

Physique : DS6

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I – Etude de la couche limite

Une étude dynamique de la couche limite

Ce problème met en jeu la notion de couche limite qui intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminaires, à nombres de Reynolds néanmoins importants, autour d'un solide. Cette couche assure le raccordement entre la solution d'écoulement parfait qui prévaut loin du corps et la condition de vitesse nulle sur les parois. L'étude simplifiée proposée repose sur les travaux de deux physiciens allemands spécialistes en mécanique des fluides.

- Ludwig Prandtl (1875-1953) qui introduisit en 1904 la notion de couche limite dans l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle. Ses travaux le conduisirent également à établir la théorie hydrodynamique de l'aile portante d'envergure infinie dans un fluide parfait.
- Heinrich Blasius (1883-1970) qui publia de nombreux mémoires sur les écoulement de fluides visqueux autour d'obstacles et dans les tuyaux cylindriques.

Formulaire : équation de Navier-Stokes d'un fluide newtonien visqueux incompressible

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \mu \vec{g} - \vec{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

I Préliminaire

On s'intéresse à un régime variable d'écoulement au sein d'un fluide visqueux et incompressible dont le champ des vitesses s'écrit $\vec{v} = v_x(y, t)\vec{u}_x$. L'axe Ox est horizontal et la pression ne dépend pas de x . Cela peut, par exemple, concerner le régime transitoire d'accès à un écoulement stationnaire de cisaillement simple.

I.A – Rappeler, en introduisant la viscosité dynamique η dont on indiquera l'unité S.I., l'expression de la force de viscosité exercée, au niveau de la surface élémentaire d'aire dS et de normale \vec{u}_y , par la portion de fluide d'abscisses supérieures à y sur la portion de fluide d'abscisses inférieures à y .

On dit que cette force traduit un transfert diffusif de quantité de mouvement. Préciser cette notion en soulignant en quoi cela diffère d'un transfert convectif. Quel phénomène simple explique le brassage moléculaire qui est à l'origine de cette diffusion ?

I.B – Établir l'expression $d\vec{F}_{\text{visc}}$ de la résultante des forces de viscosité agissant sur l'élément de volume $d\tau$ défini par les intervalles $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$, $(z, z+dz)$.

I.C –

I.C.1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule de fluide de volume $d\tau$ et constater que l'on retrouve l'équation de Navier-Stokes dans le cas particulier d'écoulement envisagé.

En cas d'échec à cette question (en particulier si l'on n'a pas répondu à la **question I.B**) on poursuivra en utilisant l'équation de Navier-Stokes proposée dans le formulaire dont on donnera toutefois la signification des différents termes.

I.C.2) En projetant cette équation sur \vec{u}_x , obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v_x(y, t)$ appelée équation de diffusion. Lui donner une forme remarquable commune à toutes les équations de diffusion en introduisant la diffusivité de quantité de mouvement ou viscosité cinématique ν que l'on exprimera à l'aide de η et de la masse volumique ρ . Quelle est l'unité S.I. de ν ?

I.D – En quoi le phénomène de diffusion est-il irréversible et comment cela est-il pris en compte dans l'équation de diffusion ? Donner une autre forme d'équations aux dérivées partielles régissant des phénomènes réversibles que l'on nommera.

I.E – Grâce à l'équation de diffusion, établir un lien très simple entre la viscosité cinématique ν , la distance caractéristique selon $Oy : L_y$, et la durée caractéristique τ du phénomène de diffusion. (On pourra exploiter un raisonnement en ordre de grandeur ou une analyse dimensionnelle.)

II Ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche limite

On se propose d'évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite (affectée par la viscosité) au voisinage d'une plaque plane sur laquelle arrive un écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{x}$ parallèle à la plaque.

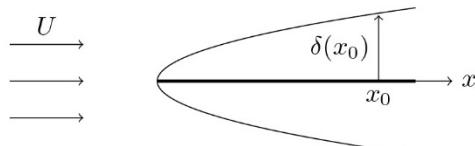


Figure 1

Cette zone qui assure le raccordement entre la condition de vitesse nulle contre la plaque et l'écoulement uniforme, s'établit par diffusion perpendiculairement à la plaque à partir du moment où le fluide aborde l'extrémité de celle-ci.

Estimer l'ordre de grandeur $\delta(x_0)$ de l'épaisseur de la couche limite en exploitant le résultatat de la **question I.E** et en tenant compte du fait que lorsque le fluide atteint l'abscisse x_0 (à partir de l'extrémité de la plaque), le phénomène diffusif perpendiculairement à la plaque, s'est déjà produit pendant la durée x_0/U .

Rappeler l'expression du nombre de Reynolds si l'on prend x_0 comme dimension caractéristique d'écoulement : Re_{x_0} .

Exprimer $\delta(x_0)/x_0$ à l'aide de Re_{x_0} .

Proposer alors un critère de pertinence pour l'utilisation de la notion de couche limite.

III Cas d'un écoulement de Poiseuille plan

On considère maintenant l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux d'abscisses $y = -d/2$ et $y = +d/2$. L'axe horizontal Ox définit la direction et le sens de l'écoulement tandis que l'axe Oy est vertical ascendant : $\vec{g} = -g\vec{u}_y$.

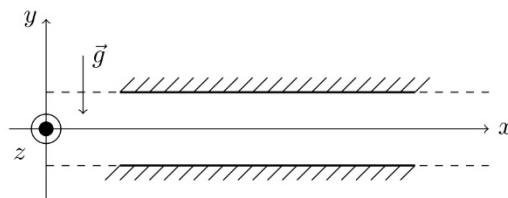


Figure 2

III.A – On considère une zone suffisamment éloignée de l'extrémité par laquelle le fluide aborde le dispositif pour ignorer tout phénomène d'entrée et faire comme si les parois étaient illimitées. On étudie alors un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ et un champ de pression $p(x, y)$.

