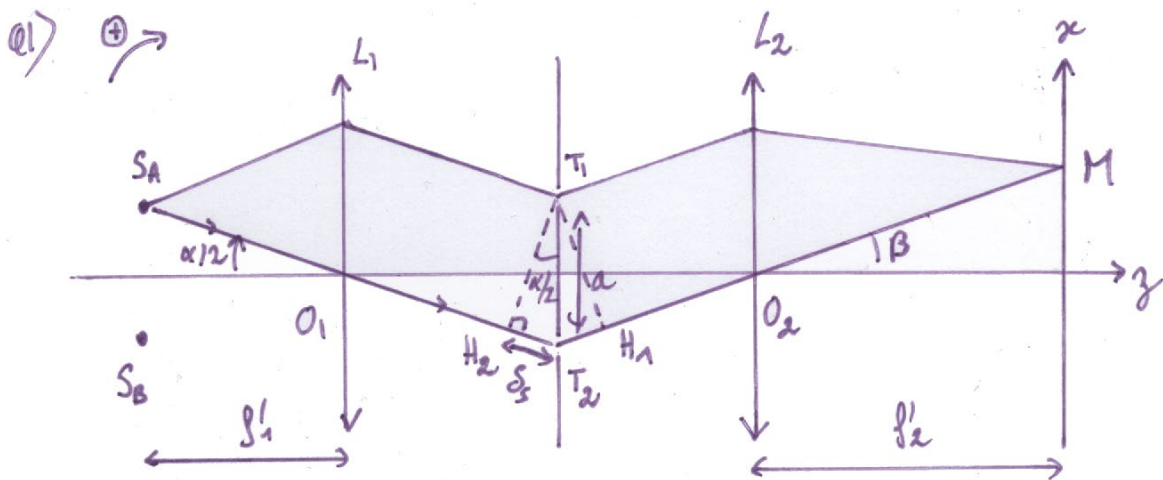


Physique : DS13

Faire l'image d'une exoplanète : CCS - MP - 2025



Supposons $\alpha > 0$ pour plus de simplicité ainsi $S_{source} = a \sin(\alpha/2)$ pour S_A .

Si $\alpha \ll 1$: $S_{source} = \frac{a\alpha}{2}$

Q2) D'où :

$$\begin{cases} s_1(t, M) = A_0 \cos(\omega t - k(S_A T_1 M)) \\ s_2(t, M) = A_0 \cos(\omega t - k(S_A T_2 M)) \end{cases}$$

Q3) Soit $I(M) = k \langle s^2(M, t) \rangle = k \langle s_1^2(M, t) + s_2^2(M, t) + 2 s_1(M, t) \cdot s_2(M, t) \rangle$

$$= \frac{k A_0^2}{2} + \frac{k A_0^2}{2} + 2 k \langle A_0^2 \cos(\omega t - k(S_A T_1 M)) \cdot \cos(\omega t - k(S_A T_2 M)) \rangle$$

or $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \Rightarrow I(M) = k A_0^2 + k A_0^2 \langle \cos(2\omega t - k(S_A T_1 M) + k(S_A T_2 M)) + \cos(k(S_A T_2 M) - k(S_A T_1 M)) \rangle$

or $k \cdot (S_A T_2 M) - k(S_A T_1 M) = k \left[\frac{a\alpha}{2} + s \right] \Rightarrow I(s) = 2 I_0 \left(1 + \cos \left(k \left(\frac{a\alpha}{2} + s \right) \right) \right)$

