

Physique : DS12

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I – Télémétrie par ultrasons

« Un robot est une machine équipée de capacités de perception, de décision et d'action qui lui permettent d'agir de manière autonome dans son environnement en fonction de la perception qu'il en a. » David Filliat – ENSTA ParisTech

La robotique est donc un très bon exemple de domaine pluridisciplinaire qui implique de nombreuses thématiques. Le but de ce problème est **d'étudier quelques caractéristiques d'un robot autonome**. Il comporte deux volets : le premier étudie les propriétés de la télémétrie par ultrasons et le second a pour but de déterminer les principaux paramètres physiques du moteur qui alimente le robot.

A / DÉTECTEUR À ULTRASONS

La recherche du maximum d'information sur l'environnement est une quête perpétuelle en robotique.

Pour se faire, la télémétrie, qui consiste à mesurer des distances, est extrêmement importante. Elle permet au robot de déterminer la position des obstacles (ou leur absence) et ainsi de prendre la décision adéquate.

Dans un premier temps, on compare à l'aide du Cahier Technique suivant deux types de télémétrie.

Les différentes technologies de détecteurs

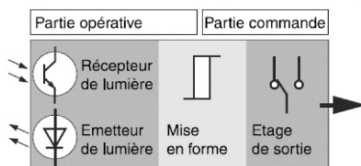
A. Les détecteurs photoélectriques

Leur principe les rend aptes à détecter tous types d'objets, qu'ils soient opaques, réfléchissants ou même quasi-transparents.

Principe : Une diode électroluminescente (LED) émet des impulsions lumineuses, généralement dans l'infrarouge proche (850 à 950 nm). Cette lumière est reçue ou non par une photodiode ou un phototransistor en fonction de la présence ou l'absence d'un objet à étudier.

Il existe différents systèmes de détection, le système à réflexion directe (sur l'objet) consiste par exemple, à utiliser la réflexion directe (diffuse) de l'objet à détecter.

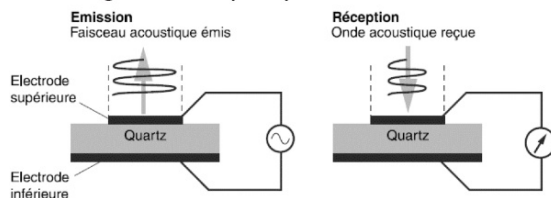
Points faibles : la distance de détection de ce système est faible (jusqu'à 2 m). De plus elle varie avec la couleur de l'objet à « voir » et du fond dans lequel il se trouve (pour un réglage donné, la distance de détection est plus grande pour un objet blanc que pour un objet gris ou noir) et un arrière-plan plus clair que l'objet à détecter peut rendre le système inopérant.



Principe d'un détecteur photoélectrique

B. Les détecteurs à ultrasons

Les ultrasons sont produits électriquement à l'aide d'un transducteur électroacoustique (effet piézoélectrique) qui convertit l'énergie électrique qui lui est fournie en vibrations mécaniques.



Principe d'un transducteur électroacoustique

Le principe est de mesurer le temps de propagation entre le capteur et la cible. L'avantage des capteurs ultrasons est de pouvoir fonctionner à grande distance (jusqu'à 10 m), mais surtout d'être capable de détecter tout objet réfléchissant le son indépendamment de la forme et de la couleur.

Facteurs d'influence : les détecteurs à ultrasons sont particulièrement adaptés à la détection d'objet dur et présentant une surface plane et perpendiculaire à l'axe de détection. Cependant le fonctionnement du détecteur à ultrasons peut être perturbé par différents facteurs :

- Les courants d'air brusques et de forte intensité peuvent accélérer ou dévier l'onde acoustique.
- Les gradients de température importants dans le domaine de détection : une forte chaleur dégagée par un objet crée des zones de température différentes qui modifient le temps de propagation de l'onde et empêchent une détection fiable.
- Les isolants phoniques : les matériaux tels le coton, les tissus, le caoutchouc, absorbent le son.
- L'angle entre la face de l'objet à détecter et l'axe de référence du détecteur.

Cahier Technique Schneider Electric n°209

Pour choisir la solution la plus adaptée à l'utilisation du robot autonome, on choisit de présenter les principaux avantages et inconvénients des deux solutions dans un tableau.

	Ultrason	Infrarouge
Portée	<i>Abordé dans la question A1</i>	<i>Abordé dans la question A1</i>
Nature des matériaux compatibles	<i>Abordé dans la question A2</i>	<i>Abordé dans la question A2</i>
Facteurs d'influence	<i>Abordé dans la question A3</i>	<i>Abordé dans la question A3</i>
Directivité	<i>Les ultrasons sont très évasifs (cône d'émission large d'environ 30°), ce qui peut être un avantage (détection d'obstacle rapprochée) ou un inconvénient (détection d'obstacles sur les côtés alors que la route en face est dégagée).</i>	<i>La directivité est très précise (cône d'émission d'environ 5°).</i>
Coût	<i>Quelques dizaines d'euros</i>	<i>Quelques dizaines d'euros</i>

A1. À l'aide des informations apportées par ce Cahier Technique, comparer les portées de ces deux détecteurs.

A2. Comparer les capacités de détection des deux capteurs en fonction de la nature du matériau et de la couleur de l'obstacle.

