Physique : DS1 – Savoir Faire

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Les schémas (donnés ou non) devront être (re)tracés sur vos copies avec soin. Les schémas auront des points attitrés pour chaque question. Il faut savoir être **rapide, précis et propre**.

a) *Dans le cas d'un mouvement à forces centrales, démontrez l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite circulaire, puis elliptique. (5 pts)*

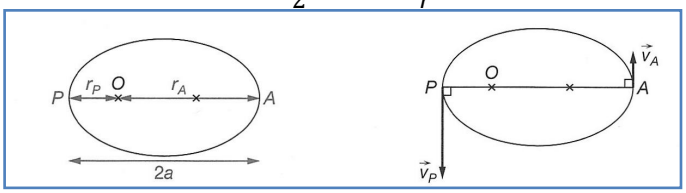
- Mouvement circulaire

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2}m\frac{Gm'}{r} - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2}\frac{|k|}{r} - \frac{|k|}{r} = -\frac{|k|}{2r}$

- Mouvement elliptique

Pour un point matériel en orbite elliptique autour d'une masse m' immobile en O, l'énergie mécanique Em, est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm'}{r}$$



En l'évaluant aux points d'approche et d'éloignement maximaux notés précédemment A et P, la vitesse se réécrit en ces points :

$$v = r\dot{\theta} = \frac{C}{r} \; aux\ points\ A\ et\ P\ (vitesse\ orthoradiale)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} - \frac{Gmm'}{r} \; aux\ points\ A\ et\ P \Rightarrow r^2 - \frac{1}{2}\frac{mC^2}{E_m} + \frac{Gmm'}{E_m}r = 0$$

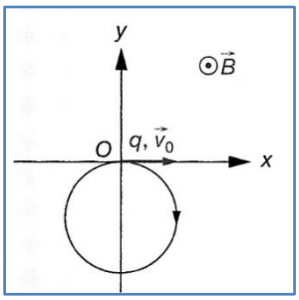
Il est clair par construction que cette équation possède exactement deux racines positives, $r_A\ et\ r_p$ tel que:

$$r = -\frac{1}{2}\frac{Gmm'}{E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow r_A + r_p = 2a = -\frac{Gmm'}{E_m}$$

D'où : $E_m = -\frac{|k|}{2a}$

b) *Montrez que la trajectoire d'une charge q dans un champ magnétostatique uniforme est un cercle si $\overrightarrow{v_0}$ est dans un plan orthogonal à $\vec{B}$. Une droite si $\overrightarrow{v_0}$ colinéaire à $\vec{B}$, une hélice dans un cas plus général. (7 pts)*

- Mouvement circulaire



Une particule de charge q et masse m placée dans un champ magnétique uniforme et statique $\vec{B} = B_o\overrightarrow{u_z}$. La particule est située initialement au point O et sa vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ est perpendiculaire au champ magnétique.

Le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P_e = 0$ montre que la norme de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m\vec{a} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient : $m\begin{vmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{vmatrix} = q\begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\ 0\\ B_0\end{vmatrix} = q\begin{vmatrix}B_0\dot{y}\\ -B_0\dot{x}\\ 0\end{vmatrix}$

Or $\ddot{z} = 0 \Rightarrow z = v_{0z}t + z_0 = 0 \Rightarrow$ la trajectoire est plane si $v_{oz} = 0$

L'intégration des projections sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ donne : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + C_1 \quad (1) \\ m\dot{y} = -qB_0x + C_2 \end{cases}$

Les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0\ et\ \dot{y}(0) = 0$ donnent : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + mv_0 \\ m\dot{y} = -qB_0x \end{cases}$

Donc (1) peut s'écrire : $\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{y} = -\frac{q^2B_0^2}{m^2}x \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\dot{x} = -\frac{q^2{B_0}^2}{m^2}y - \frac{qB_0}{m}v_0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases}$ où $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ *pulsation cyclotron si on suppose* $q > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) \\ y = A'\cos(\omega_c t) + B'\sin(\omega_c t) - \dfrac{v_0}{\omega_c} \end{cases} \text{ avec comme conditions initiales } \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \dfrac{v_0}{\omega_c} \\ y(0) = 0 \Rightarrow A' = \dfrac{v_0}{\omega_c} \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow B' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \\ y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

Si on pose $R = \frac{v_0}{\omega_c}$ on obtient :

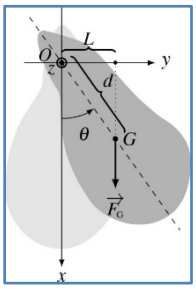
$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{(y+R)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+R)^2 = R^2$$

On retrouve bien l'équation d'un cercle de centre $(0, -R)$ et de rayon R si q>0.

- Mouvement rectiligne
  Si $\overrightarrow{v_0}$ colinéaire à $\vec{B}$, il n'y a pas de force initiale et donc pas de modification de $\overrightarrow{v_0}$ ...donc le mouvement sera rectiligne
- Mouvement hélicoïdal
  - Si $\overrightarrow{v_0}$ est quelconque il va se rajouter une composante sur z : $z = v_{0z}t + z_0$ ainsi le mouvement en plus d'être circulaire va monter, ce qui va former une trajectoire hélicoïdale de pas $h = v_{0z}T = v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega_c}$
    Les équations en x(t) et y(t) reste les mêmes à condition de remplacer v_0 par v_{0x}.

c) Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule pesant. (4pts)

Le solide est soumis à :



- L'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- Son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G tel que :

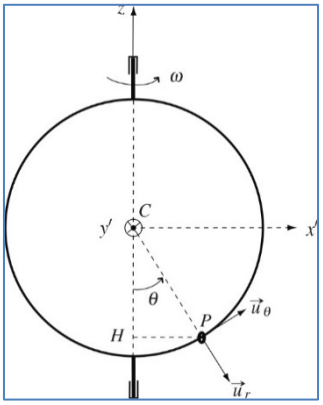
$$M_z = -mgd\sin\theta$$

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z\ddot{\theta} = M_z = -mgd\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd\sin\theta}{J_z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z}$$

d) Retrouver l'équation différentielle $\ddot{\theta} = f(\theta)$ *du mouvement d'une perle de masse m dans un cerceau en rotation uniforme par la méthode de votre choix. (5 pts) On notera a le rayon du cercle et on pourra poser :* $\omega_0^2 = \frac{g}{a}$.



Calculons les différentes énergies mises en jeu :

$$\begin{cases} E_c = \dfrac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \\ E_{pp} = -mga\cos\theta + cste \\ E_{pe} = -\dfrac{1}{2}m\omega^2(a\sin\theta)^2 + cste \end{cases}$$

Or : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\Rightarrow ma^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mga\dot{\theta}\sin\theta - m\omega^2\dot{\theta}\,a^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$ma^2\ddot{\theta} = -mga\sin(\theta) + m\omega^2 a^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\sin(\theta) + \omega^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin\theta\left(-\frac{g}{a} + \omega^2\cos\theta\right)$$