

Physique : DS15

X MPI 2025

Q01. On considère à ce stade une unique plaque chargée $+\sigma$ et située dans le plan (yOz) . Les plans (M, x, z) et (M, x, y) sont des plans de symétrie des charges, en conséquence $\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_x$. La distribution de charges étant invariante par translation selon les axes (Oy) et (Oz) , il vient $\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$. Par ailleurs (yOz) est un plan de symétrie de la distribution de charges ce qui assure $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$.

On applique alors un **théorème de Gauss** en considérant un cylindre droit d'axe (Ox) de section S symétrique par rapport au plan (yOz) :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{lat}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0} + \iint_{\text{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E(x)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

En conséquence :

$$\forall x > 0, \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \forall x < 0, \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

Il reste alors à appliquer un **théorème de superposition** pour les deux plans décalés et de charges opposées. On en déduit finalement :

$$\text{— à l'intérieur, } \boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x};$$

$$\text{— à l'extérieur, } \boxed{\vec{E} = 0}.$$

Q02. Lors d'un déplacement de x des électrons vers le haut, il apparaît sur la face supérieure de section S une charge $Q = -NeSx$. La charge surfacique vérifiant $Q = \sigma S$, il vient : $\boxed{\sigma = -Nex}$.

Q03. La translation étant globale, chaque électron se déplace de x quand la tranche se déplace elle-même de x . On applique alors le principe fondamental de la dynamique à un électron soumis à la force électrostatique :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -e \times \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Ne^2x}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Ne^2x}{m\varepsilon_0} = 0}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

Q04. Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution des charges, en conséquence $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r$. La distribution de charges étant invariante par rotation d'angle θ et φ , $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$. On applique alors le théorème de Gauss en considérant une sphère de rayon r intérieure à la distribution de charges :

$$E_r(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times 4\pi r^3/3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho \vec{OM}}{3\varepsilon_0}}$$

Q05. On note O le centre de la sphère chargée positivement et O_1 le centre de la sphère chargée négativement tel que $\vec{OO_1} = r\vec{u}_x$.

On applique alors le théorème de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{ions}} + \vec{E}_{e^-} = \frac{\rho \vec{OM}}{3\varepsilon_0} + \frac{-\rho \vec{O_1M}}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\vec{OM} - \vec{O_1M}) = \frac{\rho \vec{OO_1}}{3\varepsilon_0}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\vec{E} = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0}\vec{u}_x = \frac{Nex}{3\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

Q06. Par rapport à la question Q03, le champ électrique est divisé par un facteur 3, en conséquence :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_s^2x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_s^2 = \frac{\omega_p^2}{3}}$$

Q07. Au niveau de l'axe Ox , les électrons se concentrent sur une section S et une hauteur x pour une charge totale $-NeSx$ et donc une charge surfacique $\boxed{\sigma = -Nex}$.

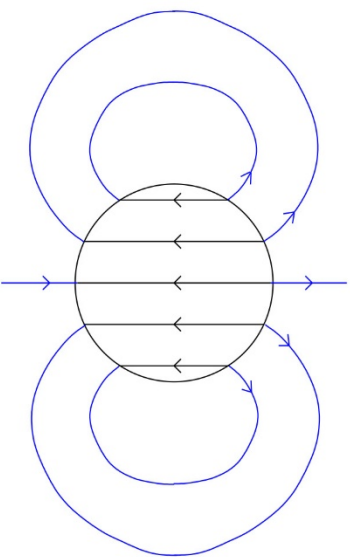
On applique la relation de passage juste au-dessus (2) et en-dessous (1) du point S :

$$\vec{E}_2 - \frac{Nex}{3\varepsilon_0}\vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x = -\frac{Nex}{\varepsilon_0}\vec{u}_x \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = -\frac{2Nex}{3\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

On note que le champ extérieur est non nul, contrairement au cas du modèle plan.

Q08. La distribution de charges est caractérisée par une charge totale nulle et la présence d'un pôle positif et d'un pôle négatif. Il s'agit donc d'une **distribution dipolaire**.

Q09. Au sein de la sphère le champ électrique est uniforme. À l'extérieur, le champ extérieur est celui d'une distribution dipolaire. Le tracé est réalisé pour $x < 0$.



