

Physique : DM9

IMPORTANT : La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Vers une nouvelle définition du Kelvin

L'actuelle définition de l'unité de température, le kelvin, est fondée sur la valeur du point triple de l'eau, fixé à la température $T_{PT} = 273,16 \text{ K}$.



Figure 1 Appareil à point triple de l'eau

Pour s'abstraire de la référence à une substance particulière, en l'occurrence l'eau, il serait préférable de relier la définition de l'unité de température à des constantes fondamentales. Ainsi, dans la future définition du système international d'unités, il est envisagé de fixer une valeur numérique exacte de la constante de Boltzmann k_B . Le kelvin serait alors défini par

Le kelvin est l'unité de température thermodynamique ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la constante de Boltzmann à exactement $1,3806xx \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $\text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$, unité du SI égale au $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Le symbole xx désigne les chiffres qui entreront dans le choix de k_B et qui seront fixés par l'incertitude atteinte dans plusieurs expériences en cours de développement. Par conséquent, la mesure d'une température ne portera plus sur T seul, mais sur le produit $k_B T$, lui-même relié au mètre, à la seconde et au kilogramme. Pour que le choix de la valeur exacte de k_B soit pertinent, il est essentiel que les mesures actuelles de k_B soient réalisées à l'aide d'expériences faisant appel à des lois physiques différentes. Ce problème étudie plusieurs méthodes de mesure de cette constante.

La constante des gaz parfaits R est liée à la constante de Boltzmann k_B et à la constante d'Avogadro N_A par $R = N_A k_B$.

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes. Une liste de données utiles et un formulaire figurent en fin d'énoncé.

I L'agitation thermique

I.A – L'agitation thermique dans l'atmosphère

I.A.1) On décrit le champ de pression d'une atmosphère isotherme de température T dans un champ de pesanteur uniforme \vec{g} . Le modèle de fluide est celui du gaz parfait ; la masse molaire du gaz est M . À l'altitude nulle $z = 0$, la pression est P_0 , la densité volumique de molécules est N_0 .

a) Établir, à partir de l'équilibre d'un domaine d'atmosphère, l'expression de la pression $P(z)$.

b) En déduire l'expression de la densité volumique $n_v(z) = N_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ en fonction de l'altitude, où m est la masse d'une molécule. Que représente le terme mgz pour une molécule ?

I.A.2) Déduire de la loi précédente une hauteur caractéristique H de l'atmosphère, en fonction de k_B , T , m et g . Quelle vitesse v_ℓ atteindrait une molécule en chute libre tombant de la hauteur H sans vitesse initiale ?

Comparer v_ℓ à la vitesse quadratique moyenne v_q donnée par $v_q^2 = \frac{3k_B T}{m}$ de cette molécule dans un gaz à la température T .

I.A.3) Les molécules de l'atmosphère gardent une agitation incessante. Pourtant, l'expérience de la vie courante montre qu'une balle qu'on lance finit par s'immobiliser, après éventuellement quelques rebonds.

Y a-t-il vraiment immobilisation absolue de la balle ?

I.B – L'agitation thermique dans un circuit électrique

I.B.1) Dans un métal à la température T , les électrons libres forment un gaz circulant dans le réseau cristallin des cations. Peut-on utiliser la physique non relativiste pour décrire les électrons libres à température ambiante ?

L'agitation thermique des électrons libres est responsable de fluctuations de l'intensité électrique traversant un circuit, appelées bruit thermique. Ainsi, même en l'absence de générateur, il apparaît dans un circuit fermé comportant une résistance, à toute température T non nulle, une intensité $i(t)$ et une tension $u(t)$ fluctuantes. Il s'agit ici d'établir l'expression, appelée formule de NYQUIST, de la valeur efficace de cette tension d'origine thermique.

I.B.2) Soit le circuit formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L (figure 2).

