

# Physique : DS5 – Savoir Faire

Les schémas (donnés ou non) devront être (re)tracés sur vos copies avec soin. Les schémas auront des points attirés pour chaque question. Il faut savoir être **rapide, précis et propre**.

## I) Force et centre de poussée (/4)

Calculer la force exercée par un fluide sur une paroi plane dans le cas d'une séparation eau/air. En déduire le centre de poussée. (On placera l'origine au sommet de la paroi).

La définition de la force de pression nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{F}_{eau \rightarrow air} = \iint_{M \in S} (P_a + \rho g h) dS \vec{u}_x \\ \vec{F}_{air \rightarrow eau} = \iint_{M \in S} -P_a dS \vec{u}_x \end{cases}$$

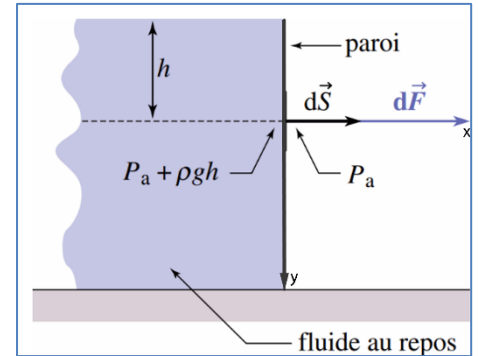
D'où la force totale subie par la paroi plane :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \iint_{M \in S} \rho g h dS \vec{u}_x = \int_0^H \rho g h L dh \vec{u}_x \\ \vec{F} &= \frac{1}{2} \rho g L H^2 \vec{u}_x \text{ où } \begin{cases} L = \text{largeur de la paroi} \\ H = \text{hauteur de la paroi} \end{cases} \end{aligned}$$

Le centre de poussée C est le point d'application de la force que l'on peut définir ainsi :

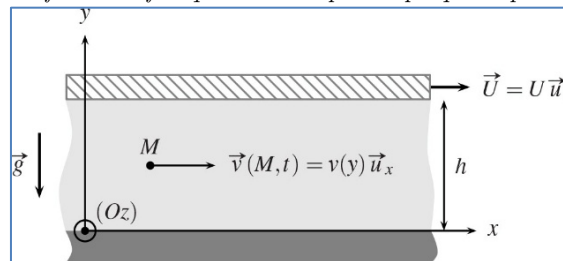
$$\begin{aligned} \vec{OC} \wedge \vec{F} &= \int_0^H d\vec{M}_0(M) \\ \Rightarrow h_c \vec{u}_y \wedge \frac{1}{2} \rho g L H^2 \vec{u}_x &= \int_0^H \vec{OM} \wedge d\vec{F} = \int_0^H h \vec{u}_y \wedge \rho g h L dh \vec{u}_x = \int_0^H \rho g h^2 L dh (-\vec{u}_z) \\ &\Rightarrow h_c \cdot \frac{1}{2} \rho g L H^2 = \frac{1}{3} \rho g H^3 L \\ &\Rightarrow h_c = \frac{2}{3} H \end{aligned}$$

Le point d'application de la force de poussée se situe au  $\frac{2}{3}$  de la hauteur ( $\frac{1}{3}$  en partant du sol). En effet la force élémentaire augmente avec la profondeur, il est donc normal d'avoir le centre de poussée en dessous de  $\frac{H}{2}$ .



## II) Couette plan (/4)

Après avoir rappelé les hypothèses d'un écoulement de Couette plan, retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Couette plan. Puis calculer la force surfacique exercée par la plaque supérieure sur le fluide.



Le système étudié est invariant par translation selon  $(Oz)$ . Une plaque entraînée à la vitesse  $\vec{U} = U \vec{u}_x$  entraîne une couche de fluide, d'épaisseur uniforme  $h$ . Aucune force n'est appliquée au fluide, qui est seulement soumis à l'action de la pesanteur et de la plaque. On se place en régime stationnaire. On cherche une solution de l'équation de Navier-Stokes sous la forme :  $\vec{v} = v(x, y, t) \vec{u}_x$ .

$$\begin{cases} \text{Écoulement incompressible : } \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = v_x(y) \\ \text{Écoulement stationnaire : } \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

L'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

se simplifie en :

$$\Rightarrow \mu v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{u}_x = -\mu g \vec{u}_y - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} & (1) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g & (2) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p = p(x, y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_x = -\mu g \Rightarrow p(x, y) = -\mu g y + f(x)$$

Or le système présente une invariance par translation selon (Ox) :

$$\Rightarrow p(y) = -\mu g y + \text{cste} \Rightarrow p(y) = -\mu g y + p(0)$$

Donc (1) se résout :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v_x = Ay + B$$

Le fluide étant visqueux (réel) :

$$\begin{cases} v_x(0) = 0 = B \\ v_x(h) = Ah + B = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{U}{h} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{U}{h} y \vec{u}_x$$

D'où la force exercée par le fluide sur la plaque :

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_x = -\frac{\eta S U}{h} \vec{u}_x$$

### III) Poiseuille (/6)

Après avoir rappelé les hypothèses d'un écoulement de Poiseuille, retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Poiseuille cylindrique. En déduire la loi de Hagen-Poiseuille.