A3. Relever au moins un facteur d'influence perturbant la détection par ultrasons et un perturbant la détection par infrarouges.

Pour produire les ultrasons, on utilise l'effet piézoélectrique inverse que possède une lame de quartz. Si ses deux faces sont soumises à une tension alternative de haute fréquence f_0 , soit $u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$, elle se met à vibrer à la même fréquence f_0 , ce qui engendre une onde ultrasonore dans le milieu environnant.

A4. Pour obtenir des ultrasons, donner l'ordre de grandeur caractéristique de la fréquence f_0 de la tension alternative à laquelle il faut soumettre la lame de quartz. On précisera les limites du domaine des fréquences des signaux acoustiques audibles par l'homme.

A5. Quel est le nom du phénomène physique à l'origine de l'élargissement des ondes émises ? Dans le tableau, ce phénomène est caractérisé par le cône d'émission. Quelle(s) est (sont) le(s) grandeur(s) physique(s) qui permettent d'expliquer l'écart entre les cônes d'émission ?

A6. Nommer un autre exemple d'utilisation de détecteurs par ultrasons, ainsi qu'un autre exemple d'utilisation de détecteurs infrarouges.

Dans toute la suite de la première partie sur la télémétrie, on considère que le détecteur par ultrasons a été choisi et on cherche à comprendre les facteurs perturbant le fonctionnement du détecteur à ultrasons. Dans la sous-partie **B**, on étudie pourquoi « les forts gradients de température [...] empêchent une détection fiable » ; puis on s'intéresse, dans la sous-partie **C**, au problème « des isolants phoniques » et pour finir, on analyse le problème de la détection d'obstacles mobiles dans la sous-partie **D**.

B / CÉLÉRITÉ DE L'ONDE ULTRASONORE

On étudie la propagation d'une onde ultrasonore produite dans l'air.

L'air est assimilé à un gaz parfait, initialement au repos de vitesse $\vec{v}_0 = \vec{0}$, et qui en l'absence de toute perturbation possède une masse volumique μ_0 , une pression P_0 et à une température T_0 .

On suppose que la lame de quartz, positionnée à l'abscisse $x = 0$, transmet ses vibrations aux couches d'air environnantes et crée ainsi une onde ultrasonore sinusoïdale de fréquence f_0 se propageant suivant $(0, \vec{e}_x)$ à la célérité c .

Le passage de l'onde perturbe l'équilibre.

En un point M de l'air d'abscisse x , à l'instant t , on note ainsi :

- $p(x, t)$ la pression avec :

$$p(x, t) = P_0 + p_1(x, t),$$
- $\mu(x, t)$ la masse volumique avec :

$$\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t),$$
- $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$ le champ des vitesses avec :

$$\vec{v}(x, t) = \vec{v}_0 + v_1(x, t) \vec{e}_x \quad \text{où } v_1(x, t) \text{ est petit devant } c.$$

L'écoulement du fluide est considéré parfait et on néglige l'action de la pesanteur.

On donne la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Dans toute la suite, on se place dans l'approximation acoustique. Cela signifie que :

- on considère des ondes de faible amplitude, pour lesquelles la surpression p_1 est très petite par rapport à la pression P_0 de l'air au repos : $|p_1| \ll P_0$;
- on mène les calculs au premier ordre.

B1. L'air étant assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a , à la température T_0 supposée (dans un premier temps) constante, retrouver l'expression de la pression p de l'air en fonction de μ , M_a , T_0 et R . En déduire que l'approximation acoustique se traduit aussi par la relation $\mu_1 \ll \mu_0$.

Bilan de masse

On considère un volume élémentaire d'air $d\tau$, fixe dans le référentiel du laboratoire, contenu dans un cylindre de section S constante, d'axe $(0, \vec{e}_x)$ et compris entre les surfaces situées en x et en $x + dx$. Ce système est ouvert.

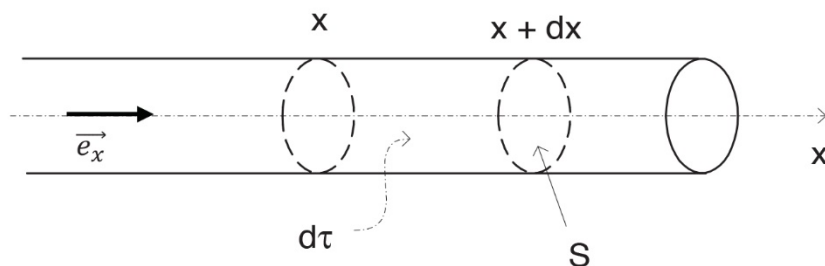


Figure 1 – Volume élémentaire d'air

B2. Donner l'expression de la masse $dm(t)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant t . De même pour la masse $dm(t + dt)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant $t + dt$.

B3. Exprimer la masse δm_e entrant dans $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en x . Même question pour la masse δm_s sortant de $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en $x + dx$.

B4. Montrer que, dans le cas de l'approximation acoustique, la conservation de la masse pour le système étudié se traduit par la relation **(R1)** :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0. \quad (\text{R1})$$

Équation du mouvement

La loi de la quantité de mouvement, appliquée à la particule de fluide contenue dans le cylindre précédemment défini, conduit à la relation suivante :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad } p}.$$

B5. Que devient l'expression précédente, dans le cas unidimensionnel et dans le cadre de l'approximation acoustique ? On appelle **(R2)** la relation ainsi obtenue.