III.A.1)

a) Écrire l'équation locale du mouvement en mettant à profit le résultatat de la **question I.B** (ou en exploitant l'équation donnée dans le formulaire). La projeter sur \vec{u}_x et \vec{u}_y .

b) En déduire que $\partial p / \partial x = K$ (constante).

c) Donner la loi $v_x(y)$ en fonction de K , η , y et d . Montrer que le profil des vitesses est parabolique.

III.A.2) On note $\Delta p = p(x, y) - p(x + L, y)$ la différence de pression qui doit exister entre deux points de même altitude et distants de L selon Ox pour maintenir cet écoulement.

Établir l'expression du débit volumique D_V à travers une section de largeur h selon Oz en fonction de Δp , L , h , d et η .

Avec quelle loi électrique la relation entre Δp et D_V suggère-t-elle une analogie ? Introduire une résistance hydraulique.

III.A.3) Si, en maintenant Δp , on divise d par 2, que devient le débit ?

Quel débit total circule alors à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$, chacun étant soumis à la différence de pression Δp sur une longueur L ?

En déduire une différence importante avec la notion de résistance électrique.

III.B – On examine maintenant le phénomène d'entrée dans le dispositif précédent. Un fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_x$ pénètre dans l'intervalle situé entre deux plaques planes parallèles au plan xOz , distantes de d .

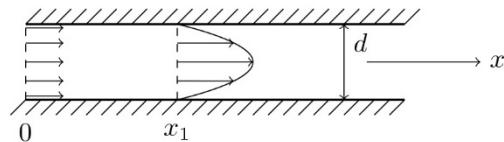


Figure 3

En exploitant le phénomène de croissance de couche limite à partir de l'arête de chaque plaque (cf. partie II), évaluer en fonction de U , d et ν , la distance x_1 parcourue par le fluide depuis son entrée dans le dispositif avant que s'établisse le profil parabolique de vitesse.

Montrer qu'on peut exprimer le rapport x_1/d à l'aide du nombre de Reynolds si l'on choisit judicieusement la dimension caractéristique de l'écoulement.

IV Équation du mouvement dans la couche limite

On considère un écoulement laminaire stationnaire et incompressible, près d'une plaque plane horizontale $y = 0$, à nombre de Reynolds grand devant 1, de façon que la notion de couche limite ait un sens. On se limite au cas d'un écoulement uniforme hors de la couche limite : $\vec{v}_{\text{ext}} = U \vec{u}_x$. Le fluide a la masse volumique μ et la viscosité dynamique η . On adopte le modèle d'un écoulement bidimensionnel dans la couche limite, caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(x, y) \vec{u}_x + v_y(x, y) \vec{u}_y$ et le champ de pression $p(x, y)$.

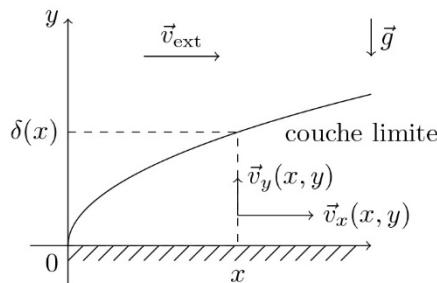


Figure 4

On admettra que, dans ce cas, la résultante des forces de viscosité agissant sur un élément de volume $d\tau$ s'écrit $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta(\Delta v_x \vec{u}_x + \Delta v_y \vec{u}_y)d\tau$.

IV.A – Écrire l'équation traduisant l'incompressibilité.

IV.B – Écrire les projections sur \vec{u}_x et \vec{u}_y de l'équation fondamentale de la dynamique en utilisant les constantes μ , ν et g .

IV.C – *Raisonnement sur les ordres de grandeur*

Pour évaluer (dans la couche limite) l'ordre de grandeur de la dérivée d'une grandeur par rapport à x , on considère le quotient de cette grandeur par x_0 (valeur « typique » de x) et pour la dérivée d'une grandeur par rapport à y , on considère le quotient de cette grandeur par $\delta(x_0)$ (épaisseur de couche limite en x_0).

Exemples : $\partial v_x / \partial x$ de l'ordre de v_x / x_0 , $\partial v_x / \partial y$ de l'ordre de $v_x / \delta(x_0)$.

IV.C.1) En utilisant l'équation obtenue au **IV.A**, relier les ordres de grandeur de v_x et v_y au nombre de Reynolds Re_{x_0} . En déduire que $v_y \ll v_x$.

IV.C.2) Montrer également que

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

IV.C.3) Montrer que

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

sont du même ordre de grandeur.

Montrer, en se plaçant au bord extérieur de la couche limite, où v_x est de l'ordre de U que

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

est du même ordre que les deux termes précédents.

IV.C.4) Réécrire les équations du **IV.B** en les simplifiant grâce à **IV.C.2**. On admettra que la faiblesse de v_y (en comparaison à v_x) conduit à ignorer toutes les dérivées partielles de v_y lors de la projection sur \vec{u}_y . En déduire que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx -\mu g$$

IV.D – Puisque la couche limite est très étroite en altitude, et compte tenu de la relation précédente, la pression p , à x donné, a quasiment la même valeur qu'à l'extérieur immédiat de cette couche. Hors de la couche limite (on rappelle que l'écoulement y est parfait) la pression dépend-t-elle de x ?

Que dire alors de $\frac{\partial p}{\partial x}$ dans la couche limite ?