Q10. L'approximation électrostatique nécessite que l'on puisse **négliger le temps de propagation du signal à l'échelle de la sphère vis à vis de la période d'oscillation des charges**, ainsi la modification de l'état des charges se répercute immédiatement

en tout point du milieu. Il vient avec λ la longueur d'onde associée à la fréquence d'oscillation et d_0 le diamètre de la sphère :

$$\frac{d_0}{c} \ll \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{2\pi f_p} = \frac{1}{f_p} = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \boxed{d_0 \ll \lambda}$$

On retrouve l'idée que la taille du système doit être très petite devant la longueur d'onde.

Q11. L'ultraviolet proche correspond à des longueurs d'onde légèrement inférieures à 400 nm, disons $\lambda = 300$ nm. On a bien $\lambda = 300$ nm $\gg d_0 = 20$ nm. L'approximation est légitime.

Q12. On commence par considérer un unique cylindre de charge volumique uniforme ρ et d'axe (Oz) . Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(M', \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges, en conséquences $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$. La distribution étant invariante par translation selon (Oz) et rotation d'angle θ , il vient $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$. On applique alors un théorème de Gauss en considérant comme surface un cylindre de rayon r , de longueur ℓ , centré sur l'axe (Oz) et intérieur au cylindre contenant les charges. Seule la surface latérale contribue au flux du champ électrostatique :

$$E_r(r) \times 2\pi r = \frac{\rho \pi r^2 \ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\rho H \vec{M}}{2\varepsilon_0}$$

avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre.

On considère alors deux cylindres, un cylindre de charge volumique $\rho_+ = Ne$ centré sur l'axe (Oz) et un cylindre de charge volumique $\rho_- = -Ne$ décalé de $x\vec{u}_x$. En appliquant le théorème de superposition, on en déduit le champ électrique résultant (avec H' le projeté orthogonal de M sur le cylindre décalé) :

$$\vec{E} = \frac{Ne}{2\varepsilon_0} \left(\overrightarrow{HM} - \overrightarrow{H'M'} \right) = \frac{Ne}{2\varepsilon_0} \overrightarrow{HH'} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Ne}{2\varepsilon_0} x \vec{u}_x}$$

Par analogie avec les questions précédentes, on en déduit : $\boxed{\omega_c^2 = \omega_p^2/2}$.

Q13. On considère que les électrons subissent un déplacement de $x\vec{u}_x$ vers le haut. Il apparaît sur la face inférieure un excédent de charges $Q = Ne \times x\pi R^2$. Cette charge crée sur la face opposée du cylindre un champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \vec{u}_x = \frac{Ne x}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{4L^2} \vec{u}_x$$

Et donc pour la nouvelle pulsation $\boxed{\omega_\ell^2 = \omega_p^2 \frac{R^2}{4L^2}}$.

Q14. Avec $\omega_\ell = \frac{R}{2L}\omega_p$, il vient pour les deux fréquences :

$$\frac{\omega_{\ell,2}}{\omega_{\ell,1}} = \frac{R_2}{L_2} \times \frac{L_1}{R_1} \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{L_2}{R_2} \times \frac{R_1}{L_1}}$$

Pour une augmentation du rapport L/R d'un facteur $18/8 \approx 2,3$, on s'attend à une augmentation de la longueur d'onde d'un même facteur. Le facteur d'augmentation ne vaut que $13/8 = 1,6$ pour la longueur d'onde. Le modèle n'est donc qu'approché (ce qui était le cas pour le calcul du champ électrostatique).

Q15. À la question Q11, il est indiqué que les longueurs d'onde associées à ω_p sont dans le proche ultraviolet. Le passage à l'infrarouge nécessite une augmentation de longueur d'onde. Avec $\lambda_\ell = \frac{2L}{R}\lambda_p$, un rapport L/R grand (cylindre allongé) favorise une augmentation de la longueur d'onde et donc potentiellement un passage de l'UV à l'IR.

Q16. En assimilant l'onde émise par le laser à une onde plane dans le vide, le champ électrique de cette onde est transverse. Si le faisceau du laser est perpendiculaire à l'axe du cylindre, le faisceau laser peut posséder une composante du champ électrique colinéaire à l'axe du cylindre pour favoriser une excitation des électrons le long de l'axe du cylindre.

