Physique : DS10 – Savoir Faire

I) Corde vibrante (/6)

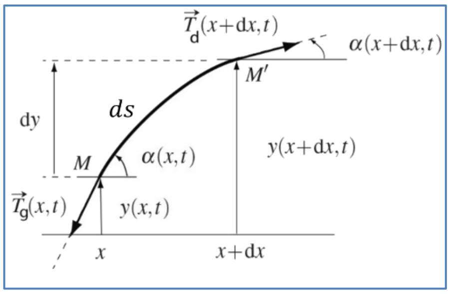
Montrer que l'énergie mécanique linéique d'une corde vibrante est de la forme : $e_m = \frac{1}{2}\mu_l \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$*, puis établir l'équation de conservation de l'énergie mécanique dans une corde :* $\frac{\partial e_m}{\partial t} + div(\vec{R}) = 0$ *où* $\vec{R}$ *est une grandeur que l'on nommera et dont on donnera l'expression.*

- Densité linéique d'énergie cinétique :

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu_l dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \Rightarrow e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

- Densité linéique d'énergie potentielle :

Calculons le travail élémentaire d'un opérateur pour allonger la corde au repos de dx à ds tel que $dl = ds - dx$.



$$dE_p = \delta W_{op} = +T_0 dl = +T_0\left(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} - dx\right)$$

$$= +T_0 dx\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right) \overset{D.L}{\approx} +T_0 \times \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- Densité linéique d'énergie mécanique :

$$\Rightarrow e_m = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} = \mu_l \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$$

D'après l'équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \mu_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial e_m}{\partial t} = T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}\right) = T_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

On introduit l'opérateur divergence :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + div\left(-T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x}\right) = 0 \Rightarrow \vec{R} = -T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x}$$

Or : $T_0\frac{\partial y}{\partial x} = T_0\tan(\alpha) \sim T_0\sin(\alpha)$

$$\Rightarrow \vec{R} = -T_0\sin(\alpha)\, v_y \overrightarrow{u_x} = -\vec{T}_0 . \vec{v}\, \overrightarrow{u_x}\ (Poynting\ mécanique)$$

II) Ondes sonores (/4)

Démontrez l'équation de propagation des ondes sonores

- *Euler linéarisé*

Vu que le fluide est parfait et qu'on néglige la pesanteur on a : $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\, p$

$$\Rightarrow \left(\mu_0 + \underbrace{\mu_1}_{\ll \mu_0}\right)\left(\underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t}}_{ordre\ 1\ en\ v_1} + \underbrace{(\vec{v}_1.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v_1}}_{ordre\ 2\ en\ v_1}\right) = -\overrightarrow{grad}\left(\underbrace{p_0}_{cste} + p_1\right)$$

On se limite aux termes du premier ordre donc tout produit de deux termes du premier ordre est un deuxième ordre et sera négligé d'où :

$$\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, p_1 \Rightarrow \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

- *Conservation de la masse linéarisée*

Soit : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + div(\mu\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mu_0+\mu_1)}{\partial t} + div\left((\mu_0+\mu_1)\vec{v}_1\right) = 0$

En se limitant aux termes du premier ordre on a donc :

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0$$

- *Transformation thermodynamique isentropique*

$$\chi_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1}\left(\frac{\mu - \mu_0}{p - p_0}\right)_s \Rightarrow \chi_s \sim \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{p_1} \; car \; \mu_0 \gg \mu_1$$

D'où :

$$\mu_1 = \mu_0 p_1 \, \chi_s$$

Les équations de couplage à une dimension donnent :

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2) \\ \mu_1 = \mu_0 \, p_1 \, \chi_s \quad (3) \end{cases}$$

Afin de découpler les équations on va calculer : $\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$ de deux façons :

$$(1) \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

$$(2) \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

Le théorème de Schwarz affirme que :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\mu_0 \, p_1 \, \chi_s)}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

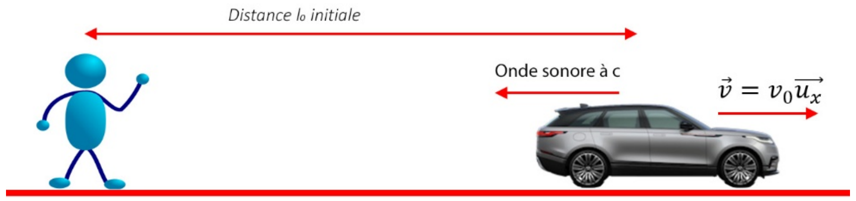
La surpression p_1 obéit donc à l'équation de d'Alembert, unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

(La masse volumique μ_1 et la vitesse v_1 vérifient la même équation.)