En déduire l'équation :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Données numériques

- intensité de la pesanteur : $g = 1 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- pression atmosphérique au niveau du sol : $p_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
- viscosité dynamique de l'eau : $\eta_e = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
- coefficient de tension superficielle de l'eau : $\gamma_e = 7 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 2 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Formulaire

Lois de Coulomb : Un solide en contact quasi-ponctuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalentes à une force \vec{F} que l'on peut décomposer en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} .

En l'absence de glissement, on a $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement.

En présence de glissement, la composante tangentielle \vec{T} est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur-vitesse de glissement et on a $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$.

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques
(r, θ, x)

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_x}{\partial x}$$

Partie II – Toboggan

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse à un enfant modélisé par un point matériel M, de masse $m = 50 \text{ kg}$, qui glisse sur un toboggan dont le schéma est donné en **figure 1**.

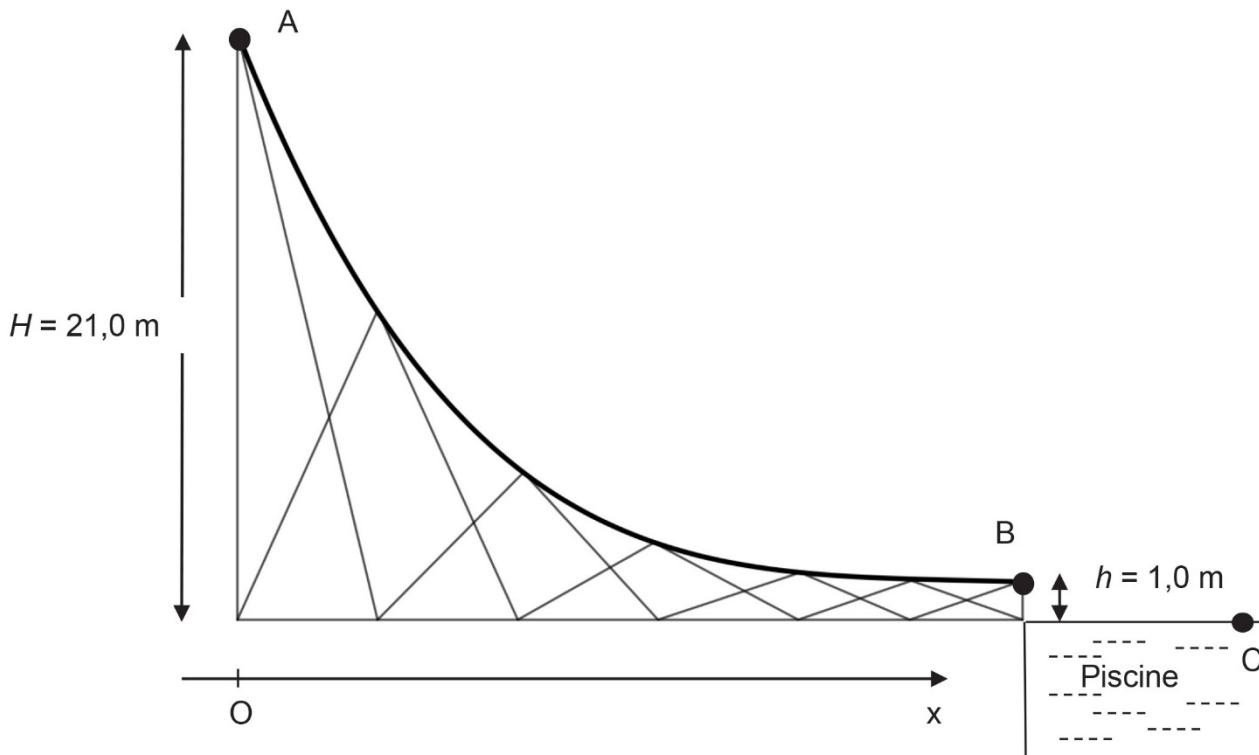


Figure 1 - Schéma d'implantation du toboggan par rapport à la piscine

L'enfant se laisse glisser sur le toboggan depuis le point A d'altitude $H = 21,0 \text{ m}$ sans vitesse initiale. Il termine sa glissade au point B d'altitude $h = 1,0 \text{ m}$ avec une vitesse horizontale qui lui permet d'atteindre un point C à la surface de l'eau de la piscine. Une discussion s'engage lors de la conception du toboggan pour savoir dans quelle zone de la piscine il faudra interdire les baigneurs pour éviter toute collision avec l'enfant qui arrive dans la piscine.

Par la suite, on prendra $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. On suppose tout d'abord qu'un filet d'eau annule les frottements de l'enfant sur toute la longueur $L = 37,5 \text{ m}$ de la piste du toboggan.

- Q1.** Exprimer, puis calculer le travail $W_{\overline{P}}$ du poids de l'enfant lors de cette descente de A vers B.
- Q2.** Citer le théorème de l'énergie cinétique. L'appliquer à l'enfant qui glisse sans frottement entre les points A et B et en déduire l'expression de la vitesse $v_{B_sans_frottement}$ atteinte au point B en fonction des données.

Q3. Donner la valeur de cette vitesse $v_{B_sans_frottement}$.

En réalité, les frottements existent et la vitesse au point B, horizontale, vaut $v_B = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Q4. Faire figurer sur un schéma, sans souci d'échelle, les forces appliquées sur le point M en un endroit quelconque de la glissade.

Q5. Exprimer, puis calculer le travail $W_{\vec{F}}$ de cette force de frottement \vec{F} sur le trajet AB.

Q6. Donner l'expression du travail élémentaire de la force de frottement $\delta W_{\vec{F}}$ pour en déduire une expression du travail $W_{\vec{F}}$ sur le trajet AB, en supposant la force de frottement de norme F constante sur le trajet.

