Physique : DS6

Partie A – Etude de la couche limite (Centrale PC 2011)

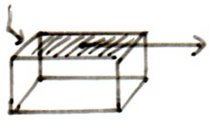
I Préliminaires

I.A . On suppose que $\vec{v} = v_x(y,t)\vec{u}_x$ d'où la force :

$$\boxed{\vec{dF} = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_y dS\,\vec{u}_x}$$

en Pl ou Pa.s ↗ η

dS



$\vec{dF}$ si $\frac{\partial v}{\partial y} > 0$.

. Les particules situées en $y+dy$ passent en y et amènent leur quantité de mouvement transverse : $m v_x(y+dy)\vec{u}_x$ d'où le transfert convectif.

. Le brassage moléculaire est dû à l'agitation thermique.

I.B Sur un élément de volume $d\tau$:

$$\vec{dF} = \vec{dF}_{y+dy} + \vec{dF}_y$$

$$= \eta\, dS \left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_y \right) \vec{u}_x$$

$$= \eta\, dS\, dy \cdot \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_y \vec{u}_x$$

$$= \eta \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_y d\tau\, \vec{u}_x$$

Si on considère les axes (Ox) et (Oz) : $\boxed{\vec{dF} = \eta\left(\vec{\Delta}\vec{v}\right) d\tau}$ pour un fluide newtonien

I.C.1 En appliquant le PFD : $\dfrac{D\vec{p}}{Dt} = \Sigma\, \vec{dF}$

$$\Leftrightarrow \mu\, d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right) = \mu \vec{g}\, d\tau + \eta \vec{\Delta}\vec{v}\, d\tau - \overrightarrow{\text{grad}}\, p\, d\tau$$

si l'écoulement est incompressible.

D'où pour un fluide newtonien écoulement incompressible :

$$\boxed{\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right)=-\overrightarrow{grad}\,p+\mu\vec{g}+\eta\vec{\Delta}\vec{v}}$$

I.C.2) Sur $\vec{u}_x$: $\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+\underbrace{v_x.\frac{\partial}{\partial x}v_x(y,t)}_{=0}\right)=-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0\ p\text{ ne dépend pas de }x.}+0+\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$.

D'où : $\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\text{ où }\nu=\frac{\eta}{\mu}}$ en $m^2.s^{-1}$

I.D . La diffusion augmente le désordre du système isolé (en le rendant plus homogène), le manque d'information augmente donc son entropie $\Rightarrow$ <u>évolution irréversible</u>

. Exemples d'équations "réversibles" : * D'Alembert $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$

* OH : $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\omega_0^2 x=0$

. On reconnait une évolution réversible si remplaçant t par "$-t$" celle-ci reste inchangée.

I.E Etude en ODG : $\frac{\partial v}{\partial t}\sim\frac{v}{\tau}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sim\frac{v}{L_y^2}$ d'où : $\frac{v}{\tau}\sim\nu\frac{v}{L_y^2}$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{L_y\sim\sqrt{\nu\tau}}$$

II ODG de δ

D'après la formule précédente : $\delta\sim\sqrt{\nu\tau}$
$\sim\sqrt{\nu.\frac{x_0}{U}}$

Or $Re=\frac{\mu U x_0}{\eta}=\frac{U x_0}{\nu}$ d'où $\delta=\sqrt{\frac{x_0}{Re}.x_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\delta}{x_0}=\sqrt{\frac{1}{Re_{x_0}}}}$

* D'où $\delta/x_0\ll 10^{-2}\Leftrightarrow\boxed{Re_{x_0}\gg 10^4}$

III) Poiseuille plan

III.A.1)

a) Cette fois le champ de pression dépend de x, y d'où en régime stationnaire :

$$\begin{cases} 0 = +\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - g \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = +\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -g \end{cases}}$$

b) On a $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Leftrightarrow F(x) = G(y)$ par conséquent les 2 fonctions sont égales à une constante d'où : $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x} = K}$

c) Donc $\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = K \Leftrightarrow v = \dfrac{K}{\eta}\dfrac{y^2}{2} + \alpha y + \beta$.

or $v(-d/2) = v(d/2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{K}{\eta}\dfrac{d^2}{8} + \alpha \dfrac{d}{2} + \beta = 0 \\ \dfrac{K}{\eta}\dfrac{d^2}{8} - \alpha \dfrac{d}{2} + \beta = 0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{K}{\eta} d^2/8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v_x}(y) = \dfrac{K d^2}{8\eta}\left(1 - \dfrac{4y^2}{d^2}\right)\vec{u}_x}$ profil parabolique.

