'extérieur :  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ . Un solénoïde infini parcouru par un courant  $I$  crée un champ magnétique nul à l'extérieur de celui-ci.

- Étude des symétries et des antisymétries

Le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) et qui passe par le point M est plan de symétrie pour la distribution de courants.

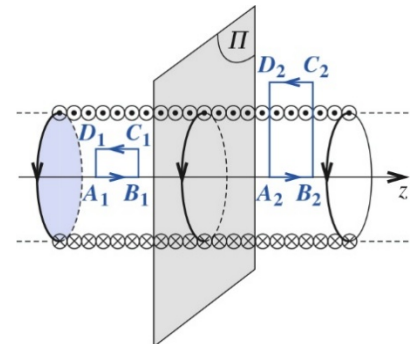
$$\Rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_z$$

- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit :  $B(M) = B(r)$

- Choix d'un contour d'Ampère

On choisit successivement deux contours d'Ampère rectangulaires, comme le montre la figure suivante :



Les deux contours ont l'axe Oz en commun, mais l'un des deux se referme à l'intérieur du solénoïde, l'autre à l'extérieur.

- Appliquons le théorème d'Ampère à celui de l'intérieur :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow B_{\text{axe}} l - B(r < a) l = 0$$

$$\Leftrightarrow B(r < a) = B_{\text{axe}}$$

- Appliquons le théorème d'Ampère à celui de l'extérieur :

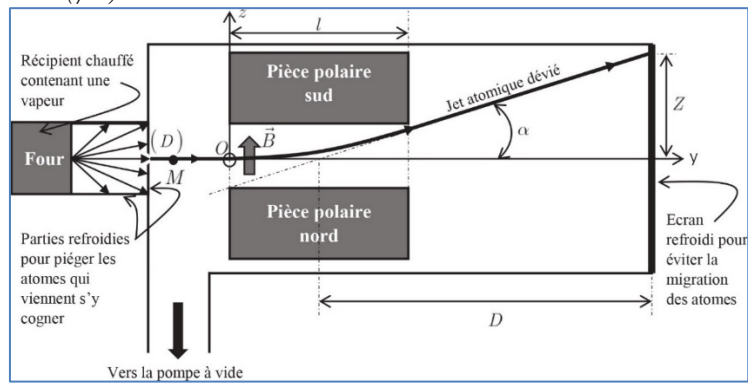
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I \Leftrightarrow B_{\text{axe}} l - B(r > a) l = \mu_0 n I l$$

$$\Leftrightarrow B(r > a) = B_{\text{axe}} - \mu_0 n I = \text{cste} = 0$$

$$\Leftrightarrow B_{\text{axe}} = \mu_0 n I$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

## V) Stern et Gerlach (/5)



Appliquons le PFD à la particule d'Argent dans le référentiel galiléen :

$$\begin{cases} m\ddot{z} = F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \\ m\ddot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} t \\ v_x = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{t^2}{2} \\ x = ut \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^2}{2}$$

Donc en sortie d'aimant :

$$\tan \alpha = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_l = \frac{\mu_z}{mu^2} \frac{\partial B}{\partial z} l \text{ avec } Z = (\tan \alpha) X$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\mu_z}{mu^2} \frac{\partial B}{\partial z} lD$$

$$\text{Or } u^2 = 3k_B T$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\mu_z}{3k_B T} \frac{\partial B}{\partial z} lD$$

## Partie II - Le haut-parleur (CCP 2016 - PC)

A.1.1) La source fournit un signal électrique qui met en mouvement mécanique la membrane d'où le nom de convertisseur de puissance électrique en puissance mécanique.

A.1.2.1) Le circuit mobile est placé dans une zone de champ magnétique, il peut donc y avoir une variation de flux magnétique.



A.1.3) On a 
$$\vec{d\vec{f}}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$
  

$$= I d\vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r \Rightarrow \underline{d\vec{f}}_L = -iB dl \vec{u}_z$$

A.1.4) Soit 
$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{-iB l \vec{u}_z}_{\text{Laplace}} + \underbrace{-kz \vec{u}_z}_{\text{Rappel élastique}} - \underbrace{\lambda \vec{u}}_{\text{frottement visqueux}} \quad (2)$$

A.2.1) En notation complexe : 
$$-m\omega^2 \underline{z} = -iBl - k\underline{z} - \lambda(j\omega)\underline{z} \quad (1)$$
  

$$\underline{u} = Ri + jL\omega i - Bl(j\omega)\underline{z} \quad (2)$$

A.2.2) (2)  $\Rightarrow \underline{z} = \frac{\underline{u} - Ri - jL\omega i}{-j\omega Bl}$  d'où (1) : 
$$[-m\omega^2 + k + \lambda(j\omega)] \frac{(\underline{u} - Ri - jL\omega i)}{-j\omega Bl} = -iBl$$

Donc 
$$\underline{u} (-m\omega^2 + k + \lambda(j\omega)) = i [j\omega B^2 l^2 + (R + jL\omega) (-m\omega^2 + k + \lambda(j\omega))]$$

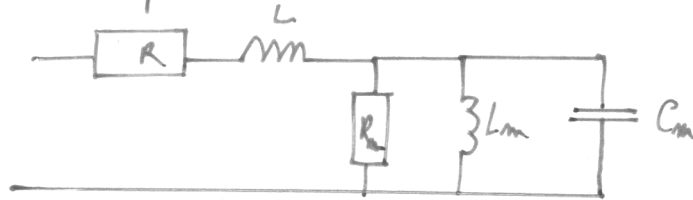
Donc 
$$\underline{z} = \frac{j\omega B^2 l^2}{-m\omega^2 + k + \lambda(j\omega)} + R + jL\omega \Leftrightarrow \underline{z} = R + jL\omega + \frac{B^2 l^2}{\lambda + \frac{k}{j\omega} + m(j\omega)}$$