Évolution isentropique

Historiquement, Isaac Newton a supposé que les particules d'air subissent une transformation isotherme lors du passage d'une onde sonore. Cette hypothèse s'est avérée en désaccord avec les valeurs expérimentales de la célérité des ondes sonores. Ce fut Pierre Simon de Laplace qui montra que l'hypothèse d'une transformation isentropique est plus adéquate.

B6. On considère que, pour des ondes ultrasonores se propageant dans des fluides, l'hypothèse adiabatique est adéquate. Justifier succinctement et sans calculs, la raison de cette hypothèse.

Les particules d'air subissant une transformation isentropique lors du passage de l'onde ultrasonore, on définit alors l'expression du coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s.$$

B7. Établir, dans le cas de l'approximation acoustique, la relation liant μ_1 à μ_0 , p_1 et χ_s . Cette relation constitue la relation **(R3)**.

Équation de propagation

B8. En utilisant les relations **(R1)**, **(R2)** et **(R3)**, montrer que la surpression p_1 vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

On donnera l'expression de la célérité c de l'onde ultrasonore en fonction de μ_0 et χ_s .

B9. L'air étant assimilé à un gaz parfait de coefficient γ (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant), exprimer χ_s en fonction de γ et P_0 et en déduire que l'expression de la célérité c est :

$$c(T_0) = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}.$$

On notera par la suite c_0 , la valeur de $c(T_{273})$ pour une température $T_{273} = 273 \text{ K}$.

Précision des mesures par télémétrie par ultrasons

On suppose, dans cette partie, que l'onde est bien réfléchiée sur un obstacle. La mesure du temps de propagation de l'onde, connaissant sa célérité, permet de déterminer la distance parcourue par l'onde lors d'un aller-retour entre le robot et l'obstacle.

Sur un document technique concernant la télémétrie par ultrasons dans le cas d'un robot autonome, on trouve le graphe suivant :

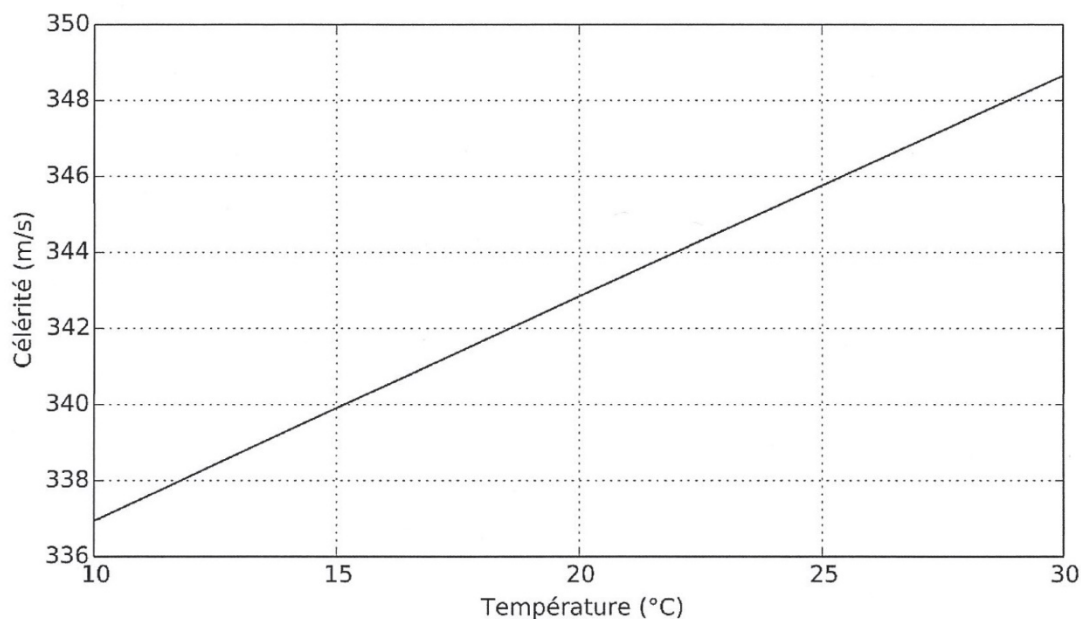


Figure 2 – Célérité des ultrasons en fonction la température

B10. Sur l'intervalle envisagé de température (voir figure 2) l'évolution de la célérité des ultrasons est fonction de la température θ mesurée en degré Celsius suivant la relation : $c(\theta) = a \cdot \theta + b$. Déterminer graphiquement les valeurs de a et de b .

B11. Sur l'intervalle envisagé de température de la figure 2, linéariser la relation obtenue à la question **B9**. Déterminer les expressions de a et de b en fonction de c_0 et $T_{273} = 273 \text{ K}$. Dédurre de b les valeurs numériques de c_0 et γ , sachant que dans le cas de l'air, $M_a = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Le robot n'est pas équipé d'un capteur de température, les distances sont donc calculées avec une célérité $c(\theta_{ref})$ correspondant à une température de référence θ_{ref} . Sur la figure 3, on trace l'écart entre la distance réelle d_r parcourue par l'onde lors d'un aller-retour et la distance mesurée d_m par le robot.