L'écoulement de Poiseuille correspond à l'écoulement d'un fluide réel à l'intérieur d'une conduite cylindrique de rayon R. L'axe de symétrie de révolution de la conduite est (Oz). Pour forcer le liquide à s'écouler, un opérateur impose :

$$\begin{cases} p_e = p(0) \\ p_s = p(L) < p_e \end{cases} \text{ avec } \Delta p = p_e - p_s > 0$$

Hypothèses :

$$\begin{cases} \text{Écoulement incompressible} \\ \text{Écoulement stationnaire} \\ \text{pesanteur négligée} \\ \vec{v}(M, t) = v(r) \vec{u}_x \Rightarrow \Delta v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \end{cases}$$

L'équation de NS se simplifie en :

$$\mu v_x \frac{\partial v(r)}{\partial x} \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \vec{u}_x \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \text{ et } 0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \end{cases}$$

Donc p ne dépend que de x et v dépend que de r donc :

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dv_x}{dr} \right) \Leftrightarrow F(x) = G(r)$$

Comme x et r sont deux variables indépendantes, chacune de ces deux fonctions est nécessairement égale à une constante, indépendante de r et de x, que nous notons K :

$$\frac{dp}{dx} = K \Rightarrow p(x) = Kx + B$$

$$\text{Or : } \begin{cases} p(0) = p_e \\ p(L) = p_s \end{cases} \Rightarrow p(x) = \frac{p_s - p_e}{L} x + p_e$$

D'où :

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dv_x}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{L} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dv_x}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta L} r$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r \frac{dv_x}{dr} &= -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + C \\ \Rightarrow \frac{dv_x}{dr} &= -\frac{\Delta p}{4\eta L} r + \frac{C}{r} \\ \Leftrightarrow v_x &= -\frac{\Delta p}{8\eta L} r^2 + C \ln(r) + D \end{aligned}$$

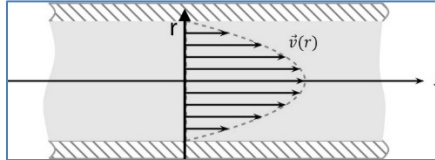
Or  $\ln(r)$  diverge en  $r=0$  donc  $C=0$  d'où :

$$v_x = -\frac{\Delta p}{8\eta L} r^2 + D$$

Les parois étant immobiles :

$$v(R) = 0 \Rightarrow v_x = -\frac{\Delta p}{8\eta L} (r^2 - R^2) \Rightarrow \vec{v}(r) = \frac{\Delta p}{8\eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_x$$

Le profil des vitesses est le suivant :



Pour retrouver la loi de Hagen-Poiseuille, calculons le débit volumique du fluide dans l'écoulement de Poiseuille :

$$\begin{aligned} D_v &= \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\Delta p}{8\eta L} (R^2 - r^2) \cdot \underbrace{r dr d\theta}_{\text{couronne cylindrique}} \\ \Leftrightarrow D_v &= \frac{\Delta p}{8\eta L} 2\pi \left( R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\Delta p}{8\eta L} \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

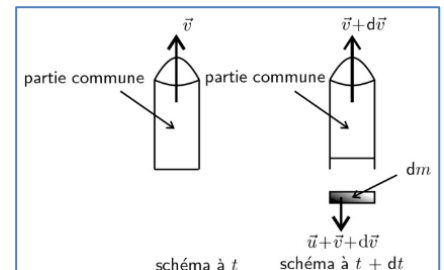
On fait l'analogie avec la loi d'ohm en électrocinétique :

$$I = \frac{U}{R} \Leftrightarrow D_v = \frac{\Delta p}{R_h} \text{ où } R_h = \text{résistance hydraulique} \Rightarrow D_v = \frac{\Delta p}{R_h} = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p \text{ où } R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

#### IV) Fusée (/6)

Dans le cas d'un système type fusée, démontrer que la force d'éjection des gaz peut s'écrire :  $-D_m \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la vitesse des gaz par rapport à la fusée.

On va effectuer un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé formé de la fusée (carénage) et de ses gaz. Cependant, ici le système est non stationnaire car il n'y a pas d'entrée de gaz. (Ici on simplifie le calcul en ne tenant pas compte dans le système des gaz échappés à  $t$  que l'on retrouvera à  $t+dt$ ).