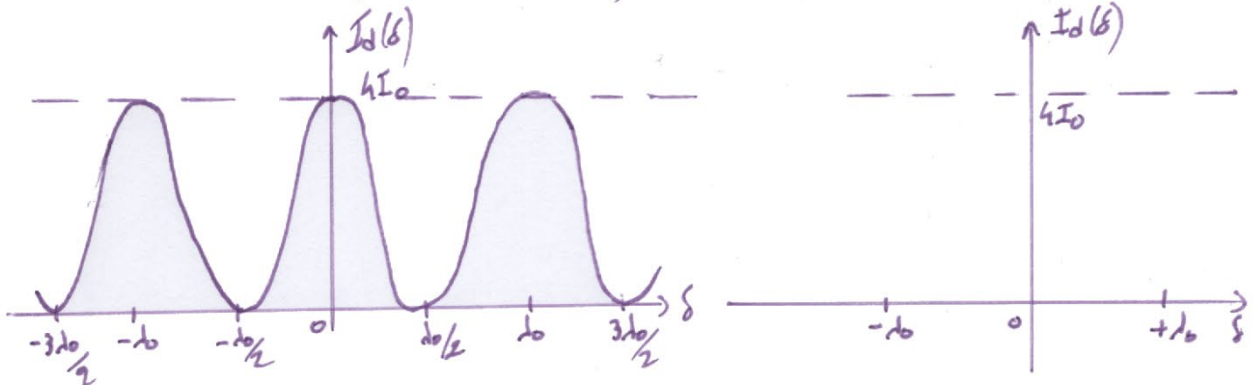
et posons $k A_0^2 = 2 I_0$

Q4) Les deux sources sont incohérentes. Ici leur phase à l'origine sont différentes et varient certainement de façon aléatoire dans le temps. $\Rightarrow I_d(s) = I_a(s) + I_b(s)$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } I_d(\delta) &= 2I_0 \left(1 + \cos \left(k \left(\frac{ax}{2} + \delta \right) \right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \left(k \left(-\frac{ax}{2} + \delta \right) \right) \right) \\
 &= 2I_0 \left[2 + \cos A + \cos B \right] = 2I_0 \left(2 + 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right) \quad (\text{formule}) \\
 &= 2I_0 \left(2 + 2 \cos(k\delta) \cos \left(\frac{ka x}{2} \right) \right) \\
 &= 4I_0 \underbrace{\left(1 + \cos \left(\frac{ka x}{2} \right) \cos(k\delta) \right)}_{I'(a, x)} \quad \text{ainsi } I'(a, x) = \cos \left(\frac{ka x}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Q5) Si $I'(a, x) = 1$: $I_d(\delta) = 4I_0 (1 + \cos(k\delta))$

Si $I'(a, x) = 0$: $I_d = 4I_0$

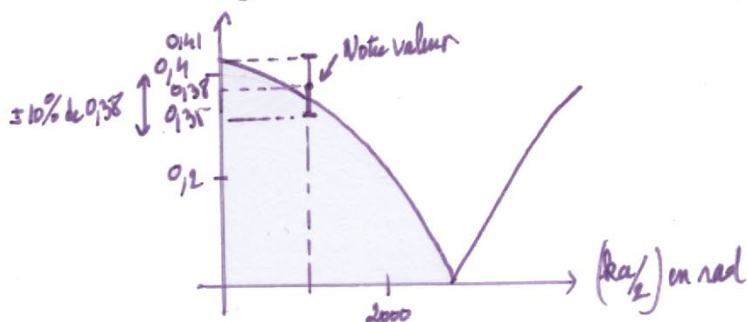


Q6) Pour cette expérience : $\frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda_0} = \frac{\pi \times 200 \cdot 10^{-6}}{650 \cdot 10^{-9}} = 967$.

Q7) On suppose que seul $u(\lambda_0)$ existe d'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{u(ka/2)}{(ka/2)} &= \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0} \Rightarrow u(ka/2) = \left(\frac{ka}{2} \right) \cdot \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0} = 967 \times \frac{30}{650} \\
 &\Rightarrow \underline{u(ka/2) = 45}
 \end{aligned}$$

Q8) Vu les définitions proposées $\mathcal{E} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{112 - 50}{112 + 50} \approx 0,38 = \mathcal{E}$



Q10) Il est possible de la faire via une méthode de Monte-Carlo. La méthode MC consiste à simuler N ajustements en créant $2N$ listes de valeurs simulées : $[C]$ et $[\frac{f_{\alpha}}{2}]$.

. A l'aide des incertitudes - type $u(C)$ et $u(\frac{f_{\alpha}}{2})$ obtenues grâce à np.random.uniform qui place de façon aléatoire chaque terme i des listes simulées dans les intervalles :

$$[C_i - \sqrt{3}u(C); C_i + \sqrt{3}u(C)] \dots \text{ où } C_i \text{ les termes de rang } i \text{ des listes de mesure.}$$

. Après N ajustements on obtient les 2 listes de N valeurs : C_{sim} et $\frac{f_{\alpha}}{2}_{\text{sim}}$.