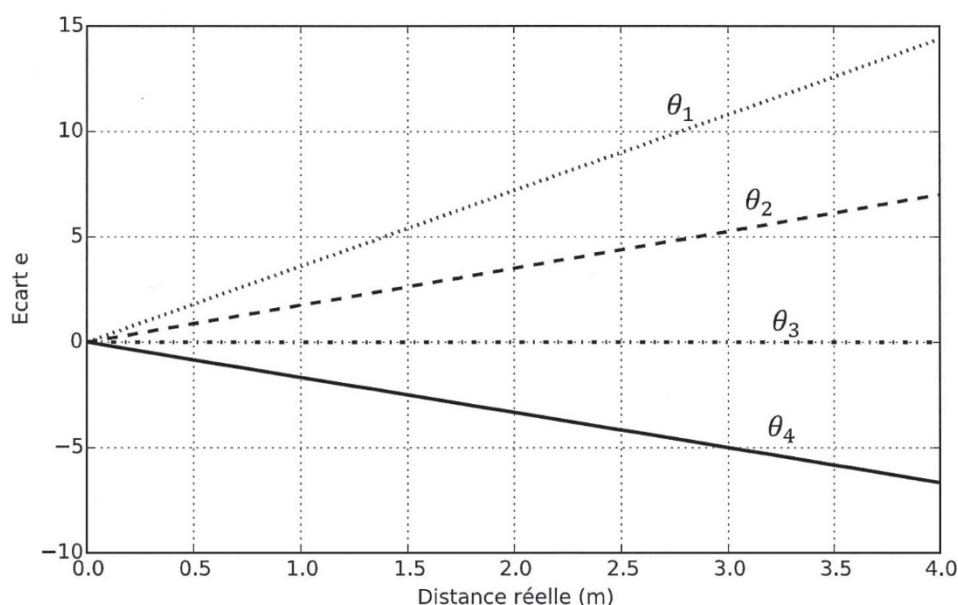


Figure 3 – Écart systématique e entre la distance réelle d_r parcourue par l'onde lors d'un aller-retour et la distance mesurée d_m par le robot pour différentes températures

En python 3		En scilab
<pre> import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt def c(temp) : return 330.938*(1+temp/273)**0.5 Temp=[0,10,20,30] n=len(Temp) d=np.linspace(0,4,41) N=len(d) e=[] for i in range(n) : e.append([]) for j in range(N): e[i].append(d[j]*(c(20)/c(Temp[i])-1)*100) plt.plot(d,e[i]) </pre>	<pre> 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 </pre>	<pre> function[ecart]=c(temp) ecart=330.938*(1+temp/273)^0.5 endfunction Temp=[0,10,20,30] n=length(Temp) d=0:0.1:4 N=length(d) e=[] for i=1:n for j=1:N e(i,j)=d(j)*(c(20)/c(Temp(i))-1)*100 end plot(d,e(i,:)) end </pre>

Le programme proposé permet de tracer l'écart $e = d_m - d_r$ sur la mesure de distance induite par la variation de température.

- B12.** Justifier l'expression mathématique (lignes 13 et 14) du programme qui calcule la valeur de l'écart e . Quelle est la valeur de la température de référence θ_{ref} ?
- B13.** D'après le programme, quelle est l'unité de l'écart e qui devrait être précisée sur la figure 3 ? Quelles sont les valeurs numériques de θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 ? Pourquoi e est-il négatif pour θ_4 ?
- B14.** Que vaut l'écart relatif pour une distance réelle robot-obstacle de 1,5 m et une température $\theta = 30^\circ\text{C}$? Est-il pertinent d'intégrer un capteur de température au robot pour estimer les perturbations dues aux variations de température pouvant exister dans le domaine de détection ?

Dans toute la suite du problème, on prendra pour valeur de la célérité des ondes ultrasonores $c = 343 \text{ m.s}^{-1}$ pour une température de l'air de 20°C .

C / RÉFLEXION DE L'ONDE ULTRASONORE

On désire, dans cette partie, vérifier que l'onde ultrasonore est bien réfléchiée par les matériaux usuels rencontrés dans une maison.

Pour cela, on étudie la réflexion et la transmission d'une onde ultrasonore sur une interface plane séparant l'air (milieu 1) d'un milieu solide (milieu 2), les deux milieux sont supposés s'étendre à l'infini.

On considère que l'interface plane est de masse négligeable, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation et au repos dans le référentiel d'étude en l'absence d'onde acoustique. On place désormais l'origine du repère à l'interface.

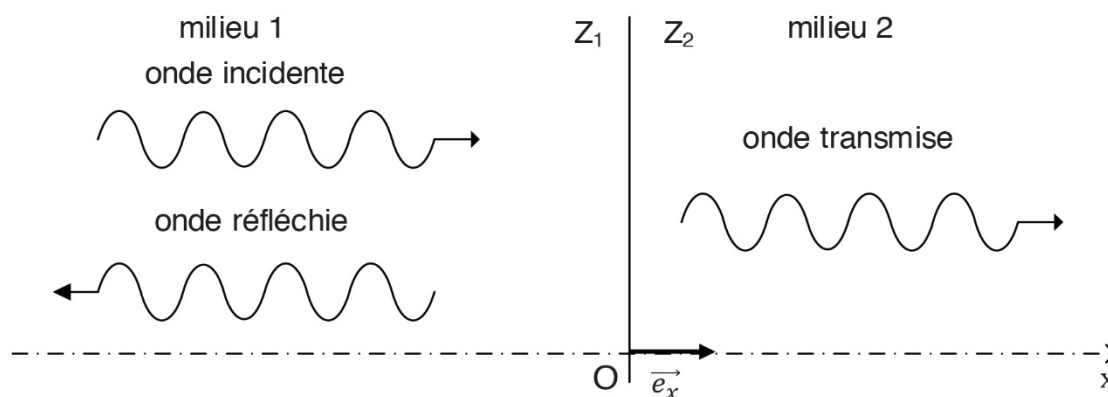


Figure 4 – Réflexion et transmission sur une interface plane

On considère le cas d'ondes planes progressives, harmoniques se propageant suivant l'axe $(0, \vec{e}_x)$ à la célérité c .

