

Physique : DS3 – Savoir Faire

Les schémas (donnés ou non) devront être (re)tracés sur vos copies avec soin. Les schémas auront des points attribués pour chaque question. Il faut savoir être **rapide, précis et propre**.

- a) Démontrez l'expression du rendement d'un moteur ditherme de Carnot puis les efficacités d'une pompe à chaleur ou d'un réfrigérateur fonctionnant suivant un cycle de Carnot.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Définitions : } r = -\frac{W}{Q_c}, \quad e_{fr} = \frac{Q_f}{W} \text{ et } e_{PAC} = -\frac{Q_c}{W} = \left(\frac{1}{r}\right) \\ \text{Premier principe sur un cycle : } \Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \\ \text{Second principe sur un cycle pour la réversibilité : } \Delta S = S_{ech} = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \end{array} \right.$$

(On a supposé les températures de contact avec les sources constantes)

$$\Rightarrow r = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \stackrel{2PP}{=} 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{T_c - T_f}{T_c} \text{ avec } 0 < r < 1 \text{ d'où } e_{PAC} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

$$\text{Pour le réfrigérateur : } e_{fr} = \frac{Q_f}{W} = -\frac{Q_f}{Q_f + Q_c} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} = \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

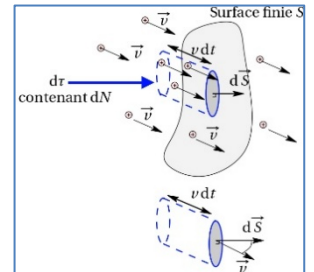
Dans les sujets de concours on appelle aussi ces rendements (efficacités) de Carnot, rendement maximal ou rendement réversible.

- b) Montrer que le vecteur densité de courant de particules en un point M de l'espace vérifie : $\vec{j}_n(M, t) = n(M, t)\vec{v}(M, t)$.

Exprimons le nombre de particules $\delta^3 N$ traversant la surface $d\vec{S}$ entre l'instant t et l'instant $t + dt$: ces $\delta^3 N$ particules sont contenues dans le cylindre dont les génératrices sont parallèles à $\vec{v}$ et de longueur $\vec{v}dt$.

Ce cylindre a pour volume : $d\tau = v dt dS \cos\theta = \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \Rightarrow \delta^3 N = n \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$

$$\Rightarrow d\phi_n = \frac{\delta^3 N}{dt} = n \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j}_n \cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{j}_n(M, t) = n(M, t) \vec{v}(M, t)$$



- c) Démontrer l'équation de la diffusion de particules en 3D à l'aide d'un bilan global de particules.

Soit $N(t)$ le nombre de particules dans le volume V délimité par S à la date t :

$$N(t) = \iiint_V n(M, t) d\tau$$

Et à $t + dt$: $N(t + dt) = \iiint_V n(M, t + dt) d\tau$ d'où :

$$dN = \iiint_V (n(M, t + dt) - n(M, t)) d\tau \Rightarrow dN \sim \iiint_V \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} dt d\tau$$

Par sa frontière le volume $d\tau$ reçoit de l'extérieur :

$$\delta N_{ech} = - \oint_S \vec{j}_n \cdot d\vec{S}_{ext} dt$$

Si on tient compte d'un terme de création :

$$\delta N_c = \iiint_V \alpha d\tau dt$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradski :

$$dN = - \iiint_V \text{div}(\vec{j}_n) d\tau dt + \iiint_V \alpha d\tau dt$$

Le bilan de particules devient donc :

$$\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} dt d\tau = \iiint_V (\alpha - \text{div}(\vec{j}_n)) d\tau dt \Leftrightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_n) - \alpha \right) dt d\tau = 0$$

Cette égalité est vraie pour tout volume V , par conséquent :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_n) = \alpha$$

Avec la loi de Fick $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(M, t)$ on peut écrire :

$$\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t) + \alpha(M, t) \Rightarrow \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t) \text{ en absence de termes de sources.}$$

- d) Démontrez l'équation de la chaleur à une dimension dans le cas d'une symétrie sphérique.