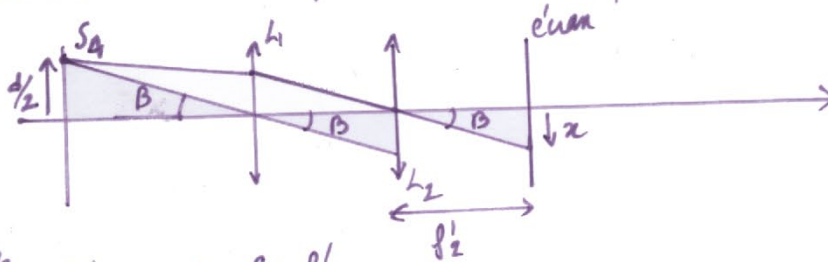
↳ des moyennes et les écarts-types expérimentaux sont les résultats recherchés

Remarque : C'est le phénomène de diffraction qui entraîne principalement ces écarts.

Q11) D'après la figure 2 (et 3) : $\tan \frac{d}{2} = \frac{d}{2f'_1} \Rightarrow d \approx \alpha f'_1 = 508 \mu\text{m}$.

$$\text{et } u(d) = f'_1 \cdot u(\alpha) = 9 \mu\text{m} \text{ car } u(f'_1) \text{ négligée.}$$

Q12) On se retrouve alors avec une simple système optique t.q



$$\text{Ainsi } \beta = \frac{d/2}{f'_1} = \frac{\alpha}{f'_2} \Rightarrow d = 2\alpha \frac{f'_1}{f'_2}$$

$$\text{or } 2\alpha = 4\alpha = 32 \mu\text{m} \Rightarrow d = \frac{2 \times 32 \times 80}{5,6} = 457 \mu\text{m}$$

$$\text{Si on néglige } u(f'_1) \text{ et } u(f'_2) \text{ alors } u(d) = 2u(\alpha) = \frac{2 \times h}{2\sqrt{3}} = 2,3 \mu\text{m.}$$

$$\Rightarrow u(d) = u(d_{\alpha}) \times \frac{f'_1}{f'_2} = 33 \mu\text{m}$$

$$\text{Or } Z_{\text{score}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{u^2(d_1) + u^2(d_2)}} = \frac{|508 - 457|}{\sqrt{33^2 + 9^2}} = 1,5 < 2 \text{ les résultats sont acceptables}$$

Q13) De la même manière qu'à Q1) : $S_{tot} = \frac{a\alpha}{2} + S_r$.

On retrouve la même formule qu'à Q1 sauf que la ligne a retard simulé un balayage sur l'écran et pourra jouer le rôle de compensateur.

Q14) D'après l'énoncé : $\alpha_{res} = \frac{\pi}{ka} = \frac{\lambda_0}{2a} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

$\Rightarrow d = \alpha_{res} \cdot l = 2,4 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Résultat écartant mais non étonnant car les exoplanètes sont des objets très lointains et peu lumineux.