Q7. Déduire ainsi la norme F de la force de frottement.

On s'intéresse maintenant à la localisation du point de chute C dans l'eau avec une vitesse horizontale en B, $v_B = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le mouvement de l'enfant dans l'air est supposé sans frottements. On rappelle que la hauteur entre B et C vaut $h = 1,0 \text{ m}$.

Pour les besoins de cette question, on donne $\sqrt{0,2} = 0,45$.

Q8. En détaillant votre raisonnement, exprimer, puis calculer la distance horizontale d depuis B parcourue par l'enfant lorsqu'il arrive au contact avec l'eau au point C.

Lorsqu'il arrive dans l'eau au point C, l'enfant, toujours assimilé à un point matériel M de masse m , subit une force de frottement fluide \vec{F}' telle que $\vec{F}' = -k \cdot \vec{v}$. On s'intéresse uniquement à la composante horizontale $v_x(t)$ de la vitesse \vec{v} de l'enfant dans l'eau.

Q9. Montrer que cette composante horizontale de vitesse $v_x(t)$ répond à l'équation différentielle :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v_x = 0, \text{ avec comme condition initiale } v_x(0) = v_B. \quad (1)$$

Q10. En déduire dans ce cas l'expression d'un temps caractéristique de ralentissement τ .

Une analyse vidéo a permis d'obtenir en **figure 2** la courbe d'évolution de $v_x(t)$ qui confirme l'existence d'une force de frottement.

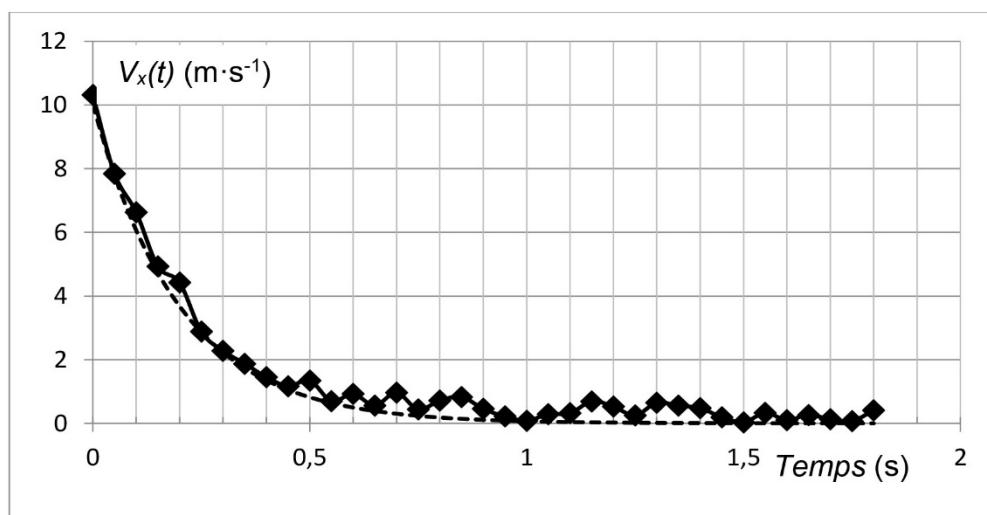


Figure 2 - Évolution de la composante horizontale de la vitesse, $v_x(t)$, en fonction du temps

- Q11.** Proposer un modèle mathématique pour cette courbe dans le cadre de l'hypothèse précédente sur l'expression de la force de frottement.
- Q12.** En déduire alors graphiquement, en estimant la valeur du temps caractéristique τ , celle de k coefficient de force de frottement fluide.
- Q13.** Déterminer la distance horizontale, notée d' et mesurée à partir du point C, parcourue sous l'eau par le point M. Conclure vis-à-vis des consignes de sécurité de la piscine.

Partie II - Choix de la pompe du toboggan

La pompe qui renvoie l'eau de la piscine sur le haut du toboggan est vieillissante et doit être changée. On donne le schéma d'implantation en **figure 3**.