III.A.2)

Soit $\Delta p = -KL$ d'où : $D_v = \iint_{section} \vec{v} \cdot \vec{dS}$

$$\Leftrightarrow D_v = -\frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{d^2}{8\eta} \int_{-d/2}^{d/2}\int_0^h \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right) dy\,dz$$

$$\Leftrightarrow D_v = -\frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{d^2}{8\eta} \cdot h \cdot \left[y - \frac{4}{3}\frac{y^3}{d^2}\right]_{-d/2}^{d/2} = -\frac{\Delta p \cdot d^2 h}{8\eta L}\left[d - \frac{4}{3d^2}\frac{d^3}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{D_v = -\frac{\Delta p}{L}\frac{d^3 h}{12\eta}}$$ Cette loi rappelle la loi d'Ohm $i = \dfrac{U}{R}$ d'où $\boxed{R_h = \dfrac{12 L\eta}{d^3 h}}$

III.A.3) . Si $\Delta p_2 = \dfrac{\Delta p_1}{2}$ alors $D_{V_2} = \dfrac{D_{V_1}}{8}$

. Pour deux tubes identiques d'épaisseur $d/2$ alors $D_V = \dfrac{D_{V_1}}{4}$

. Alors que pour une résistance électrique : $R_e = \dfrac{\ell}{\gamma h d} \Rightarrow D_V = D_{V_1}$.

. Conclusion : Pour un écoulement les diminutions de section réduisent considérablement le débit.

III.B) On atteint le régime parabolique lorsque $\delta = d/2$ d'où en utilisant le résultat de la question II :

$$\frac{\delta}{x_1} = \sqrt{\frac{1}{R_e}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{d/2} = \sqrt{R_e} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x_1}{d} = \frac{1}{2}\sqrt{R_e}}$$

IV Equation du mouvement dans la couche limite

IV.A) L'écoulement est incompressible d'où $\dfrac{D\mu}{Dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0}$$

IV.B) On est en régime stationnaire d'où :

$$\boxed{\begin{cases} \mu\left(v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x . \\ \mu\left(v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \mu g + \eta \Delta v_y \end{cases}}$$

IV.C.1) En ODG : $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ s'écrit : $\dfrac{V_x}{x_0} + \dfrac{V_y}{\delta} \sim 0$

donc : $\dfrac{v_y}{v_x} + \dfrac{\delta}{x_0} \sim 0$ d'où : $\boxed{\dfrac{v_y}{v_x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{R_{e_{x_0}}}}}$ or $R_{e_{x_0}} \gg 1 \Rightarrow \dfrac{v_y}{v_x} \ll 1$

IV.C.2 Toujours en ODG :

- $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \dfrac{v_x}{\delta^2}$, $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \dfrac{v_x}{x_0^2}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big/ \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \dfrac{x_0^2}{\delta^2} = Re_{x_0} \gg 1$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} \quad (1)$$

- De même : $\boxed{\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}$

IV.C.3 • Soit $v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \sim v_y . \dfrac{v_x}{\delta}$ or $\dfrac{\delta}{x_0} \sim \dfrac{v_y}{v_x}$ (IV.C.1)

d'où : $v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

- Et, $v_x . \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$ $\Rightarrow \boxed{v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq v_x . \dfrac{\partial v_x}{\partial x}}$

- Et : $\nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \nu \dfrac{v_x}{\delta^2} \sim \nu . \dfrac{Re_{x_0}}{x_0^2} . v_x .$

or $Re_{x_0} = \dfrac{v_x . x_0}{\nu}$ $\Rightarrow \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

D'où : $\boxed{v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \simeq \nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$

IV.C.4 D'où les équations
$$\begin{cases} \mu\left(v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) \overset{(1)}{=} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\mu g \text{ car on néglige les dérivées partielles de } v_y. \end{cases}$$

IV.D Hors de la couche limite on retrouve l'équation d'Euler stationnaire avec $\nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$ d'où $v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \simeq v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq 0$ (IV.C.4)

$\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ en dehors de la couche limite.