$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = [m_f + m_g(t)] \vec{v}(t) \\ \vec{p}_{\Sigma_f}(t + dt) = [m_f + m_g(t + dt)] \vec{v}(t + dt) + dm(\vec{u} + \vec{v}(t + dt)) \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{p}_{\Sigma_f}(t + dt) - \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = [m_f + m_g(t) - D_m dt](\vec{v} + d\vec{v}) + D_m dt(\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v}) - [m_f + m_g(t)] \vec{v} \\ \Rightarrow \vec{p}_{\Sigma_f}(t + dt) - \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = (m_f + m_g(t)) d\vec{v} + D_m dt \vec{u} \\ \Rightarrow \frac{D\vec{p}}{Dt} = (m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u} = \vec{F}_{ext} = [m_f + m_g(t)] \vec{g} \end{aligned}$$

Que l'on réécrit sous la forme suivante :

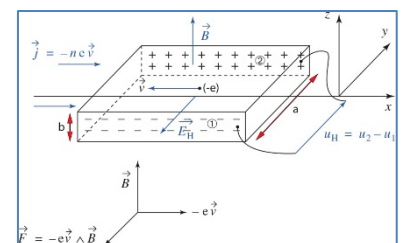
$$(m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} = -D_m \vec{u} + [m_f + m_g(t)] \vec{g}$$

Ainsi on peut interpréter ce résultat au PFD appliqué au système fermé de masse  $m_f + m_g(t)$  (ici variable) soumis aux forces de pesanteur et de poussée :  $-D_m \vec{u}$

#### V) Montrer que le champ de Hall dans un ruban à effet Hall de section rectangulaire vaut $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ (/4)

L'effet Hall a été découvert par Edwin Herbert Hall (1855-1938) en 1879, lors de sa thèse de doctorat. On étudie ici le modèle classique qui permet d'expliquer cet effet. On considère un ruban conducteur, de section rectangulaire de largeur  $a$  et d'épaisseur  $b$  (dans la direction perpendiculaire au schéma). Un courant d'intensité  $I$  le parcourt et on soumet l'ensemble à un champ magnétique perpendiculaire au ruban.

On suppose que les porteurs de charges sont des électrons : ils sont animés d'un mouvement rectiligne de vitesse  $\vec{v}$  dans le sens opposé à  $I$  par définition du sens



conventionnel du courant.

Quand on applique le champ magnétique, les électrons subissent la force d'origine magnétique qui dévie leur trajectoire. Les électrons ont donc tendance à s'accumuler sur la face 1 de la plaque de métal créant une accumulation de charges négatives de ce côté et une accumulation de charges positives de l'autre. Il y a apparition d'un champ électrique  $\vec{E}_H$  liée à ce déséquilibre.

Les électrons subissent alors l'action conjuguée de deux forces :

- L'une magnétique :  $\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$
- L'autre électrique :  $\vec{F}_H = -e \vec{E}_H$

Tant que le module de  $F_H$  est inférieur au module  $F_m$ , la force résultante est dans le sens de la force magnétique et les électrons sont toujours déviés dans le même sens que précédemment ce qui va donc augmenter  $E_H$ . Le système va donc tendre vers un régime permanent tel que :  $\vec{F}_m + \vec{F}_H + \vec{F}_0 + \vec{F}_v = \vec{0}$

Ainsi sur (Oy) on obtient :  $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

VI) Calculer le champ  $\vec{E}$  puis le potentiel  $V$  créé en tout point de l'espace par un fil rectiligne chargé uniformément. (/6)

La distribution de charges, source du champ électrostatique est un fil infini chargé uniformément. On note  $\lambda$  la densité linéique de charge.

- Choix d'un repérage adapté

Ici le repérage cylindrique est le mieux adapté à la situation.

Les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace sont (r,  $\theta$ , z)

- Étude des symétries et des antisymétries

Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie pour la distribution de charges, donc le champ électrique en M s'écrit :  $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$

- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et translation selon (Oz), donc le champ électrique ne dépend que de r en valeur :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

De même le potentiel V ne dépend que de r,  $V(M) = V(r)$ .

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

On construit la surface de Gauss en limitant le cylindre d'axe (Oz) à un tronçon de hauteur h, sa surface latérale  $\Sigma_{lat}$  réunie avec les deux surfaces transversales  $\Sigma_{tran}$  qui sont les disques de rayon r d'axe (Oz) constituent une surface fermée, qui convient comme surface de Gauss  $\Sigma$ . Le flux de  $\vec{E}$  sortant des surface transversales est nul puisque leur normale est selon  $\vec{u}_z$ ; et le champ est partout radial.

Le théorème de Gauss mène à :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r + \iint_{\Sigma_{tran}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow \vec{E}(M) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \end{aligned}$$

- Calcul du potentiel électrostatique

On calcule le potentiel électrostatique V(r) en intégrant :

$dV = -E dr \Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + K$  K est la constante d'intégration. Finalement :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ avec } V(r_0) = 0$$