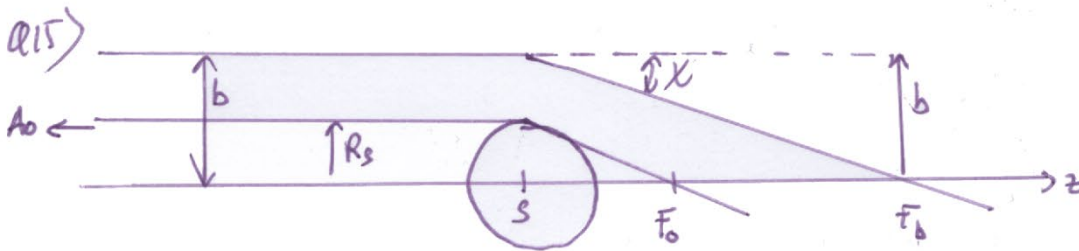


Schéma $\Rightarrow \tan \alpha \approx \alpha = \frac{b}{SF_b}$

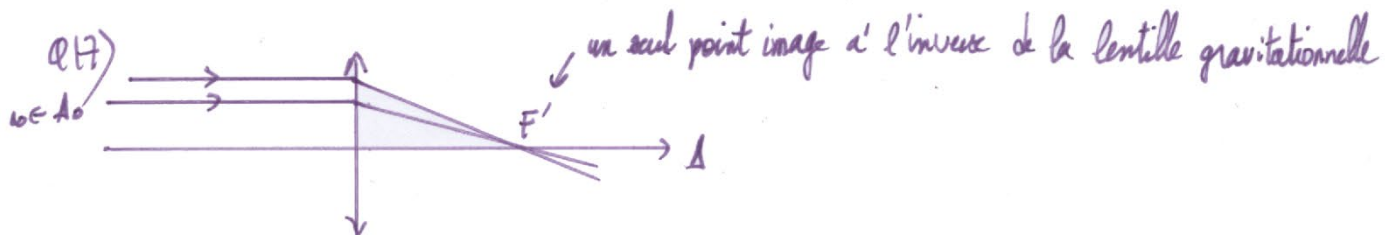
Enoncé $\Rightarrow \alpha = \frac{2\Gamma_{SCH}}{b}$

Et : $\underbrace{SF_b}_{z_0} = \frac{R_s^2}{2\Gamma_{SCH}} = 8,2 \cdot 10^{13} \text{ m} = 547 \text{ ua}$

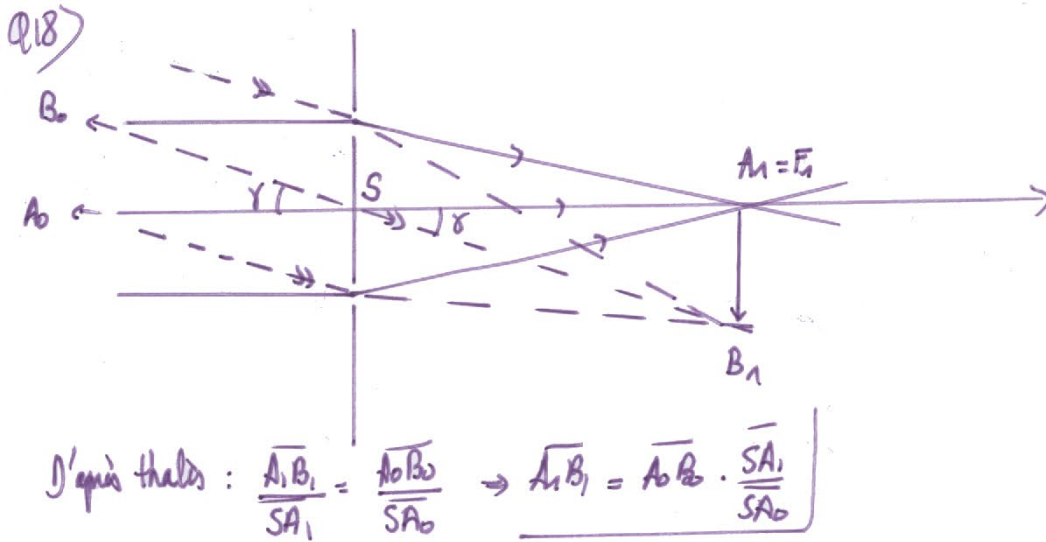
D'où : $\frac{z_0}{R_{sat}} = 18 \Rightarrow$ le point F_0 est à l'extérieur de l'orbite de Neptune.

Q16) Une observation située entre S et F_0 ne pourra voir A_0 .

F_0 et F_b pourra voir A_0 mais à l'inverse d'une lentille classique tous les rayons en provenance de A_0 ne convergeront pas en un point unique F' mais ici entre F_0 et F_b .



un seul point image à l'inverse de la lentille gravitationnelle

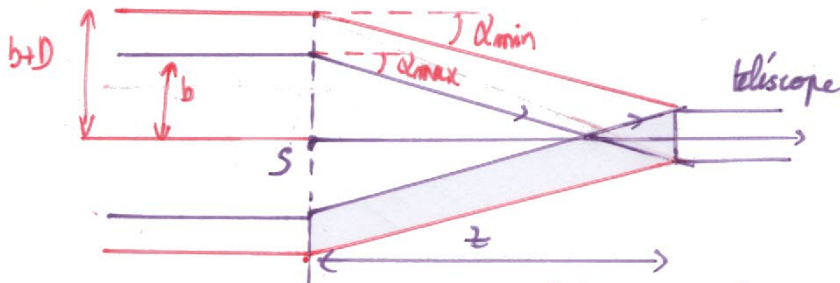


Q19) Critère de Rayleigh : $A_1 B_1 \geq \rho_{\min} = 0,05 \text{ m}$ d'après la figure 8.