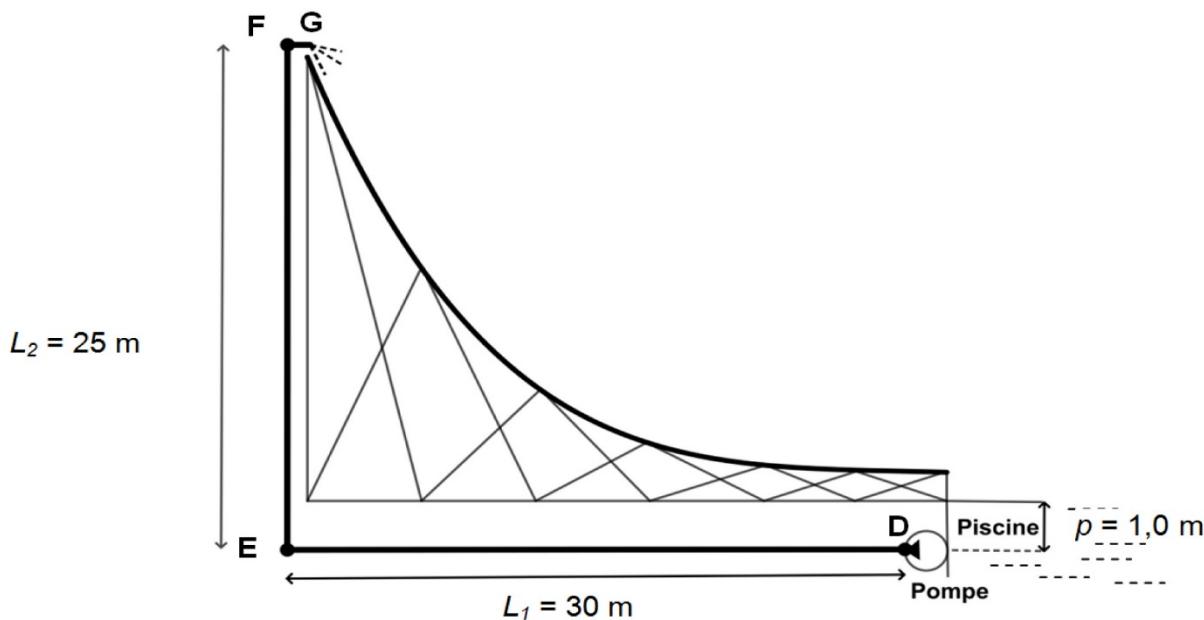


Figure 3 - Schéma des tuyauteries et de positionnement de la pompe

La pompe préleve directement l'eau de la piscine à une profondeur $p = 1,0 \text{ m}$ avec une longueur de tuyau d'aspiration négligeable. Le tronçon horizontal DE, le tronçon vertical EF et le tronçon FG du tuyau de refoulement sont en PVC de section utile $S = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Au point G, point de refoulement à pression atmosphérique, la section est aussi de $S = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Le débit volumique D_V souhaité est égal à $3,6 \cdot 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$.

La pression en D (sortie de pompe) est mesurée : $P_D = 5,5 \text{ bar}$.
On rappelle les données suivantes :

- intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- Q14.** Écrire la relation de Bernoulli dans le cas d'un fluide parfait en précisant les hypothèses de son utilisation.

On admet que les conditions d'utilisation de la relation de Bernoulli sont effectivement réunies. De plus, la vitesse de l'écoulement est supposée uniforme sur la section des tuyaux.

- Q15.** Justifier que la valeur de la vitesse d'écoulement du fluide est identique en D et en F.

Q16. Calculer (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) la vitesse d'éjection de l'eau au point G.

Q17. Calculer la pression P_F au point F dans le cadre des hypothèses précédentes.

En réalité, du fait des pertes de charge, on a mesuré au point E une pression $P_E = 5,2 \text{ bar}$.

Q18. Calculer la pression P'_F à laquelle on peut s'attendre au point F si on néglige les pertes de charge singulières au coude E et si on considère les pertes de charge régulières proportionnelles à la longueur de tuyau.

On suppose maintenant que les pertes de charge totales (régulières et singulières) entre l'entrée de la pompe et le point de sortie G sont $\Delta P_{pertes} = 2 \text{ bar}$.

Q19. Montrer que la quantité $D_V \Delta P_{pertes}$ est homogène à une puissance.

Q20. Exprimer la puissance utile P_u de la pompe à l'aide d'un bilan de puissance entre un point de la surface libre de l'eau de la piscine et le point de refoulement G.

Q21. Vérifier que cette puissance utile P_u vaut 4,4 kW.

En réalité, le rendement global de l'ensemble {moteur + pompe} est de 60 %.

Q22. Calculer la puissance électrique P_{elec} nécessaire au moteur de la pompe.

Pour une pompe, on évoque souvent la Hauteur Manométrique Totale HMT telle que :

$$P_u = \rho D_V g(HMT). \quad (2)$$

Q23. Calculer la hauteur manométrique totale HMT , exprimée en mCE (mètre de Colonne d'Eau).

Parmi toutes les pompes disponibles sur le marché, le choix s'est arrêté sur une pompe d'un fabricant qui propose un corps de pompe avec plusieurs diamètres possibles. Le document technique du fabricant est donné en **annexe**.

Q24. Proposer un choix de diamètre pour le remplacement de la pompe.

Q25. Préciser, avec justification, si la pompe fonctionnera à son régime optimal.

Partie III - Chauffage de l'eau de la piscine

Dans cette partie, on aborde le chauffage de l'eau d'un des bassins du parc aquatique.

Ce bassin, d'un volume total de 200 m^3 , doit être maintenu à une température de 26°C pour le confort des baigneurs. Une chaudière au butane C_4H_{10} , d'une puissance P de 100 kW, est actuellement installée mais une étude est réalisée pour remplacer celle-ci par une pompe à chaleur.

Données	
Capacité thermique massique de l'eau : $c_{eau} = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	Masses molaires atomiques, en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$: $M(\text{C}) = 12 ; M(\text{H}) = 1,0 ; M(\text{O}) = 16$

Q26. En supposant un rendement de chauffe de 100 %, exprimer la durée Δt de fonctionnement en continu de la chaudière pour réchauffer jusqu'à $\theta_f = 26^\circ\text{C}$ toute l'eau du bassin, initialement à $\theta_i = 20^\circ\text{C}$. Montrer que Δt vaut environ 14 h.

Q27. Écrire l'équation de la réaction de combustion complète du butane dans le dioxygène de l'air.

Dans cette chaudière à condensation, on estime le Pouvoir Calorifique PC du butane à $50 \text{ kJ}\cdot\text{g}^{-1}$.

Q28. Calculer le débit massique D_m de butane nécessaire en $\text{g}\cdot\text{s}^{-1}$, puis en $\text{g}\cdot\text{min}^{-1}$.

Q29. En déduire la masse de CO_2 produite par minute de fonctionnement de cette chaudière.

La pompe à chaleur prévue pour le remplacement de la chaudière utilise comme fluide frigorigène le R290, c'est-à-dire du propane.