On adopte la notation complexe pour les surpressions instantanées et pour les vitesses instantanées.

De plus, on introduit l'impédance acoustique Z_i d'un milieu i , coefficient supposé réel positif.

On a donc pour l'onde incidente :

- $\underline{\vec{v}}_i(x, t) = \underline{v}_i(x, t) \vec{e}_x = v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] \vec{e}_x$
- $\underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] = Z_1 \cdot v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] ;$

pour l'onde réfléchie :

- $\underline{\vec{v}}_r(x, t) = \underline{v}_r(x, t) \vec{e}_x = v_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] \vec{e}_x$
- $\underline{p}_r(x, t) = p_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] = -Z_1 \cdot v_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] ;$

et pour l'onde transmise :

- $\underline{\vec{v}}_t(x, t) = \underline{v}_t(x, t) \vec{e}_x = v_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)] \vec{e}_x$
- $\underline{p}_t(x, t) = p_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)] = Z_2 \cdot v_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)] ;$

où toutes les amplitudes v_{i0} , v_{r0} et v_{t0} sont des coefficients supposés réels.

C1. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la pression et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}. \quad (\text{R4})$$

C2. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la vitesse et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$v_{i0} + v_{r0} = v_{t0}. \quad (\text{R5})$$

C3. Dédurre des relations **(R4)** et **(R5)** les expressions des coefficients de réflexion $r = \frac{v_{r0}}{v_{i0}}$ et de transmission $t = \frac{v_{t0}}{v_{i0}}$ en amplitude, en fonction de Z_1 et de Z_2 .

On introduit le vecteur de Poynting acoustique réel $\vec{\pi}$ associé au vecteur de Poynting acoustique complexe $\underline{\vec{\pi}}$ défini par $\underline{\vec{\pi}} = \underline{p}^* \cdot \underline{\vec{v}}$ où $\underline{p}^*$ est le nombre complexe conjugué de $\underline{p}$. Le module de la valeur moyenne temporelle de $\vec{\pi}$ est donnée par la relation :

$$\|\langle \vec{\pi} \rangle\| = \left\| \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{\vec{\pi}}) \right\|$$

où Re est la partie réelle d'un nombre complexe.

Au niveau de l'interface, en $x = 0$, on définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance par :

$$R = \frac{\|\langle \vec{\pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_i \rangle\|} \quad T = \frac{\|\langle \vec{\pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_i \rangle\|}.$$

C4. Quelle est la signification physique du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$? Quelle est son unité usuelle ?

C5. Exprimer R et T en fonction de Z_1 et de Z_2 .

C6. En déduire que $R + T = 1$. Que traduit cette relation ?

Le tracé du coefficient de transmission en puissance entre deux milieux en fonction du rapport de leur impédance acoustique donne la courbe suivante :

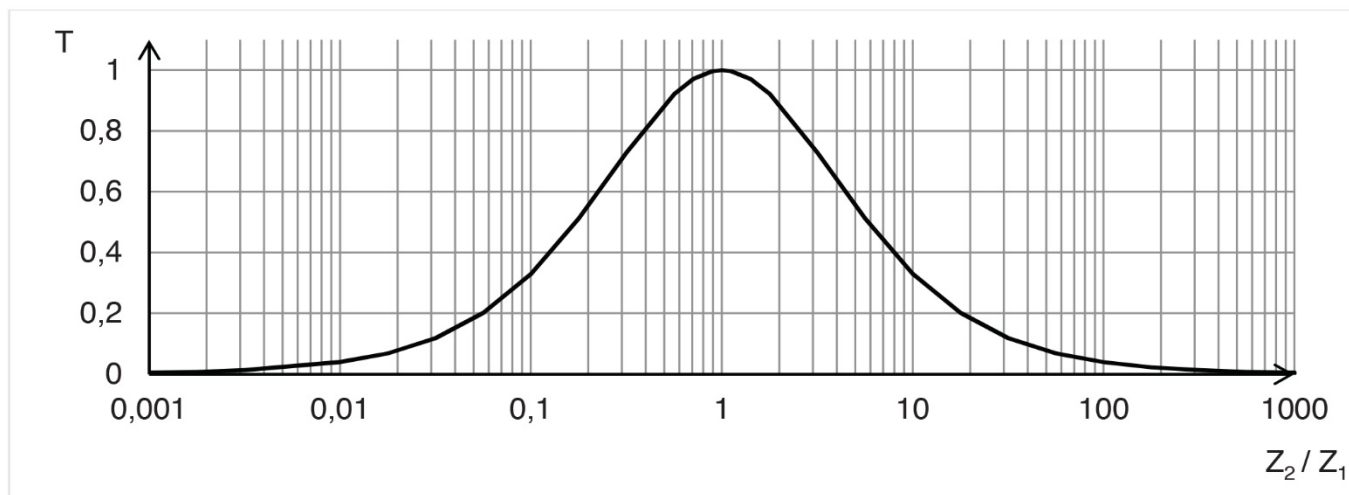


Figure 5 – Coefficient de transmission en puissance en fonction du rapport des impédances

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de l'impédance acoustique de quelques milieux présents dans une maison.