Q17. En suivant l'indication en préambule de l'énoncé indiquant que les électrons du métal peuvent être assimilés aux « électrons d'un plasma dilué », on ne tiendra compte que de l'action du champ électrique extérieur sur la dynamique des électrons. On applique alors le principe fondamental de la dynamique à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow m\omega\vec{v} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{j} = -eN\vec{v} = \frac{Ne^2}{im\omega} \vec{E}$$

Et donc pour la conductivité électrique $\boxed{\gamma = \frac{Ne^2}{im\omega}}$.

Q18. On combine alors les équations de Maxwell pour un milieu localement neutre :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) &= \vec{\text{grad}} \left(\underbrace{\text{div}\vec{E}}_{=0} \right) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}}\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0\gamma\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right) \\ &\Rightarrow -\vec{\Delta}\vec{E} = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Et donc pour une onde plane progressive monochromatique :

$$k^2\vec{E} = -\mu_0 \frac{Ne^2}{im\omega} i\omega\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\omega^2\vec{E} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k^2}{\mu_0\varepsilon_0} + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$$

On en déduit : $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ avec $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$.

Pour $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$, le vecteur d'onde est imaginaire pur, l'onde ne se propage pas dans le métal qui se comporte comme un filtre passe-haut dont la pulsation du coupure est égale à la pulsation plasma ω_p .

Q19. On considère une onde plane progressive monochromatique. L'équation de Maxwell-Faraday assure la relation $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$. Le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique et au vecteur d'onde. Par ailleurs, l'onde étant transverse (Cf. énoncé, en accord avec $\text{div} \vec{E} = 0$ et $\text{div} \vec{B} = 0$), le champ électrique est donc lui aussi perpendiculaire au vecteur d'onde. **En conséquence le vecteur d'onde et le champ électrique n'ont pas de composantes selon (Oy).**

Q20. Pour une onde plane progressive monochromatique :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow k_x E_x + k_z E_z = 0 \Rightarrow \boxed{E_z = -\frac{k_x E_x}{k_z}}$$

Q21. Partant de $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$, il vient :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} [k_x \vec{u}_x + k_z \vec{u}_z] \wedge [E_x \vec{u}_x + E_z \vec{u}_z] \Rightarrow \boxed{B_y = \frac{k_z E_x - k_x E_z}{\omega}}$$

Et compte tenu de la relation obtenue à la question précédente :

$$\boxed{B_y = \frac{E_x}{\omega} \left[k_z + \frac{k_x^2}{k_z} \right]}$$

Q22. Commençons par le vide indiqué par (1). Pour une onde plane progressive monochromatique dans le vide $\vec{k}_1 = \frac{\omega_1}{c} \vec{u}$, donc $k_{x1}^2 + k_{z1}^2 = \frac{\omega_1^2}{c^2}$. Il vient :

$$\frac{B_{y,1}}{\omega_1} = \frac{E_{x,1}}{\omega_1} \left[k_{z1} + \frac{1}{k_{z1}} \left(\frac{\omega_1^2}{c^2} - k_{z1}^2 \right) \right] \Rightarrow \boxed{B_{y,1} = \frac{E_{x,1} \omega_1}{k_{z1} c^2}}$$

Dans le métal $k_{x2}^2 + k_{z2}^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_p^2}{c^2}$ et donc :

$$\frac{B_{y,2}}{\omega_2} = \frac{E_{x,2}}{\omega_2} \left[k_{z2} + \frac{1}{k_{z2}} \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_p^2}{c^2} - k_{z2}^2 \right) \right] \Rightarrow \boxed{B_{y,2} = \frac{E_{x,2}}{\omega_2 k_{z2}} \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_p^2}{c^2} \right)}$$

Q23. Dans le vide, la composante électrique parallèle au plan prend la forme $E_{x,1} e^{i(\omega_1 t - k_{x1} x)}$ et dans le métal : $E_{x,2} e^{i(\omega_2 t - k_{x2} x)}$. La continuité de cette composante à l'interface ($z = 0$) impose :

$$\forall x, \forall t, \underline{E}_{x,1} e^{i(\omega_1 t - k_{x1} x)} = \underline{E}_{x,2} e^{i(\omega_2 t - k_{x2} x)}$$