D'après l'énoncé on a donc $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ dans la couche limite d'où :

$$\boxed{v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{où } \nu = \eta/\mu}$$

Partie B – Toboggan (CCP-TSI-2025)

Q1) Or $W_{\vec{P}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{OM} = \int_{z_A}^{z_B} -mg\,dz = -mg(z_B - z_A)$

$\Rightarrow \boxed{W_{\vec{P}} = mg[H-h]}$

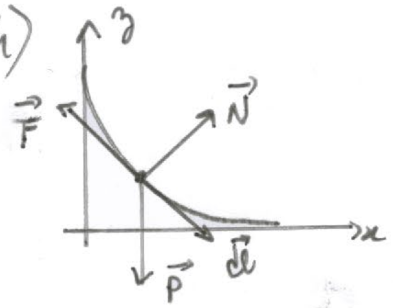
Q2) Théorème de l'Ec : $\Delta E_c = W_{\vec{F},ext}$

Sans frottement : $\Delta E_c = mg(H-h)$

$\Rightarrow v_B^2 = 2g(H-h)$ d'où $v_B = \sqrt{2g(H-h)}$

Q3) A.N : $v_B = 20$ m/s

Q4)



Q5) Soit $W_{\vec{F}} + W_{\vec{P}} = \Delta E_c \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mg(H-h) + W_{\vec{F}}$

$\Leftrightarrow \boxed{W_{\vec{F}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg(H-h)} = -4\,500$ J

Q6) Or $W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = -FL$ si $F =$ cste

Q7) $\Rightarrow \boxed{F = -\frac{W_{\vec{F}}}{L}} = -\left(\frac{-7500}{37,5}\right) = 200$ N

Q8) À la sorti du toboggan : $m\vec{a} = \vec{P}$ donc $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_B t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

Donc $\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_B^2}x^2} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{2v_B^2 h/g}} = 4,5$ m

Q9) Sur Ox : $F_x = -kv_x$ ($\vec{P}$ et $\vec{\Pi}$ sont sur $\vec{u_z}$) donc $\boxed{\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m}v_x = 0}$

Q10) On pose $\boxed{\frac{m}{k} = \tau}$ $\Rightarrow \dot{v}_x + v_x/\tau = 0$

Q11) Si $v_x(0) = 0$ alors $\boxed{v_x(t) = v_B e^{-t/\tau}}$

Q12) Pour $t = \tau$, $v_x(\tau) = \frac{v_B}{e} \sim 0{,}37 v_B$. Par lecture graphique : $\underline{\tau = 0{,}25\,s}$

donc $\boxed{k = m/\tau} = \frac{50}{0{,}25} = \underline{200\ kg.s^{-1}}$

Q13) On intègre $v_x(t)$: $x(t) = -\tau V_B e^{-t/\tau} + cste$

Si $x(0) = 0$ alors $x(t) = V_B \tau (1 - e^{-t/\tau})$

Donc M s'arrête si $t \to \infty$ pour $x(\infty) = d' = v_B \tau = 2{,}5\,m$

À partir de B il aura parcouru $D = d + d' = 7\,m$. On peut choisir une distance de sécurité de 10m par exemple.

Q14) Fluide parfait et écoulement incompressible, stationnaire (parfait) pour un fluide homogène le long d'une ldc : $\frac{P}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2} = cste$

Q15) Ecoulement stationnaire et incompressible : $D_v = Sv = cste$

or $S = cste \Rightarrow v = cste$ donc $\boxed{v_D = v_F}$

Q16) Soit $v = \frac{D_v}{S} = \frac{3{,}6.10^4.10^{-3}}{3600 \times 5 \times 10^{-3}} = \underline{2\,ms^{-1}}$

Q17) Bernoulli entre D et F : $\frac{v^2}{2} + gz_F + \frac{P_F}{\mu} = \frac{v^2}{2} + gz_D + \frac{P_D}{\mu} \Rightarrow \boxed{P_F = P_D - \rho g L_2}$

$\underline{= 3{,}0\,bar}$

Q18) En théorie $P_D = 5{,}5\,bar$

À cause des pertes : $P_D = 5{,}2\,bar$ donc $\frac{\Delta P_{bc}}{L_1} = \frac{0{,}3}{30} = 0{,}01\,bar/m$

donc $\Delta P_{EF} = 0{,}01 \times L_1 = 0{,}25\,bar$

Donc $P_F' = P_F - \Delta P_{bc} - \Delta P_{EF} = 3 - 0{,}3 - 0{,}25 = \underline{2{,}45\,bar}$