Q20) d'où $A_0 B_0 \geq A_1 B_1 \cdot \frac{SA_0}{SA_1} \sim 0,05 \times \frac{100 \times 63066}{600}$ ← conversion al en aa.

$\Rightarrow A_0 B_0 \geq 526 \text{ m}$ | $\Rightarrow$ la résolution est bien meilleure que l'expérience précédente

Q21) Quand la sonde s'éloigne du soleil, les rayons parvenant à la sonde passent plus loin du soleil et sont donc moins déviés.



Ainsi $\begin{cases} \chi_{\min} = \frac{2\sqrt{scu}}{b+D} \text{ et } \chi_{\max} = \frac{2\sqrt{scu}}{b} \end{cases}$: ces deux angles définissent l'anneau d'éclat
d'après l'énoncé

Si on éloigne le télescope $z' > z$ et $\chi_{\min}$ et $\chi_{\max}$ se rapprochent. l'anneau devient plus fin

Q22) Avec la lentille gravitationnelle on aura $P_a = \pi[(b+D)^2 - b^2] \sim 2\pi b D$.

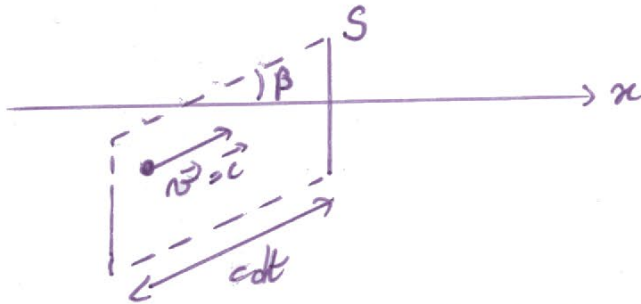
Sans $P_s = \pi D^2/4$

$$\text{D'où } \mu = \frac{P_a}{P_s} = \frac{4 \cdot 2\pi b D}{\pi D^2} \Leftrightarrow \mu = \frac{8b}{D} = 5,6 \cdot 10^9 \gg 1$$

C'est très important et de l'ordre de grandeur de la figure 8 où l'amplification $\sim 10^9$.

Q23) Relations de Planck - Einstein : $E_{ph} = h\nu$
 de "de Broglie" : $P_{ph} = h/\lambda$

Q24)



la puissance reçue par la surface S est $P = I_s \cdot S \cos \beta$.

$$\Rightarrow d\mathcal{E} = I_s \cdot S \cos \beta \cdot dt$$

$$\text{or } \delta N = \frac{d\mathcal{E}}{h\nu} = \frac{I_s \cdot S \cos \beta \cdot dt}{hc} \cdot \lambda$$

Q25) Soit $d\vec{p}_{\text{photons}} = \delta N \cdot (\vec{p}_r - \vec{p}_i) = 2 \delta N p_{\text{photon}} \cos \beta \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \vec{F}_{S \rightarrow \text{photon}} = \frac{\delta N}{\delta t} \cdot 2 p_{\text{photon}} \cos \beta \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{photon} \rightarrow S} = \frac{2 I_s \cdot S \cdot \cos^2 \beta}{hc} \cdot \lambda \cdot p_{\text{photon}} = \frac{2 I_s S \cos^2 \beta}{c}$$

donc $P_r = \frac{2 I_s \cdot \cos^2 \beta}{c}$

Q26) Si $\beta = 0$: $P_r = \frac{2 I_s}{c} \Rightarrow F = \frac{2 I_s S}{c} = \frac{2 \times 173 \times 1360}{3 \cdot 10^8} \sim 1,57 \text{ mN}$

Q27) Deuxième loi de Newton appliquée à la masse m dans le référentiel héliocentrique :

$$m \vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \text{sur } \vec{e}_r : -m R_T \omega_T^2 = -\frac{G m_s m}{R_T^2}$$

$$\Rightarrow R_T^3 \omega_T^2 = G m_s \quad \text{3ème loi de Kepler}$$

$$\text{or } \omega_T = \frac{N_T}{R_T} \Rightarrow N_T = R_T \cdot \sqrt{\frac{G m_s}{R_T^3}}$$