III) Effet Doppler (/4)

Effet Doppler. Dans le cas où l'émetteur se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ par rapport au récepteur. Démontrez le lien entre l'écart de fréquence, la fréquence de l'émetteur, v_0 et c la célérité de l'onde.



Formalisons cette situation : la distance initiale entre la personne et le haut-parleur est notée l_0.

- Le premier bip est émis en $t_0 = 0$. Il est reçu en $t'_0 = \frac{l_0}{c}$ et ainsi de suite…

N° du Bip	Instant d'émission	Distance	Instant de réception
Bip 0	$t_0 = 0$	l_0	$t'_0 = \frac{l_0}{c}$
Bip 1	$t_1 = T$	$l_1 = l_0 + v_0 T$	$t'_1 = T + \frac{l_1}{c}$
…Bip n-1	$t_{n-1} = (n-1)T$	$l_{n-1} = l_0 + v_0(n-1)T$	$t'_{n-1} = (n-1)T + \frac{l_{n-1}}{c}$
Bip n	$t_{n-1} = nT$	$l_n = l_0 + v_0 nT$	$t'_n = nT + \frac{l_n}{c}$

On déduit la période T' perçue par l'observateur :

$$T' = t'_{n+1} - t'_n = T + \frac{v_0 T}{c} = T\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$$

ainsi que la fréquence mesurée par l'observateur :

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v_0}{c}} \Rightarrow f' - f = f\left(\frac{1}{1 + \frac{v_0}{c}} - 1\right)$$

Si $\frac{v_0}{c} \ll 1$ alors on peut écrire : $\Delta f \sim -\frac{v_0}{c} f$.

IV) Klein-Gordon (/4)

Soit : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{E}} = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$ car $div\,\vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E} \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\text{MA} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\,\underline{\vec{J}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow -\mu_0\frac{\partial \underline{\vec{J}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}\vec{E} \Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\frac{\partial \underline{\vec{J}}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

Pour arriver à l'équation de dispersion, on reporte la forme de l'onde plane progressive monochromatique dans l'équation de propagation. On en déduit :

$$-k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \mu_0\,\underline{\gamma}\,j\,\omega\,\underline{\vec{E}}$$

Or : $\underline{\gamma} = -j\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega} \Rightarrow -k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \mu_0\varepsilon_0\omega_p^2\,\underline{\vec{E}}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}$$

V) Klein-Gordon is back (/4)

- Pour $\omega < \omega_p$, cela correspond à un vecteur d'onde imaginaire pur : $k = \pm j\sqrt{\frac{{\omega_p}^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm jk_2$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{j(\omega t \pm jk_2 x)}$$

En passant à la partie réelle,

$$\vec{E} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{\pm k_2 x}\cos(\omega t)$$

On s'intéresse à une onde se « propageant » suivant les x positifs, par conséquent, on conserve l'expression : $\underline{k} = -jk_2$ qui entraîne une atténuation de l'onde et non une amplification qui n'est physiquement pas acceptable.

$$\Rightarrow \vec{E} = \overrightarrow{E_0}e^{-k_2 x}\,cos(\omega t)$$

Cette onde est nommée onde évanescente, car celle-ci ne prend de valeurs notables que sur des distances de l'ordre de $\frac{1}{k_2}$ et s'évanouit rapidement au-delà, le tout sans propagation.

- Pour $\omega > \omega_p$: $k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}} = \pm k_1$

Le vecteur d'onde est réel et on a une onde plane progressive monochromatique se propageant selon $\pm\,\overrightarrow{u_x}$ selon le sens choisi. On choisit $+\overrightarrow{u_x}$ d'où :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0 cos(\omega t - k_1 x)\ \overrightarrow{u_y}$$