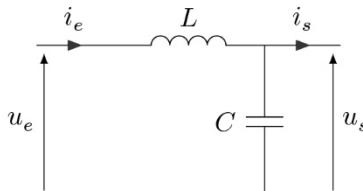


Figure 2 Circuit LC

Établir deux relations indépendantes entre les grandeurs temporelles u_e , u_s , i_e , i_s et leurs dérivées.

I.B.3) Pour étudier les fluctuations de tension et d'intensité liées au bruit thermique d'une résistance, on place à la suite de celle-ci une ligne électrique bifilaire constituée de deux fils parallèles. Cette ligne est repérée par l'axe Ox . On considère dans cette question une portion de ligne de longueur infinitésimale dx et on note respectivement λ et γ les inductance et capacité linéaires de cette ligne (figure 3).

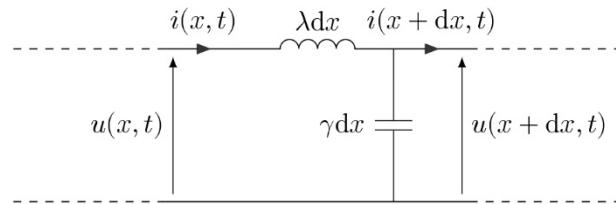


Figure 3 Schéma électrique d'une portion de ligne de longueur dx

a) Établir deux équations aux dérivées partielles indépendantes reliant les fonctions $u(x, t)$ et $i(x, t)$, λ et γ .

b) En déduire l'équation de propagation pour la seule fonction $u(x, t)$. Donner l'expression de la célérité c_e des ondes en fonction de λ et γ .

c) Soient $\underline{u}(x, t) = \underline{U} \exp i(\omega t - kx)$ et $\underline{i}(x, t) = \underline{I} \exp i(\omega t - kx)$ les solutions harmoniques en notation complexe. Établir l'équation de dispersion de la ligne. On appelle résistance caractéristique de la ligne le rapport $R_c = \underline{U}/\underline{I}$. Exprimer λ et γ en fonction de la célérité c_e et de R_c .

I.B.4) La ligne précédente a pour longueur D . Elle est fermée à ses deux extrémités par un court-circuit (figure 4) après avoir été alimentée par un générateur de tension.

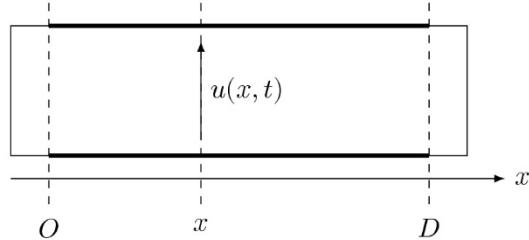


Figure 4 Ligne court-circuittée

a) On cherche les solutions $u(x, t)$ pouvant exister sur la ligne fermée sous forme de modes propres

$$u(x, t) = U(x) \cos(\omega t)$$

Établir l'équation différentielle régissant $U(x)$.

Montrer, en précisant les conditions aux limites, que les solutions s'écrivent

$$U(x) = U_{0n} \sin(K_n x)$$

où K_n est proportionnel à un entier n appelé l'ordre du mode et U_{0n} une constante quelconque. En déduire les pulsations ω_n des modes propres en fonction de n , D et c_e .

b) Dans un intervalle de fréquence de largeur Δf , quel est le nombre N de modes propres ? On supposera que Δf est suffisamment grand pour que N soit grand devant 1 ($N \gg 1$).

c) Soit $u_n(x, t)$ le mode propre d'ordre n d'amplitude U_{0n} . Quelle est l'expression de l'intensité $i_n(x, t)$ du mode d'ordre n , en fonction de U_{0n} , n , R_c , D et ω_n ? On prendra l'intensité nulle pour $U_{0n} = 0$.

I.B.5)

a) Donner l'expression de l'énergie de $e_n(x, t)$ emmagasinée dans le tronçon de ligne entre les abscisses x et $x + dx$ pour le mode d'ordre n , en fonction de U_{0n} , γ , λ , K_n et ω_n . Exprimer sa moyenne temporelle $\langle e_n \rangle(x)$. Commenter.

b) En déduire l'énergie moyenne $\langle E_n \rangle$ du mode d'ordre n dans la ligne entière en fonction de U_{0n} , R_c , c_e et D .