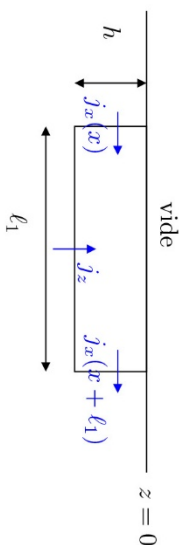
En particulier en $x = 0$, $\forall t$, $E_{x,1} e^{i\omega_1 t} = E_{x,2} e^{i\omega_2 t}$. Si les pulsations sont différentes, les exponentielles complexes constituent une famille libre et la seule solution serait la solution triviale $E_{x,1} = E_{x,2} = 0$. On exclut cette solution et on impose : $\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \omega}$

De la même manière, $\forall x$, $\underline{E}_{x,1} e^{-ik_{x1} x} = \underline{E}_{x,2} e^{-ik_{x2} x}$ admet une solution non triviale

qu'à la seule condition que $\boxed{k_{x1} = k_{x2} = k_x}$.

Remarquons enfin que ces égalités imposent finalement $\boxed{E_{x,1} = E_{x,2}}$

Q24. Effectuons un bilan de charges à la limite de la surface du métal :



On considère le volume de hauteur h , de longueur ℓ_1 et de profondeur ℓ_2 selon $\vec{u}_y$. La variation de charges au cours du temps au sein de ce volume est due aux flux de charges à travers les parois, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} Q(x, t + dt) &= \rho(x, t + dt) h \ell_1 \ell_2 \\ &= \rho(x, t) h \ell_1 \ell_2 + h \times \ell_2 [j_x(x, t) - j_x(x + \ell_1, t)] dt + \dots \\ &\quad \dots + j_z(x, z = -h, t) \ell_1 \ell_2 dt \end{aligned}$$

Notons tout d'abord l'absence de terme du type $j_z(x, z = 0^+, t) \ell_1 \ell_2$. L'espace des $z > 0$ étant assimilé au vide non conducteur aucun courant ne peut y circuler.

On passe alors à la limite $h \rightarrow 0$, de telle sorte que $\rho(x, t) h \rightarrow \sigma(x, t)$ (charge volumique infiniment grande sur une épaisseur infiniment petite de telle sorte que le produit des deux reste fini) tandis que les termes en $h \times j_x$ tendent vers zéro. Il vient :

$$\sigma(x, t + dt) = \sigma(x, t) + j_z(z = 0^-, t) dt$$

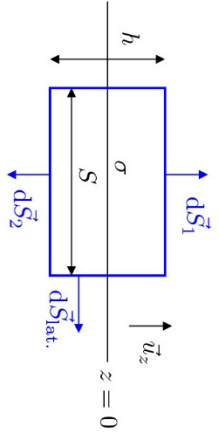
C'est-à-dire en assimilant le taux d'accroissement à la dérivée pour $dt \rightarrow 0$, on en déduit :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma}{\partial t} = j_z}$$

Q25. Avec $\underline{\gamma} = \frac{N e^2}{i m \omega}$ et $j_{z,2} = \underline{\gamma} \underline{E}_{z,2}$, il vient :

$$i \omega \underline{\sigma} = \frac{N e^2}{i m \omega} \underline{E}_{z,2} \Rightarrow \boxed{\underline{E}_{z,2} = -\frac{m \omega^2}{N e^2} \underline{\sigma}}$$

Q26. Pour retrouver la relation de passage, on applique le théorème de Gauss sur une surface fermée entourant une surface d'aire S à la surface du métal comme indiqué sur le schéma suivant.



$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

On fait alors tendre la hauteur $h \rightarrow 0$. L'aire de la surface latérale est proportionnel à h , en conséquence $\lim_{h \rightarrow 0} \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} = 0$, en conséquence :

$$E_{z1}S - E_{z2}S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{z1} - E_{z2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

Il vient $\underline{E}_{z1} - \underline{E}_{z2} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2\epsilon_0}\underline{E}_{z2}$ et avec $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$, on en déduit :

$$\boxed{\underline{E}_{z1} = \underline{E}_{z2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)}$$