Ce fluide subit un cycle de transformations dont on donne la description simplifiée :

- point A : vapeur saturée à la température θ_A et à la pression p_A ;
- du point A au point B : compression adiabatique irréversible jusqu'à la pression p_B et la température θ_B ;
- du point B au point C : refroidissement isobare pour atteindre un état de liquide saturant ;
- du point C au point D : détente isenthalpique jusqu'à la pression p_D ;
- du point D au point A : le fluide se vaporise complètement.

Données

$$\theta_A = 0^\circ\text{C} \text{ environ} ; p_A = 5 \text{ bar}$$

$$p_B = 15 \text{ bar} ; \theta_B = 80^\circ\text{C}$$

$$p_D = 5 \text{ bar}$$

Q30. À l'aide du diagramme fourni sur le **Document Réponse (DR)**, évaluer l'enthalpie massique de vaporisation Δh_{vap} du fluide R290 à 0°C .

Q31. Tracer sur votre copie l'allure du graphe d'évolution de cette enthalpie massique de vaporisation en fonction de la température.

Q32. Placer les points A, B, C et D du cycle de transformations sur le **DR**. Tracer l'allure du cycle de transformations sur le même document en indiquant son sens de parcours.

Q33. Décrire l'état du fluide au point D, en donnant en particulier la fraction massique en gaz x_g .

Q34. En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement permanent et en formulant d'éventuelles hypothèses simplificatrices, calculer le travail massique de compression w_{AB} .

Q35. Déterminer, par un raisonnement similaire, l'énergie thermique massique q_{cond} échangée par le fluide au niveau du condenseur.

Q36. Définir et calculer l'efficacité ε de cette pompe à chaleur.

On souhaite que la pompe à chaleur ait une puissance thermique $P = 100 \text{ kW}$, identique à celle de la chaudière qu'elle remplace. Par la suite, on suppose une efficacité $\varepsilon = 3,0$.

Q37. Calculer le débit massique D_m du fluide R290 dans l'installation.

Q38. Déterminer la puissance utile du compresseur de cette installation.

On désire mesurer la température θ de l'eau afin de réguler son chauffage. On utilise ainsi une sonde Pt100, capteur résistif de température dont la résistance R_{Pt} suit une fonction affine de θ :

$$R_{\text{Pt}} = R_0(1 + a\theta), \text{ avec } R_0 = 100 \Omega \text{ et } a = 3,85 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}. \quad (3)$$

Il faut d'abord inclure ce capteur dans le montage avec Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) de la **figure 4** avant de traiter le signal analogique par une chaîne numérique, en particulier pour en effectuer une Conversion Analogique-Numérique (CAN).

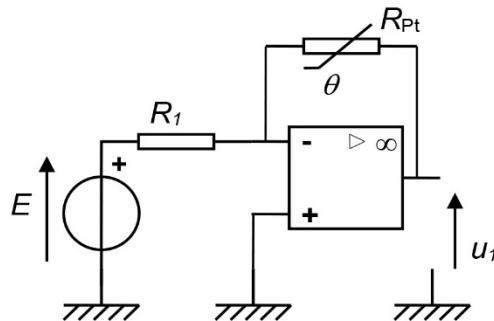


Figure 4 - Schéma du montage incluant le capteur de température Pt100

Q39. Exprimer u_1 en fonction de R_1 , R_0 , a , E et de θ , dans le cas où l'ALI est parfait et de gain infini.

Q40. Évoquer une limitation de l'ALI qui pourrait nuire au fonctionnement correct de ce montage.

Q41. Exprimer la sensibilité s du montage en $\text{V} \cdot {}^{\circ}\text{C}^{-1}$ en fonction de R_1 , R_0 , a et de E .

Q42. En prenant $R_1 = R_0 = 100 \Omega$ et $E = 1,0 \text{ V}$, calculer cette sensibilité s .

La tension $u_1(t)$ doit ensuite être numérisée via un Convertisseur Analogique-Numérique (CAN).

Q43. Expliquer pourquoi une valeur aussi faible de sensibilité risque de ne pas permettre un suivi convenable de la température du bassin.

On soumet la tension $u_1(t)$ à plusieurs quadripôles, non représentés, pour des transformations telles que, en sortie de l'ensemble des quadripôles, on obtient :

$$u_e(t) = 2 + 3\cos(2\pi 50t) \text{ avec } u_e \text{ en V et } t \text{ en s.} \quad (4)$$

La partie de la tension $u_e(t)$ variable périodiquement en fonction du temps est due à des parasites électriques, de fréquence 50 Hz, amplifiés par les différents quadripôles intermédiaires. Il faudrait garder uniquement la composante continue de ce signal car elle seule contient l'information dépendante de la température. On utilise pour cette fonction le circuit de la **figure 5** :