I.B.6) Les modes propres sont générés par l'agitation thermique dans la résistance branchée à l'entrée de la ligne, qui est ensuite remplacée instantanément par un court-circuit. Le transfert d'énergie entre la résistance et la ligne est réalisé lorsque la résistance caractéristique R_c de la ligne est égale à la résistance R . Dans ce cas, on montre qu'en moyenne, l'énergie du mode d'ordre n est $\langle E_n \rangle = k_B T$.

a) En déduire l'expression du carré de la valeur efficace $u_{\text{eff}, n}^2(x)$ de la tension du mode d'ordre n au point x , en fonction de R , D , c_e , k_B et T . Montrer que $u_{\text{eff}, n}^2(x) = U_{\text{eff}, n}^2 \sin^2(K_n x)$ où $U_{\text{eff}, n}$ est une constante, appelée valeur efficace du mode n , qu'on déterminera.

b) Les carrés des valeurs efficaces des différents modes s'ajoutent. En déduire que la valeur efficace U_{eff} correspondant aux modes dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle de fréquence de largeur Δf est donnée par la formule de NYQUIST

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{4 k_B T R \Delta f}$$

I.B.7) Les modes propres générés par la résistance sont mesurés par une chaîne électronique schématisée ci-dessous (figure 5).

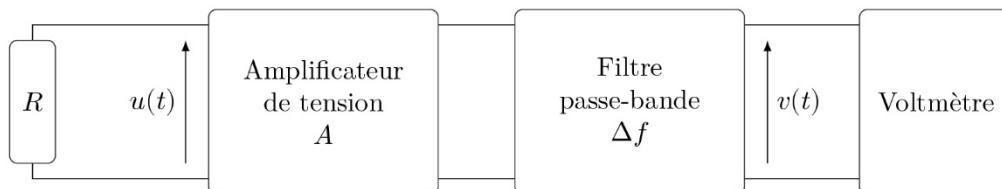


Figure 5 Mesure de la tension efficace de bruit thermique

On trace (figure 6) la valeur efficace v_{eff} mesurée par le voltmètre en fonction de la résistance pour deux valeurs de la bande passante Δf , pour $A = 500$ et $T = 300$ K.