Q27. Sachant que les composantes du vecteur d'onde et du champ électrique à la limite du vide et du métal selon $\vec{u}_x$ sont les mêmes (Cf. Q23), il vient :

$$\underline{E}_{z2} = -\frac{k_x \underline{E}_x}{k_{z2}} \quad \text{et} \quad \underline{E}_{z1} = -\frac{k_x \underline{E}_x}{k_{z1}} \Rightarrow \frac{k_{z2}}{k_{z1}} = \frac{\underline{E}_{z1}}{\underline{E}_{z2}}$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{\frac{k_{z2}}{k_{z1}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Q28. On exploite les relations obtenues pour B_y à la question Q22 en les simplifiant sachant que d'après Q23 $\underline{E}_{x,1} = \underline{E}_{x,2}$, $\omega_2 = \omega_1$, il vient :

$$\frac{\underline{E}_x \omega}{k_{z1} c^2} = \frac{\underline{E}_x}{\omega k_{z2}} \left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{k_{z2}}{k_{z1}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Q29. Les trois relations sont respectivement :

$$\frac{k_{z2}}{k_{z1}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \epsilon \quad ; \quad k_x^2 + k_{z1}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_{z2}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon$$

En combinant les relations, il vient :

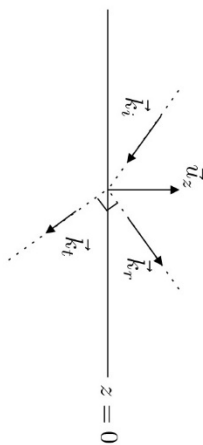
$$\frac{k_x^2 + k_{z1}^2}{k_x^2 + k_{z2}^2} = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow k_x^2 + \underline{k}_{z2}^2 = \epsilon (k_x^2 + k_{z1}^2) \Rightarrow k_x^2 + \epsilon^2 k_{z1}^2 = \epsilon (k_x^2 + k_{z1}^2)$$

$$\Rightarrow k_x^2 (1 - \epsilon) = k_{z1}^2 (\epsilon - \epsilon^2) \quad \Rightarrow_{\epsilon \neq 0, \epsilon \neq 1} \boxed{k_{z1}^2 = \frac{k_x^2}{\epsilon}}$$

Avec $k_{z2}^2 = \epsilon^2 k_{z1}^2$, il vient : $\boxed{k_{z2}^2 = \epsilon k_x^2}$.

Q30. On considère que les relations obtenues précédemment restent valables. La loi de Descartes pour la réflexion impose au vecteur d'onde réfléchi d'être symétrique du vecteur d'onde incident par rapport à $\vec{u}_z$, c'est-à-dire $\boxed{k_{x,r} = k_x}$ et $\boxed{k_{z,r} = -k_{z1}}$. Les deux vecteurs ont nécessairement même norme dans le vide (OPPM dans le vide $k^2 = \omega^2/c^2$).

Par ailleurs $\vec{k}_r \cdot \vec{k}_2 = k_{x,r} k_{x2} + k_{z,r} k_{z2} = k_x^2 - k_{z1} k_{z2} = k_x^2 - k_x / \sqrt{\epsilon} \times \sqrt{\epsilon} k_x = 0$. Les vecteurs d'onde des ondes transmises et réfléchies sont bien orthogonaux entre eux.



Q31. On est en présence d'une **onde évanescente localisée au voisinage de la surface**.

L'absence de propagation selon (Oz) impose l'absence de partie réelle pour la composante selon (Oz) du vecteur d'onde et donc $k_z = ik_0$.

On considère une onde de la forme $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = e^{i(\omega t - k_x x)} e^{k_0 z}$.

Dans le vide, on veut $\lim_{z \rightarrow +\infty} e^{k_0 z} = 0$, ce qui impose $\boxed{k_0 < 0}$. Dans le métal, on veut

$\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{k_0 z} = 0$, ce qui impose $\boxed{k_0 > 0}$. L'onde se localise alors à la surface sur des épaisseurs caractéristiques $1/|k_0|$ et $1/k_0$.

Q32. Avec $k_{z2}^2 = \epsilon k_x^2$ et $k_{z1}^2 = k_x^2/\epsilon$, pour $\epsilon < 0$, il vient $k_{z2}^1 < 0$ et $k_{z2}^2 < 0$ et donc des composantes imaginaires pures.

Q33. Avec $\underline{k}_{z1}^2 + \underline{k}_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ et $\underline{k}_{z1}^2 = \underline{k}_x^2/\epsilon$, on élimine $\underline{k}_{z1}$ et il vient : $\boxed{k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}}$.

Avec $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, la relation se réécrit : $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2} \right)$.