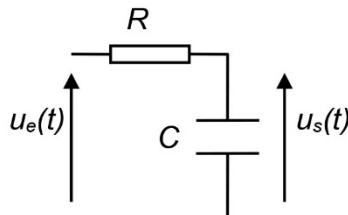
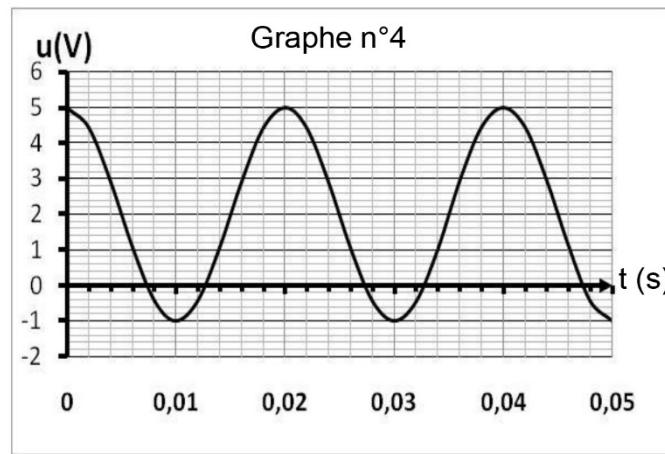
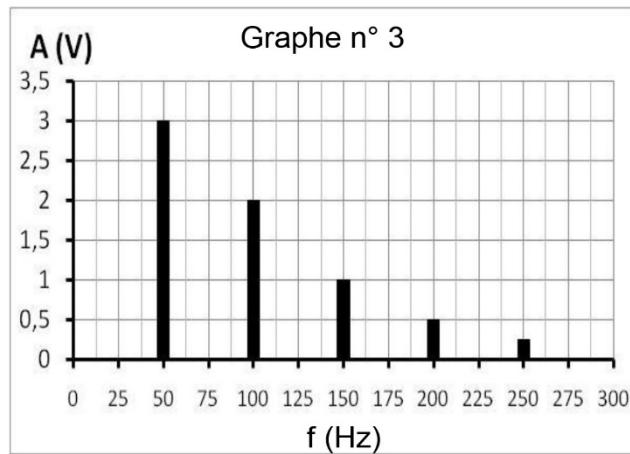
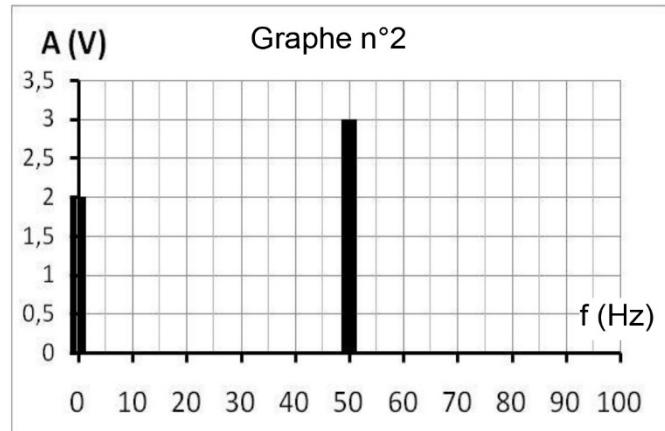
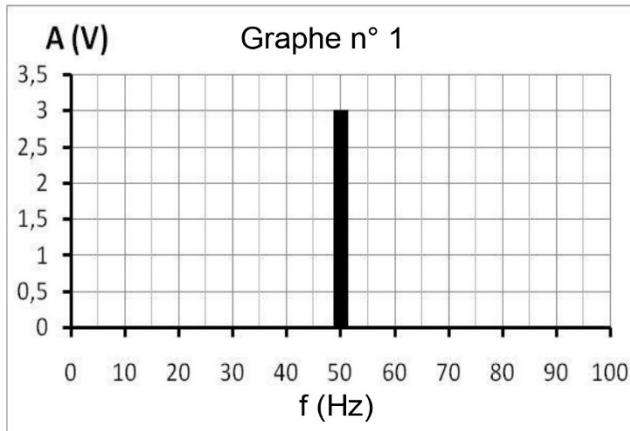


Figure 5 - Schéma du montage utilisé pour le traitement de $u_e(t)$

- Q44.** Indiquer, parmi les graphes suivants, celui qui représente le spectre en amplitude de $u_e(t)$.
Préciser pourquoi les autres graphes ne conviennent pas.



- Q45.** À l'aide des équivalents en haute et basse fréquences des composants, déterminer la nature du filtre réalisé avec le circuit de la **figure 5**. Justifier si ce circuit permet d'isoler la composante continue du signal.

La fonction de transfert du montage peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}. \quad (5)$$

- Q46.** Nommer H_0 et en donner la valeur en justifiant.

- Q47.** Préciser la valeur du gain en décibel, G_{db} , lorsque $\omega \ll \omega_c$.

On donne pour ce circuit $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

- Q48.** Rappeler la définition de la fréquence de coupure à -3 dB. Donner l'expression de cette fréquence de coupure, notée f_c , en fonction de R et de C pour ce circuit.