A.2.3) On remarque que  $\underline{Z}_e = R + jL\omega$  et  $\underline{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{1 + m(j\omega) + k/j\omega}$

A.2.4) Donc  $\underline{Y}_m = \frac{1 + m(j\omega) + k/j\omega}{B^2 l^2} = \frac{1}{B^2 l^2} + (j\omega) \frac{m}{B^2 l^2} + \frac{k}{B^2 l^2} \left( \frac{1}{j\omega} \right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_m = B^2 l^2 / 1 = 16 \Omega \\ C_m = m / B^2 l^2 = 250 \mu F \\ L_m = B^2 l^2 / k = 128 \text{ mH} \end{cases}$$

A.2.5)  $\underline{Z}_m$  est une association en parallèle et  $\underline{Z}_e$  en série d'où :



A.2.6) On a donc  $\underline{Z} = \underline{Z}_e + \frac{1}{\underline{Y}_m} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{1}{R_m} + j(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega})}$

$$= R + jL\omega + \frac{1/R_m - j(C_m\omega - 1/L_m\omega)}{(1/R_m)^2 + (C_m\omega - 1/L_m\omega)^2}$$

D'où  $R_T = \text{Re}(\underline{Z}) = R + \frac{1/R_m}{(1/R_m)^2 + (C_m\omega - 1/L_m\omega)^2}$

$$\Leftrightarrow R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \left( C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega} \right)^2} \quad \text{CQFD}$$

A.2.7) On a  $\underline{R} = R_T(\omega) = 8 \Omega$  et  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{550}{2\pi} \simeq 89 \text{ Hz}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}} \simeq 89 \text{ Hz} \end{array} \right. \quad \text{cohérence des résultats}$$

$$A.3.1) \text{ de } \begin{cases} A.1.2.2 : Blv_i = \mu_i - Ri^2 - iL \frac{di}{dt} & (a) \\ A.1.4 : Blv_i = -kz \frac{dz}{dt} - \lambda v^2 - mv \frac{dv}{dt} & (b) \end{cases}$$

$$(a) \Rightarrow \mu_i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) - Blv_i \Rightarrow \begin{cases} P_J = Ri^2 \\ P_L = -Blv_i \\ E_{mag} = \frac{1}{2} Li^2 \end{cases} \begin{array}{l} \text{effet Joule} \\ \text{Puissance des Frottements} \\ \text{Energie stockée dans bobine} \end{array}$$

$$A.3.2) (b) \Rightarrow -Blv_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) + \lambda v^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} kz^2 \right) \Rightarrow \begin{cases} P_A = \lambda v^2 \\ P_L = -Blv_i \\ E_c = \frac{1}{2} mv^2 \\ E_{pe} = \frac{1}{2} kz^2 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Puissance acoustique} \\ \text{(frottements de l'air)} \\ E \text{ cinétique} \\ E_p \text{ élastique} \end{array}$$

A.3.3) En éliminant  $R$ :

$$\mu_i = \frac{d}{dt} E_{mag} + P_J + \frac{dE_m}{dt} + P_A \quad \text{où } E_m = E_c + E_{pe}$$

$$A.3.4) \text{ Donc } \langle \mu_i \rangle = \langle P_J \rangle + \langle P_A \rangle + \left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dE_{mag}}{dt} \right\rangle$$

$$\text{or } \left\langle \frac{dE_{mag}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2} Li^2(T) - \frac{1}{2} Li^2(0) \right] = 0 \quad \text{car } i(T) = i(0)$$

$$\text{De même pour } \frac{dE_m}{dt} \quad \text{car } v(T) = v(0) \text{ et } z(T) = z(0)$$

$$\text{Donc } \langle P_J \rangle = R \langle i^2 \rangle + \lambda \langle v^2 \rangle \quad \text{coeff}$$

• la production de l'onde sonore est liée au frottement de l'air sur la membrane

$$\text{d'où } \langle P_{ac} \rangle = \lambda \langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\langle P_{ac} \rangle}{\langle P_J \rangle}$$

A.3.5) Soit  $\eta = \frac{\langle P_u \rangle}{\langle P_s \rangle}$ , or l'objectif de ce HP est de générer des ondes

sonores d'où:  $\eta = \frac{\langle P_u \rangle}{\langle P_s \rangle}$  avec  $\langle P_s \rangle = \langle P_f \rangle + \langle P_a \rangle$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{\langle P_s \rangle - \langle P_f \rangle}{\langle P_s \rangle} = 1 - \frac{\langle P_f \rangle}{\langle P_s \rangle} = 1 - \frac{R \langle i^2 \rangle}{\langle \mu i \rangle}$$

$$\text{or } \mu i = \left( R_T i + L \frac{di}{dt} \right) i = R_T i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right)$$

$$\text{or } \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T d \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) = 0.$$

$$\Rightarrow \langle \mu i \rangle = R_T \langle i^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{R}{R_T}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{R_T - R}{R_T}$$

A.3.6) Le rendement maximal de 0,67 est obtenu pour  $\omega_0 = 550 \text{ rad.s}^{-1}$

$$\Leftrightarrow f_0 = 89 \text{ Hz. ce qui est en accord avec A.2.7.}$$

A.3.7) L'oreille humaine entend "pour les jeunes" de 20 Hz à 20 kHz. Ici  $f_0 = 89 \text{ Hz}$  est un son grave

A.3.8) Une enceinte doit reproduire avec le même rendement l'ensemble du spectre audible  
 $\rightarrow$  l'utilisation de plusieurs enceintes suivant les fréquences délimitées  
 (bass, woofer, médium, ...)