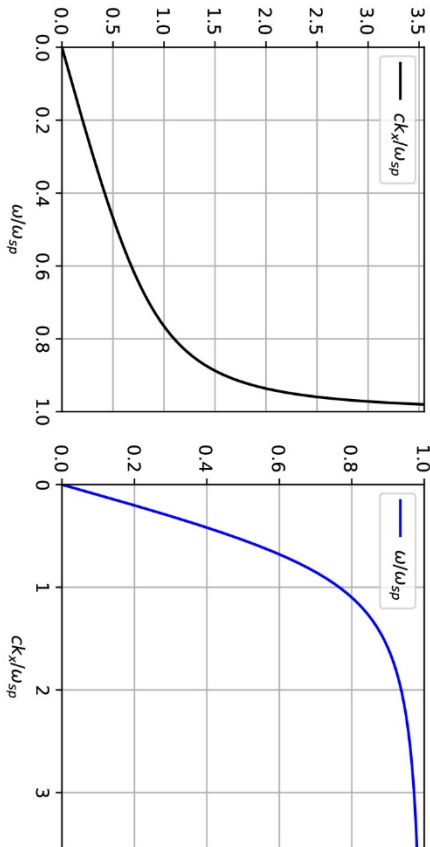
Comme $\epsilon < 0$, on sait déjà que $\omega < \omega_p$ et donc un numérateur positif. Pour assurer $k_x^2 > 0$ (et donc la possibilité d'une propagation selon (Ox)), il faut aussi que le dénominateur

soit positif, c'est-à-dire $\omega_p^2 > 2\omega^2$ et donc $\boxed{\omega < \omega_p/\sqrt{2} = \omega_{sp}}$ qui est une condition plus contraignante que la précédente.

Q34. Avec $\omega_p = \sqrt{2}\omega_{sp}$, la relation précédente peut se récrire :

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1 - \omega^2/(\sqrt{2}\omega_{sp})^2}{1 - \omega^2/\omega_{sp}^2}} \Rightarrow \frac{ck_x}{\omega_{sp}} = \frac{\omega}{\omega_{sp}} \sqrt{\frac{1 - \omega^2/(\sqrt{2}\omega_{sp})^2}{1 - \omega^2/\omega_{sp}^2}}$$

Pour $\omega \ll \omega_{sp}$, $\frac{ck_x}{\omega_{sp}} \approx \frac{\omega}{\omega_{sp}}$ et donc une relation linéaire à basse fréquence. Par ailleurs, on observe une divergence pour $\omega \rightarrow \omega_{sp}$. On trace alors ck_x/ω_{sp} en fonction de ω/ω_{sp} et on peut alors en déduire la fonction réciproque.



Q35. Avec $|k_{z2}| = \sqrt{|\varepsilon|}k_x$ et $|k_{z1}| = k_x/\sqrt{|\varepsilon|}$ et sachant que la distance caractéristique d'atténuation est l'inverse de la valeur absolue de la partie imaginaire du nombre d'onde, il vient :

$$\ell_2 = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}k_x} \quad \text{et} \quad \ell_1 = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{k_x}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{1}{|\varepsilon|}, \quad \ell_2 = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \times \frac{\lambda}{2\pi}, \quad \text{et} \quad \ell_1 = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{2\pi} \lambda.$$

Avec $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, pour $\omega \ll \omega_{sp} = \omega_p/\sqrt{2}$, $|\varepsilon| \gg 1$, et pour $\omega \rightarrow \omega_{sp} = \omega_p/\sqrt{2}$, $|\varepsilon| \rightarrow 1$. En conséquence :

— pour $\omega \ll \omega_{sp}$, $\ell_2 \ll \ell_1$, l'onde s'atténue beaucoup plus rapidement dans le métal, $\ell_2 \ll \lambda$ et $\ell_1 \gg \lambda$;

— pour $\omega \rightarrow \omega_{sp}$, $\ell_2 = \ell_1$, les distances d'atténuation sont identiques dans le vide et dans le métal et de l'ordre de la longueur d'onde.

Q36. Considérons tout d'abord la situation dans le vide :

$$\vec{E}_1(x, z, t) = [E_x \vec{u}_x + E_z \vec{u}_z] e^{i(\omega t - k_{x1}x - k_{z1}z)}$$

Pour $\vec{E}_x$ qui est commun aux deux milieux, on peut choisir l'origine des phases tel que $\vec{E}_x = \vec{E}_0$. Par ailleurs k_{x1} est commun aux deux milieux et on pose $k_{x1} = k_x$.