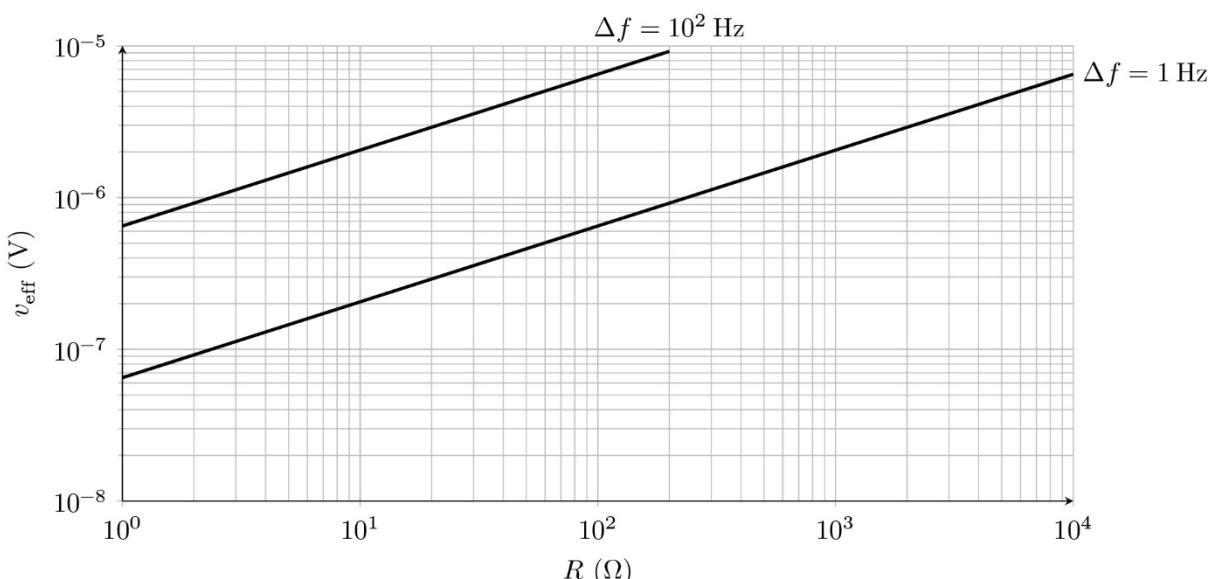


Figure 6 Valeurs efficaces $v_{\text{eff}}(R)$

a) Montrer que ces courbes sont compatibles avec la formule de NYQUIST. En déduire un ordre de grandeur de la constante de Boltzmann.

b) Pourquoi faut-il protéger le montage expérimental par une enceinte métallique ?

Une mesure précise nécessite plusieurs jours d'acquisition. Quels sont alors les facteurs qui peuvent en limiter la précision ?

II Mesure acoustique

La méthode consiste à mesurer la vitesse des ondes acoustiques dans un gaz, l'argon, en utilisant un résonateur sphérique de rayon a . Ces mesures sont effectuées à la température T_{PT} du point triple de l'eau, pour des pressions statiques allant de 0,5 à 7 bar.

II.A – Principe

On considère une onde acoustique plane, se propageant selon l'axe cartésien Ox . Cette onde est décrite par le champ de surpression $\pi(x, t)$, le champ eulérien des vitesses $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$ et le champ de masse volumique $\mu(x, t)$. Le milieu de propagation est un fluide caractérisé par sa masse volumique statique μ_0 , sa pression statique P_0 et sa compressibilité isentropique $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$.

II.A.1) À la température $T_{PT} = 273,16\text{K}$, quel est l'ordre de grandeur de la pression P_{\lim} en dessous de laquelle un gaz réel peut être décrit par le modèle du gaz parfait ? On considérera que les interactions intermoléculaires ont une portée de l'ordre de 5 nm et qu'un gaz est parfait si les distances moyennes entre molécules sont supérieures à la portée de l'interaction.

II.A.2)

a) Établir, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation de d'Alembert vérifiée par la surpression $\pi(x, t)$. En déduire l'expression de la célérité c_a des ondes acoustiques en fonction de μ_0 et χ_S .

b) Exprimer la compressibilité isotherme $\chi_T = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T$ d'un gaz parfait.

On montre que $\chi_S = \frac{\chi_T}{\gamma}$, où γ est le coefficient de Laplace. En déduire que

$$c_a^2 = \frac{\gamma N_A k_B T}{M}$$

où M est la masse molaire du gaz et T la température absolue.

c) Pour un gaz réel, la célérité des ondes acoustiques est donnée, au premier ordre par rapport à la pression P , par

$$c_a^2 = \frac{\gamma N_A k_B T}{M} (1 + \beta P)$$

où $\beta = 1,3 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ pour l'argon.

Pour quelles valeurs de la pression la célérité des ondes acoustiques dans l'argon ne s'écarte-t-elle pas de celle d'un gaz parfait de plus de 10^{-6} en valeur relative ?

II.A.3) L'incertitude relative sur k_B doit être au plus égale à 2×10^{-6} . Le tableau ci-dessous donne les valeurs et incertitudes relatives de diverses grandeurs, dont la masse molaire de l'argon (M_{Ar}) et son coefficient de Laplace (γ_{Ar}).

Valeur	Incertitude relative
$N_A = 6,022\,140\,86 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$1,2 \times 10^{-8}$
$M_{\text{Ar}} = 39,947\,85 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$	$1,5 \times 10^{-6}$
$\gamma_{\text{Ar}} = 5/3$	0
$T = T_{PT} = 273,16 \text{ K}$	3×10^{-7}

Déterminer l'expression de l'incertitude relative $\frac{\delta k_B}{k_B}$ en fonction des incertitudes relatives des autres grandeurs.