$$\Rightarrow N_T = \sqrt{\frac{G m_s}{R_T}}$$

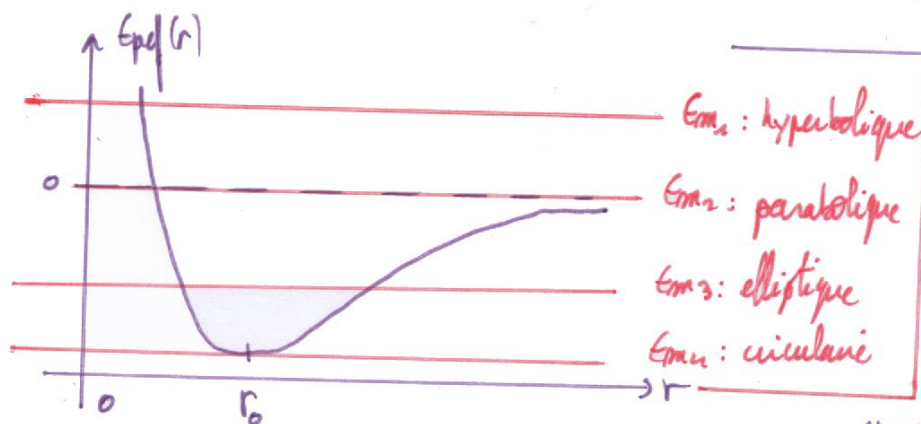
Q28) Soit $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F\vec{e}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{cste}$
 $\Rightarrow \underline{L_z = cste}$

Et $L_z = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta}$
 d'où $\underline{C = \frac{L_z}{m} = r^2 \dot{\theta}}$

Q29) Soit $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\left(-\frac{Gmm_s}{r^2}\vec{e}_r + p_T \cdot \frac{R_T^2}{r^2} S \vec{e}_r\right) \cdot d\vec{OM}$
 $\Rightarrow \underline{E_p = \frac{-Gmm_s + p_T R_T^2 S}{r} + \underbrace{cste}_{=0}}$

Q30) Par définition. $E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + E_p(r)$
 $= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \frac{C^2}{r^4} + E_p(r)$
 $\Rightarrow \underline{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r) \text{ où } E_{\text{eff}}(r) = \frac{-Gmm_s + p_T R_T^2 S}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}}$

Q31) Soit $\frac{dE_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{Gmm_s - p_T R_T^2 S}{r^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{mC^2}{Gmm_s - p_T R_T^2 S}$
 qui existe si $S < S_{\text{lim}} = \frac{Gmm_s}{p_T R_T^2}$



Q32) A l'ouverture de la voile : $\dot{r} = 0, r = R_T \Rightarrow E_m = -\frac{GmM_s}{R_T} + p_T R_T S + \frac{mC^2}{2R_T^2}$
 d'où $E_m > 0 \Leftrightarrow S > \frac{GmM_s}{2p_T R_T^2} = \frac{S_{\text{lim}}}{2}$
 $\Leftrightarrow \underline{S > 1,84 \cdot 10^4 \text{ m}^2}$

Q33) PFD appliqué à la masse dans l'héliocentrique :

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = - \frac{Gmm_s}{r^2} \vec{e}_r + p_T \frac{R_T^2}{r^2} \cos^2 \beta \cdot S \vec{u}$$

$$\text{or } \begin{cases} \vec{OM} = R_T \vec{\rho} \\ \varnothing = \omega_T t \end{cases} \Rightarrow m R_T \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = - \frac{Gmm_s}{R_T^2 \rho^2} \vec{e}_r + p_T \frac{R_T^2}{R_T^2 \rho^2} \cos^2 \beta \cdot S \vec{u}$$

$$\Rightarrow m R_T \omega_T^2 \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\varnothing^2} = - \frac{Gmm_s}{R_T^2} \frac{\vec{e}_r}{\rho^2} + p_T S \cos^2 \beta \frac{\vec{u}}{\rho^2}$$

$$\text{or } \frac{Gm_s}{R_T^2} = \omega_T^2 \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\varnothing^2} = - m \frac{\vec{e}_r}{\rho^2} + p_T S \cos^2 \beta \vec{u} \times \frac{1}{\rho^2 \cdot \frac{Gm_s}{R_T^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{\rho}}{d\varnothing^2} = - \frac{\vec{e}_r}{\rho^2} + \frac{\eta}{\rho^2} \cos^2 \beta \vec{u}$$

$$\text{où } \eta = \frac{p_T S R_T^2}{Gmm_s} = \frac{S}{S_{\text{lim}}}$$

• η représente le rapport de la force radiative solaire et de la force gravitationnelle.