Bilan thermique appliqué au volume compris entre deux sphères $S(r)$ et $S(r+dr)$:

$$dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c$$

$$\text{Or } \begin{cases} dU = \delta mc(T(r, t+dt) - T(r, t)) = \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt \\ \delta Q_{\text{éch}} = (\phi_{th}(r, t) - \phi_{th}(r+dr, t))dt = -\frac{\partial \phi_{th}(r, t)}{\partial r} dr dt \\ \delta Q_c = P_v d\tau dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial (j_{th}(r, t) S(r))}{\partial r} dr dt + P_v d\tau dt \quad \Delta \text{ Ne pas sortir } S(r) \text{ de la dérivée}$$

$$\Leftrightarrow \rho c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial (j_{th}(r, t) 4\pi r^2)}{\partial r} dr + P_v 4\pi r^2 dr \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{th}(r, t))}{\partial r} + P_v$$

Avec la loi de Fourier $\vec{j}_{th}(r, t) = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$ et en absence de sources on obtient :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = D_{th} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r}$$

- e) Établir l'expression de $T(x)$ en régime stationnaire (et en absence de termes de création). Retrouver l'expression de la résistance thermique en coordonnées cartésiennes. Faire l'analogie avec l'électricité dans le cas d'associations parallèle ou série.

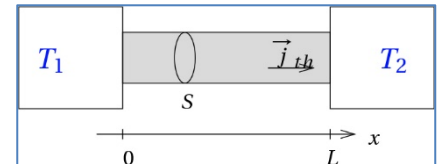
Considérons un cylindre d'axe Ox de section S et de longueur L, en contact avec deux thermostats de température T_1 et T_2 :

On se place en régime stationnaire ainsi :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

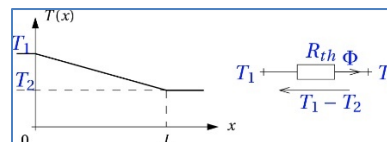
$$\text{Or : } \begin{cases} T(0) = T_1 \\ T(L) = T_2 \end{cases} \Rightarrow T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \\ \phi_{th} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{L} \end{cases}$$

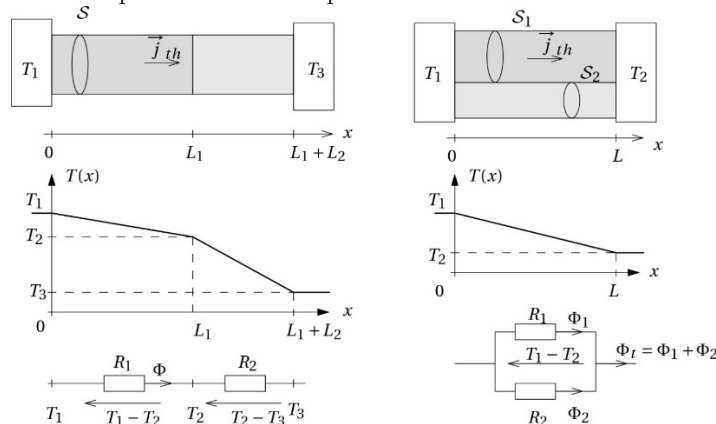


On peut réécrire ce résultat sous la forme : $T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2}$ où $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

Ce résultat est analogue à la loi d'Ohm rencontrée en électrocinétique : $V_1 - V_2 = R_{elec} i_{1 \rightarrow 2}$ où $R_{elec} = \frac{L}{\sigma S}$



On va retrouver les mêmes lois d'association qu'en électrocinétique :



- Association en série (à gauche) : (Les températures « externes » sont différentes comme les potentiels en électrocinétique)

$$T_1 - T_3 = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) \Leftrightarrow R_{th,s} \phi_{th} = R_{th,1} \phi_{th} + R_{th,2} \phi_{th} \Leftrightarrow R_{th,s} = R_{th,1} + R_{th,2}$$

- Association en parallèle (à droite) : (Les températures « externes » sont identiques comme les potentiels en électrocinétique)

$$\phi_{th,t} = \phi_{th,1} + \phi_{th,2} \Leftrightarrow \frac{T_1 - T_2}{R_{th,p}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th,2}} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{th,p}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$$