Milieu	Impédance acoustique Z ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)
air	$4,2 \cdot 10^2$
béton	$8,8 \cdot 10^6$
bois dur	$2,8 \cdot 10^6$
verre	$1,4 \cdot 10^7$
polystyrène expansé	$6,0 \cdot 10^3$
milieu biologique	$1,5 \cdot 10^6$

Figure 6 – Impédance acoustique de quelques milieux

- C7.** En utilisant les figures 5 et 6, et en expliquant votre raisonnement, déterminer le milieu que le robot autonome détectera le moins. Pour ce milieu, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission. L'onde est-elle bien réfléchiée par les matériaux usuels rencontrés dans une maison ?

D / DÉTECTION D'UN OBSTACLE MOBILE

Effet Doppler

Le robot doit aussi être capable de détecter des obstacles mobiles : enfant ou animal domestique se déplaçant.

On étudie donc, dans cette partie, la réflexion d'une onde ultrasonore sur un obstacle (ou paroi) assimilé à une interface plane, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation.

L'obstacle se déplace en direction de l'émetteur à vitesse constante $\vec{V} = -V \vec{e}_x$.

On place l'origine du repère à la position initiale de l'obstacle, la position de ce dernier est donc : $x_p(t) = -Vt$

On admet, dans cette partie, qu'il n'y a pas d'onde transmise.

On néglige l'effet de l'écoulement de l'air engendré par le déplacement de la paroi, c'est-à-dire que l'on considère que les ondes incidentes et réfléchies se propagent comme si l'air était au repos.

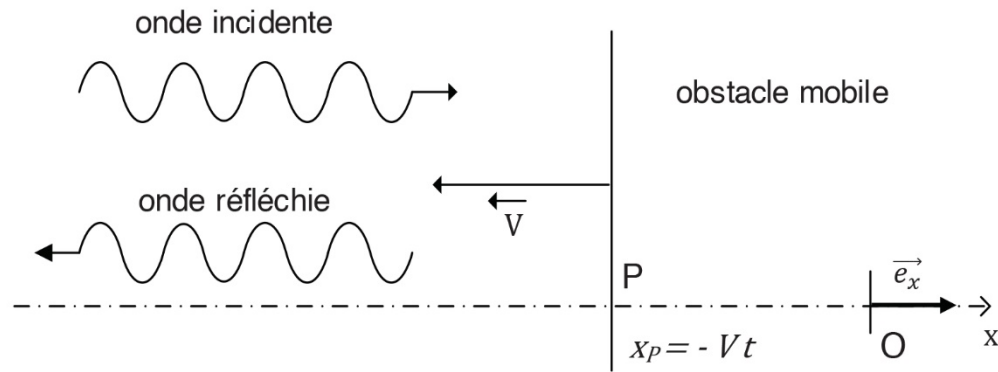


Figure 7 – Réflexion sur une interface plane mobile

On considère le cas d'ondes planes progressives, harmoniques se propageant suivant l'axe $(O, \vec{e}_x)$ à la célérité c .

On adopte la notation complexe pour les surpressions instantanées et pour les vitesses instantanées.

On a donc pour l'onde incidente :

- $\underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)]$
- $\underline{\vec{v}}_i(x, t) = \underline{v}_i(x, t) \vec{e}_x = v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] \vec{e}_x$;

pour l'onde réfléchie :

- $\underline{p}_r(x, t) = p_{r0} \exp[j(\omega_r t + k_r x)]$
- $\underline{\vec{v}}_r(x, t) = \underline{v}_r(x, t) \vec{e}_x = v_{r0} \exp[j(\omega_r t + k_r x)] \vec{e}_x$.

D1. Sachant que les vitesses instantanées incidentes $\underline{\vec{v}}_i(x, t)$ et réfléchies $\underline{\vec{v}}_r(x, t)$ vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension : $\frac{\partial^2 \underline{\vec{v}}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{v}}}{\partial t^2} = \vec{0}$, déterminer la relation reliant ω_0 et k_i ainsi que celle reliant ω_r et k_r .

D2. En considérant qu'au voisinage de l'interface la vitesse de la particule de fluide suivant l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est nulle dans le référentiel du laboratoire, déterminer la relation entre ω_0 , ω_r , k_i , k_r et V .

D3. En déduire que la pulsation ω_r de l'onde reçue par le récepteur à ultrasons, après réflexion de l'onde sonore émise à la pulsation ω_0 sur un obstacle mobile à la vitesse V est :

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}.$$

D4. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vers ce dernier, justifier la relation : $\omega_r \simeq \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right)$.

Pour la suite du problème, on considère que $\omega_r = \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right)$.