Q34) Sur $\vec{e}_r$: $\frac{d^2 \vec{\rho}}{d\varnothing^2} \cdot \vec{e}_r = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = \frac{d^2 \rho}{d\varnothing^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{d\varnothing} \right)^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \rho}{d\varnothing^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{d\varnothing} \right)^2 = - \frac{1}{\rho^2} + \frac{\eta}{\rho^2} \cos^2 \beta \times \cos \beta$$

$$\text{car } \vec{u} = \cos \beta \vec{e}_r + \sin \beta \vec{e}_\theta$$

Sur $\vec{e}_\theta$: $2 \frac{d\rho}{d\varnothing} \cdot \frac{d\theta}{d\varnothing} + \rho \cdot \frac{d^2 \theta}{d\varnothing^2} = \frac{\eta}{\rho^2} \cos^2 \beta \sin \beta$

Posons $\boxed{v = \frac{d\rho}{d\varnothing} \text{ et } w = \frac{d\theta}{d\varnothing}}$ 2 équations du 1^{er} ordre

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{d\varnothing} - \rho w^2 = - \frac{1}{\rho^2} + \frac{\eta}{\rho^2} \cos^3 \beta \\ 2v w + \rho \frac{dw}{d\varnothing} = \frac{\eta}{\rho^2} \cos^2 \beta \sin \beta \end{cases} \quad \text{2 autres é. du 1^{er} ordre.}$$

Q35) Énoncé $\begin{cases} r(t=0) = R_T \\ \theta(t=0) = 0 \\ \dot{r}(t=0) = 0 \\ \dot{\theta}(t=0) = \omega_T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(0) = 1 \\ \theta(0) = 0 \\ \frac{d\rho}{d\theta}(0) = 0 \\ \frac{d\theta}{d\theta}(0) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{cond-init} = [1, 0, 0, 1]$

Q36) def voile_solaire_beta(y, t, eta, beta) :

$[\rho, \theta, v, \omega] = y$

$d\rho = v$

$d\theta = \omega$

$dv = \rho \times \omega^2 - 1/\rho^2 + \eta \times \text{mp.cos}(\theta) \times 3 / \rho^2$

$d\omega = -2 \times v \times \omega / \rho + \eta \times \text{mp.cos}(\theta) \times 2 \times \text{mp.sin}(\theta) / \rho^3$

$\text{return} ([d\rho, d\theta, dv, d\omega])$

Q37) lorsque $\beta = \pm 90^\circ$, la voile solaire est parallèle aux rayons lumineux donc la force de pression radiative est nulle $\Rightarrow$ la sonde reste sur la trajectoire circulaire imposée par la force gravitationnelle.

Q38) le plus loin : $\theta \approx 2$ et $\beta = 20^\circ$

le plus proche : $\theta \approx 0,6$ et $\beta = -52^\circ$

Q39). Dans un premier temps, la sonde est freinée par le rayonnement $\beta < \beta_a$ et s'approche du soleil tout en étant accélérée (sa vitesse augmente comme un satellite freiné par l'atmosphère).
 • Ensuite, la sonde profite de l'augmentation de la pression de radiation et s'éloigne du soleil.
 • lorsqu'elle se retrouve en $r = R_T$ ($\beta = 90^\circ$), son déplacement quasi-radial est propice à son éloignement.

Q40) dans le référentiel lié à la sonde, le 1^{er} principe appliqué à la voile donne :

$$P_{abs} = 25. P_{ray} \quad (2 \text{ fois})$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_{Is} \cdot R_T^2}{r_{min}^2} \sin^2 \beta = 25 \cdot \epsilon_0 T^4$$

$$\Leftrightarrow r_{min} = \sqrt{\frac{P_{Is} R_T^2 \cos^2 \beta}{2 \epsilon_0 T^4}}$$

Avec $\left\{ \begin{array}{l} \beta = \beta_a, T = 700 \text{ K} \Rightarrow r_{min} = 0,063 \mu.a \\ \beta = \beta_e, T = 700 \text{ K} \Rightarrow r_{min} = 0,078 \mu.a \end{array} \right. \xrightarrow{\text{figure 14}} \left\{ \begin{array}{l} T_{min} = 38 \text{ ans} \\ \omega \\ T_{min} = 42 \text{ ans} \end{array} \right.$