Q19) Analyse dimensionnelle

- $[D_v][P] = m^3/s \cdot Pa$
$= m^3/s \cdot \frac{N}{m^2}$ car $dF = p\,dS$
$= m/s \cdot N$
$= m/s \cdot \frac{J}{m}$ car $\delta W = \vec{F}\cdot\vec{dl}$
$= J/s$
$= \underline{Watt}$

Q20) A l'aide d'un bilan d'énergie mécanique entre C et S :

$$D_m\left[\frac{v^2}{2} + gz\right]_C^S = P_{pression} + P_{autre}$$

$$\Leftrightarrow D_m\left[\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right]_C^S = P_{autre} = P_u - P_{pertes}.$$

Donc $P_u = D_m\left[\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right]_C^S + \underbrace{P_{pertes}}_{= D_v \Delta p_{pertes}}$

Donc $P_u = D_v\left[\rho\frac{v^2}{2} - \rho\frac{v^2}{2} + (\rho g L_2 - p) + p_0 - p_0 + \Delta p_{pertes}\right]$

$$\Leftrightarrow \underline{P_u = D_v\left[\rho g(L_2 - p) + \Delta p_{pertes}\right]}$$

Q21) A.N : $P_u = \frac{3{,}6\cdot 10^1}{3600}\left(1000 \times 10 \times 24 + 2\cdot 10^5\right) = \underline{4{,}4\text{ kW}}$

Q22) Soit $P_{élec} = \frac{P_u}{\eta} = \underline{7{,}3\text{ kW}}$

Q23) Soit $HMT = \frac{P_u}{\rho D_v g} = \frac{4{,}4\cdot 10^3}{1000 \times 10 \times 0{,}01} = \underline{44\text{ mCE}}$

Q24) Pour $D_v = 36\,m^3/h$ et $HMT = 44$ mCE la pompe diamètre 180mm correspond parfaitement sur la position de son pt de fonctionnement.

Q25) Sur le graphe le rendement est de 60%, alors que le meilleur rendement est de 78,1%
↳ ce n'est pas un rendement optimal

Q26) . PP appliqué

$\Delta U = W + Q$ où $W = 0$ et $Q = P\Delta t$

$\Rightarrow \rho V_{cuve}(\theta_f - \theta_i) = P\Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \dfrac{\rho V_{cuve}(\theta_f-\theta_i)}{P} = 50400\,s = \underline{14\,h}$

Q27) . $2C_4H_{10} + 13O_2 = 8CO_2 + 10H_2O$

Q28) Soit $P = D_m \cdot PC \Leftrightarrow \boxed{D_m = \dfrac{P}{PC}} = \underline{2\,g/s} = \underline{120\,g/min}$

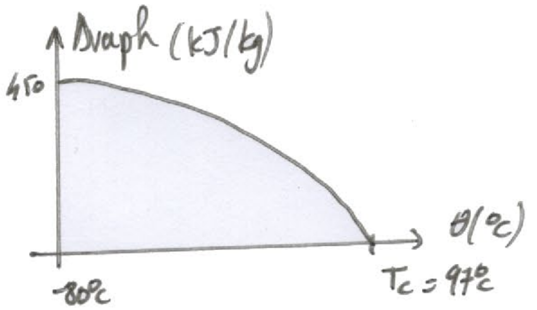
Q29) D'après l'équation le débit molaire est t.q : $D_n(C_4H_{10}) = \dfrac{D_n(CO_2)}{4}$ molls

$\Rightarrow \boxed{D_m(CO_2) = 4\,D_m(C_4H_{10}) \cdot \dfrac{M(CO_2)}{M(C_4H_{10})}}$ kg/s