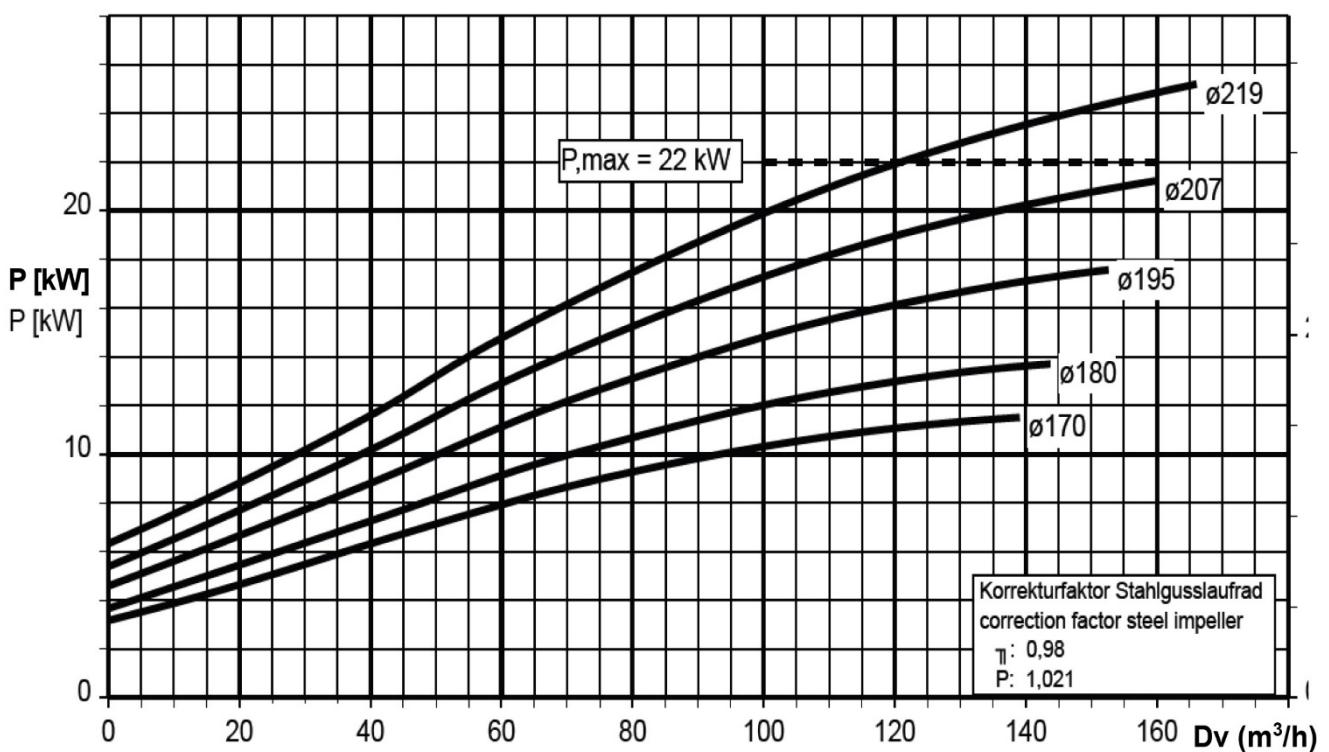
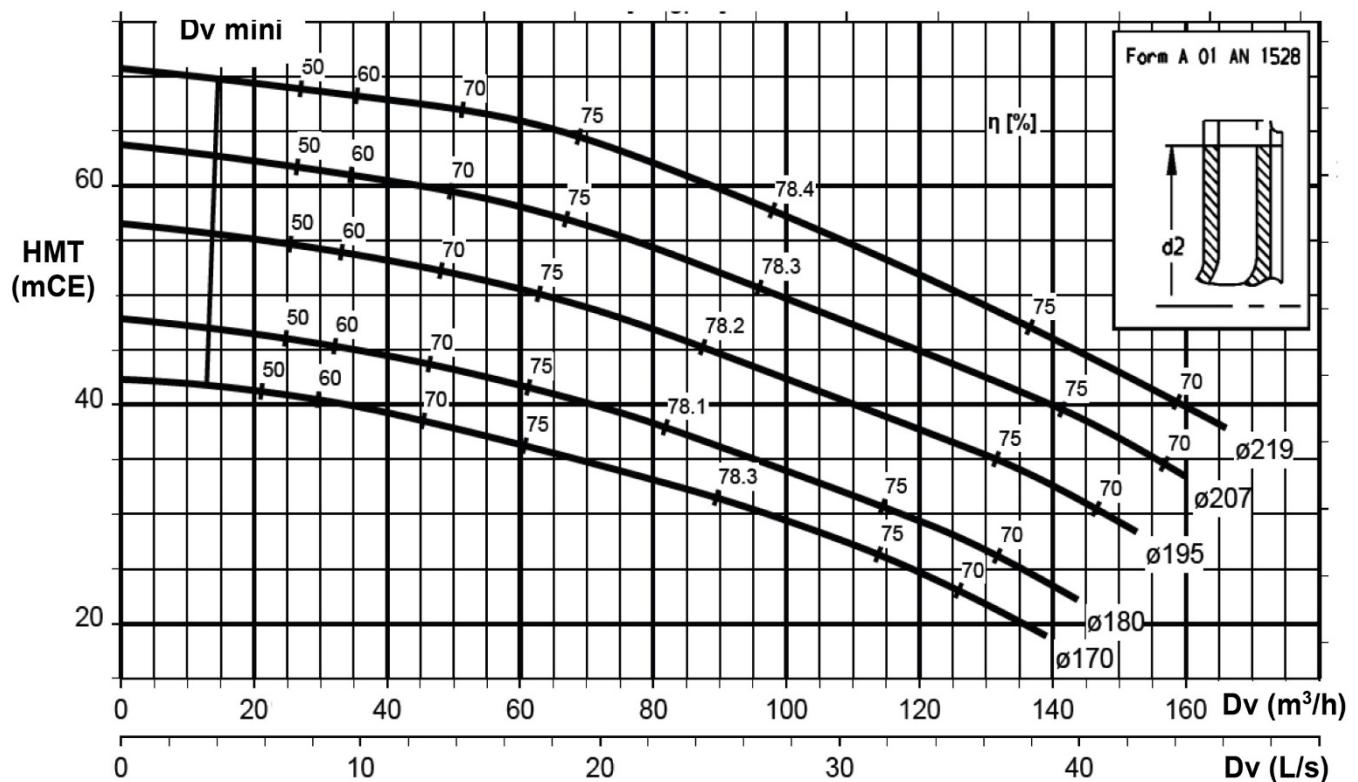
Comme précisé précédemment, on applique en entrée de ce circuit le signal $u_e(t)$ d'expression :

$$u_e(t) = 2 + 3\cos(2\pi 50t) \text{ avec } u_e \text{ en V et } t \text{ en s.} \quad (4)$$

- Q49.** Déterminer l'expression numérique de $u_s(t)$ en prenant $f_c = 0,5$ Hz. Conclure.

ANNEXE

Document technique de la pompe de remplacement



Annexe à rendre (À détacher de l'énoncé et à glisser dans votre copie)

NOM : _____