Détection hétérodyne

Pour prendre la décision adéquate : rebrousser immédiatement son chemin ou continuer encore son trajet, le robot doit déterminer la vitesse V de l'obstacle mobile. Pour cela on va effectuer une détection hétérodyne, c'est-à-dire qui exploite un décalage de fréquence. Dans un premier temps on multiplie la tension u_0 à laquelle a été soumise la lame de quartz par la tension u_r délivrée par le récepteur à ultrasons. Puis on filtre le signal u_e ainsi obtenu.

Formulaire mathématique : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

D5. Représenter sur un schéma-bloc les opérations effectuées sur les signaux $u_0(t)$ et $u_r(t)$ par la détection hétérodyne pour obtenir un signal dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse V recherchée.

On a : $u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$, $u_r(t) = U_r \cos(\omega_r t + \varphi)$ et $u_e(t) = k \cdot u_0(t) \cdot u_r(t)$.

D6. Exprimer $u_e(t)$ comme une somme de composantes harmoniques puis représenter l'allure de son spectre en pulsation.

D7. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, avec $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f_0 = 40 \text{ kHz}$, on désire ne conserver que la composante $\omega_r - \omega_0$ pour accéder à la valeur de V . Justifier ce choix. En déduire la nature du filtre nécessaire. Dans quel domaine de valeurs numériques doit se situer la pulsation de coupure ?

On cherche une réalisation simple de ce filtre, pour cela on étudie les 3 quadripôles suivants, pour lesquels on considère que l'intensité i_s du courant de sortie est nulle :

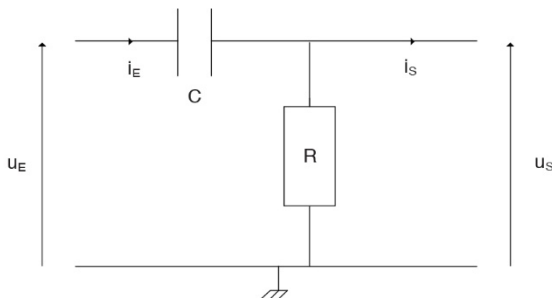


Figure 8-1 – Filtre n°1

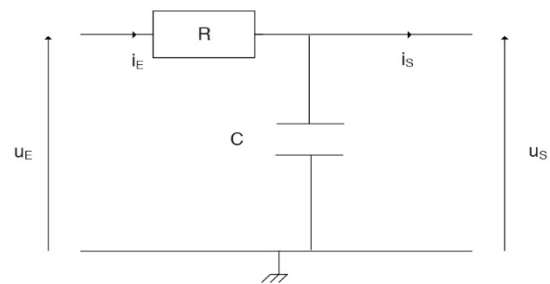


Figure 8-2 – Filtre n°2

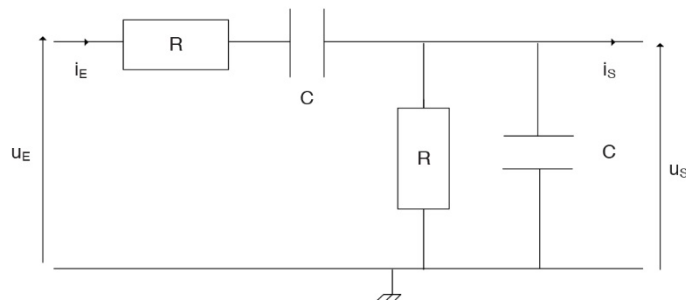


Figure 8-3 – Filtre n°3

D8. Analyser le comportement à basses et hautes fréquences des 3 quadripôles. Lequel de ces quadripôles réalise la fonction de filtrage désirée ?

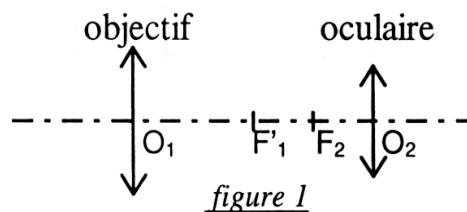
D9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert harmonique du filtre choisi. Exprimer la pulsation de coupure ω_c du filtre en fonction de R et C .

D10. On désire atténuer d'un facteur 100 l'amplitude de la composante haute fréquence du signal $u_e(t)$, déterminer la valeur de la pulsation de coupure ω_c du filtre. Quel est alors la valeur du facteur d'atténuation de la composante basse fréquence du signal ? Commenter.

Partie II – Lunette astronomique

On se propose d'observer le soleil grâce à une lunette astronomique ; le problème commence par établir les propriétés fondamentales d'un modèle de cet instrument, puis on montrera le danger d'une observation directe et la possibilité d'observer par projection de l'image solaire sur un écran.

Soit la lunette astronomique modélisée sur la figure 1.



objectif L_1 : centre O_1 , foyer image F'_1 , distance focale image $f'_1 = 900$ mm.

oculaire L_2 : centre O_2 , foyer objet F_2 , distance focale image $f'_2 = 12,5$ mm.