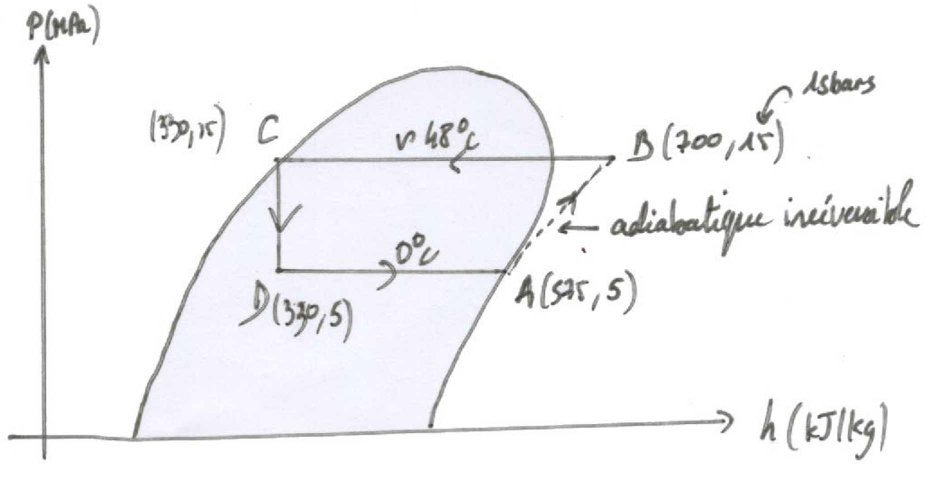
$= \underline{350\,g/min}$

Q30) D'après le document à $\underline{0°C}$: $\Delta vap\,h = 580 - 200 = \underline{380\,kJ/kg}$

Q31) D'après le graphe jusqu'au point critique on remarque :



Q32)



Q33) En D on a un mélange liquide-vapeur où on lit $\underline{x_g = 0,33}$

Q34) PPI : $W_{AB} + q_{AB} = h_B - h_A$

adiabatique $\Rightarrow$ $W_{AB} = h_B - h_A = 125\,kJ.kg^{-1}$

Q35) De même $q_{cond} = h_C - h_B = -370\,kJ/kg$

Q36) Par définition : $\mathcal{E} = -\dfrac{q_{cond}}{W_{AB}} = -\dfrac{370}{125} \simeq 3,0 = \mathcal{E}$

Q37) Soit $P = D_m |q_{cond}| \Rightarrow D_m = \dfrac{P}{|q_{cond}|} = \dfrac{100.10^3}{370.10^3} \simeq 0,3\,kg/s$

Q38) Soit $P_u = \dfrac{P}{\mathcal{E}} = 33\,kW$

Q39) C'est un ALI monté en inverseur : $\Rightarrow u_1 = -\dfrac{R_{Pt}}{R_1} E = -\dfrac{R_0}{R_1}(1 + a\theta)E = U_1$

Q40) Il faut que $u_1 < V_{sat}$

- $i_{sortie} < i_{sat}$
- fréquence pas très élevée (slew-rate à éviter)

Q41) $s = \left|\dfrac{dU_1}{d\theta}\right| = \left|-\dfrac{R_0}{R_1} a E\right| = \dfrac{R_0 a}{R_1} E = s$

Q42) $\Rightarrow s = 3,85.10^{-3}\,V/°C$

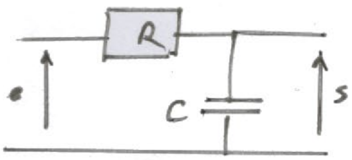
Q43) La température va peu varier $\theta_f - \theta_i = 6°C \Rightarrow \Delta u_1 = 20\,mV$

c'est trop faible pour avoir un relevé précis

Q44) C'est le graphe 2 avec un pic à 0Hz et un à 50Hz.

$\hookrightarrow$ 1 n'a pas la composante continue
3 a trop de composantes
4 ce n'est pas un spectre

Q45)



En BF : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \to +\infty$ d'où $s = e$

En HF : $\underline{Z}_C \to 0$ d'où $s = 0$

C'est bien un passe-bas.

Q46) H_0 : gain statique or ici $\underline{H} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \boxed{H_0 = 1}$

Q47) Or $G_{dB} = 20 \log \underline{H}$ où $\underline{H}_{BF} = 1$

↳ $\boxed{G_{dB} = 0 \text{ à BF}}$

Q48) La fréquence de coupure à $-3dB$ est t.q $\underline{H}(f_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

ou $G_{dB}(f_c) = G_{max} - 3dB$

Ici $\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$

Q49) Si $f_c = 0{,}5\,Hz$ alors $u_s = \sum_i H(f_i)\, u_e(f_i) = \underbrace{H(50) \times 3\cos(2\pi 50 t)}_{\sim 0} + H_0 \times 2$

$\Rightarrow \boxed{u_s \sim 2V}$

↳ On récupère bien la composante continue débarassée des parasites.