Compte tenu des questions Q31 et Q32, il vient $k_{z1} = -ik_x/\sqrt{|\varepsilon|}$. De plus, d'après la question Q27, on en déduit : $\vec{E}_{z1} = -k_x E_x/k_{z1} = -iE_0\sqrt{|\varepsilon|}$, en conséquence :

$$\vec{E}_1(x, z, t) = E_0 [\vec{u}_x - i\sqrt{|\varepsilon|}\vec{u}_z] e^{i(\omega t - k_x x) - k_{z1}z/\sqrt{|\varepsilon|}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1(x, z, t) = E_0 e^{-k_x z/\sqrt{|\varepsilon|}} [\cos(\omega t - k_x x)\vec{u}_x + \sqrt{|\varepsilon|} \sin(\omega t - k_x x)\vec{u}_z]$$

Dans le métal, $k_{z2} = i\sqrt{|\varepsilon|}k_x$ et $\vec{E}_{z2} = iE_0/\sqrt{|\varepsilon|}$, il vient :

$$\vec{E}_2(x, z, t) = E_0 \left[\vec{u}_x + \frac{i}{\sqrt{|\varepsilon|}} \vec{u}_z \right] e^{i(\omega t - k_x x - i\sqrt{|\varepsilon|}k_x z)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2(x, z, t) = E_0 e^{\sqrt{|\varepsilon|}k_x z} \left[\cos(\omega t - k_x x)\vec{u}_x - \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \sin(\omega t - k_x x)\vec{u}_z \right]$$

Avec $k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}$ et $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (avec $\omega < \omega_p/\sqrt{2}$).

Q37. Les lignes de champ vérifient $d\vec{\ell} \wedge d\vec{E} = 0$, c'est-à-dire :

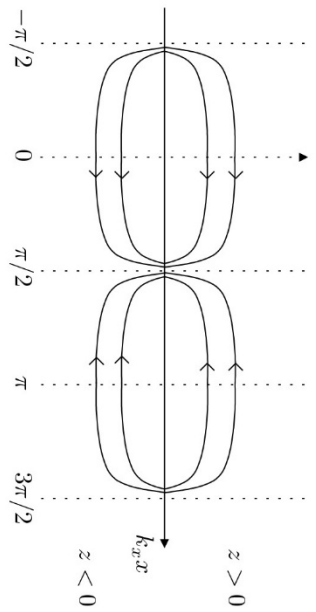
$$(E_x \vec{u}_x + E_z \vec{u}_z) \wedge (dx \vec{u}_x + dz \vec{u}_z) = 0 \Rightarrow E_x dz - E_z dx = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x}$$

vide : $\left(\frac{dz}{dx}\right)_1 = \sqrt{|\varepsilon|} \tan(\omega t - k_x x)$, métal : $\left(\frac{dz}{dx}\right)_2 = \frac{-1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \tan(\omega t - k_x x)$

On note que l'équation donnant les lignes de champ est bien indépendante de z dans le vide comme dans le métal.

Pour le tracé, on choisit une valeur de $\omega \approx \omega_{sp}$ tel que $\varepsilon \approx -1$. Pour un instant tel que $\omega t = 0$, les champs électriques sont respectivement de la forme :

$$\begin{aligned} \forall z > 0, \quad \vec{E}_1(x) &\propto [\cos(k_x x)\vec{u}_x - \sin(k_x x)\vec{u}_z] \\ \forall z < 0, \quad \vec{E}_2(x) &\propto [\cos(k_x x)\vec{u}_x + \sin(k_x x)\vec{u}_z] \end{aligned}$$



Explication du tracé :

- pour $x \approx 0$ $[\pi]$, le champ est essentiellement orienté selon (Ox) ;
- pour $x \approx \pi/2$ $[\pi]$, le champ est essentiellement orienté selon (Oz) ;
- en fonction des signes du sinus et du cosinus, on en déduit l'orientation des lignes de champ. Par exemple, entre 0 et $\pi/2$, le sinus est positif, les lignes de champ sont orientées selon $-\vec{u}_z$ dans le vide et selon $+\vec{u}_z$ dans le métal.