1. Formation de l'image et grossissement

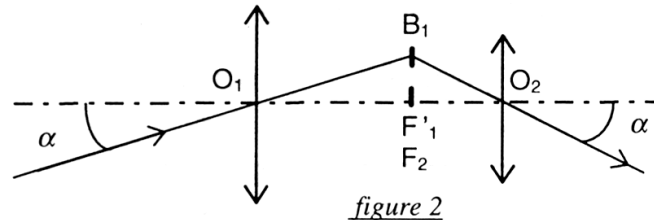
- 1.1 Que sont les conditions de Gauss et quelles propriétés générales leur respect confère-t-il à un instrument d'optique ? On se place dans tout le problème dans ces conditions.
- 1.2 On suppose que l'on peut réaliser un instrument d'optique soit à partir de lentilles, soit à partir de miroirs ; est-ce équivalent quant à la netteté des images formées ?
- 1.3 Rappeler les relations dites de conjugaison et de grandissement d'une lentille mince, avec origine au centre de la lentille.
- 1.4 La lunette est utilisée pour observer un objet réel AB et former son image $A'B'$, par l'intermédiaire de l'image A_1B_1 :

$$AB \xrightarrow{\text{objectif}} A_1B_1 \xrightarrow{\text{oculaire}} A'B'$$

A étant sur l'axe optique, on conseille de régler la position de l'oculaire de sorte que F_2 coïncide avec A_1 ; quel est l'intérêt de ce réglage pour l'observateur ?

On supposera que F_2 coïncide avec A_1 , sauf dans la troisième partie.

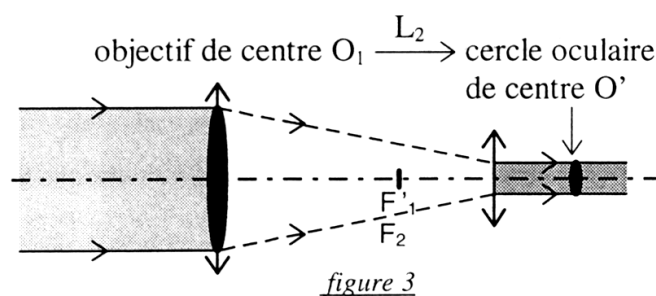
La lunette vise le centre d'un astre sphérique dont le centre A est sur l'axe optique, infiniment éloigné ; A_1 coïncide donc avec F'_1 . Le diamètre apparent de l'astre est 2α , ce qui signifie que les rayons issus des bords de l'astre frappent l'objectif avec un angle α par rapport à l'axe (figure 2). Dans le cas du soleil, $\alpha = 16' = (14/3) \cdot 10^{-3}$ rad.



- 1.5 L'image intermédiaire du soleil est $B_1B'_1$, B'_1 étant le symétrique de B_1 par rapport à F'_1 . Préciser la nature de $B_1B'_1$ par rapport à l'objectif, puis par rapport à l'oculaire.
- 1.6 Déterminer la dimension $B_1B'_1$ de l'image intermédiaire du soleil. Faire l'application numérique.
- 1.7 Un rayon issu d'un bord de l'astre sort de l'oculaire avec un angle α' par rapport à l'axe optique ; déterminer le grossissement α'/α de la lunette. Faire l'application numérique.

2. Concentration de l'énergie

Pour montrer le danger d'une observation du soleil à travers la lunette, on étudie la concentration d'énergie réalisée par l'instrument : si l'on admet que tous les rayons frappant l'objectif sortent de l'instrument par l'oculaire, tous ces rayons passent par le cercle oculaire, qui est l'image par l'oculaire du cercle limitant l'objectif (figure 3). Les rayons étant les lignes de courant de l'énergie lumineuse, l'énergie entrant dans la lunette par l'objectif en ressort par le cercle oculaire.



N.B. : les « rayons » ne correspondent pas forcément aux rayons réels ; ils servent seulement à illustrer la conservation de l'énergie lumineuse.

- 2.1 Montrer par un tracé de rayons qualitatif comment l'oculaire forme l'image d'un point du cercle limitant l'objectif (qualitativement car on ne peut respecter l'échelle).

- 2.2 Application numérique : calculer la position du cercle oculaire et le grandissement correspondant.
- 2.3 Application numérique : en déduire le facteur de concentration exprimant le rapport des puissances lumineuses par unité de surface entre le cercle oculaire et l'objectif. Quelle expérience simple et spectaculaire ce calcul évoque-t-il ? Conclure.

3. Projection de l'image solaire

Le calcul précédent montre qu'il ne faut jamais regarder le soleil à travers un instrument, sous peine de brûlure de l'œil. Il est cependant facile de l'observer sans danger, en projetant son image sur un écran ; c'est d'ailleurs ainsi que Fabricius, Galilée, Scheiner... découvrirent et étudièrent les taches solaires au début du XVII^e siècle. Pour cela, on place un écran perpendiculairement à l'axe optique et le coupant en A' ; le support de l'écran est solidaire du tube porte-oculaire, de sorte que la distance O_2A' est fixée ($O_2A' = 30$ cm). Le tube porte-oculaire peut être déplacé sur l'axe optique par rapport à l'objectif, et on n'impose plus que F_2 coïncide avec A_1 .

- 3.1 Prévoir sans calculs le sens de déplacement de l'oculaire par rapport à sa position précédente pour obtenir une image nette du soleil sur l'écran.
- 3.2 Calculer la position de l'oculaire formant l'image nette du soleil sur l'écran ; on donnera son déplacement par rapport à sa position précédente.
- 3.3 Calculer la dimension de l'image projetée du soleil.
- 3.4 L'image d'une tache solaire, située au centre de l'image du soleil, a une longueur de 6 mm ; en déduire sa longueur réelle, sachant que le rayon du soleil vaut 700 000 km.