Quelle est la valeur maximale admissible de l'incertitude relative de la célérité des ondes acoustiques $\frac{\delta c_a}{c_a}$ dans l'argon à la température T_{PT} ?

II.B – L’onde acoustique sphérique

En raison de la forme du résonateur, on étudie les ondes sonores qui possèdent la symétrie sphérique. En particulier, le champ de surpression s’écrit $\pi(r, t)$ et le champ des vitesses $\vec{v}(r, t) = v(r, t) \vec{e}_r$ où r est la coordonnée sphérique radiale et \vec{e}_r le vecteur unitaire associé.

II.B.1) Équation du potentiel

a) Montrer qu’on peut définir un potentiel des vitesses $\phi(r, t)$. Relier une dérivée partielle du potentiel au champ de surpression et à la masse volumique μ_0 , en considérant le potentiel identiquement nul si $\pi(r, t) = 0$ quel que soit le temps t .

b) La surpression obéit à l’équation de d’Alembert généralisée

$$\Delta\pi(r, t) - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}(r, t) = 0$$

Montrer que le potentiel des vitesses vérifie la même équation.

On cherche des solutions de la forme $\phi(r, t) = f(r) \cos(\omega t)$, appelées modes propres radiaux.

II.B.2) Les ondes sont confinées dans le résonateur (de rayon a).

Quelle en est la conséquence sur l’ensemble des pulsations ω admissibles ?

Les parois du résonateur sont supposées ici indéformables. En déduire une condition aux limites que l’on exprimera sur $f(r)$ ou ses dérivées.

II.B.3) Le vecteur densité de courant énergétique est défini par $\vec{j}_e(r, t) = \pi(r, t) \vec{v}(r, t)$.

Exprimer $\vec{j}_e(r, t)$ en fonction de f , f' , μ_0 et ω .

Interpréter la valeur moyenne $\langle \vec{j}_e \rangle$.

II.B.4) Montrer que la fonction $rf(r)$ vérifie une équation classique dont on donnera les solutions, en posant $k = \frac{\omega}{c_a}$.

L’amplitude des ondes doit être définie en tout point du volume du résonateur ; en déduire l’expression du potentiel $\phi(r, t)$ à une constante multiplicative près.

II.B.5) Donner l’expression de la fréquence de résonance ν_n des modes propres radiaux en fonction de la vitesse du son c_a , du rayon a du résonateur et de la n -ième racine non nulle x_n d’une fonction à préciser.

II.B.6) La précision exigée sur la valeur c_a nécessite des incertitudes sur la mesure du rayon a du résonateur et de la fréquence des modes suffisamment faibles. Les valeurs de ces grandeurs et leurs incertitudes relatives sont tabulées ci-dessous.

Valeur	Incertitude relative
$a = 5,000\ 908\ 7 \times 10^{-2}$ m	$1,8 \times 10^{-6}$
$\nu_1 = 4,402\ 004\ 068 \times 10^3$ Hz	5×10^{-10}
$x_1 = 4,493\ 409\ 457\ 91$	2×10^{-11}

En déduire la valeur de la célérité c_a et l’incertitude relative $\frac{\delta c_a}{c_a}$. L’incertitude δc_a est-elle acceptable ?

II.B.7) Calculer la valeur de la constante de Boltzmann k_B déterminée par cette mesure, ainsi que son incertitude relative $\frac{\delta k_B}{k_B}$ et son incertitude absolue δk_B . Combien de chiffres significatifs peut-on fixer par cette mesure ?

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602\,176\,621 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022\,140\,86 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626\,070\,040 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
	$\hbar = h/2\pi = 1,054\,571\,800 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109\,383\,56 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse de l'atome d'hydrogène	$m_H = 1,673\,72 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse molaire de l'ammoniac	$M_{\text{NH}_3} = 17,031 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Température du point triple de l'eau	$T_{PT} = 273,16 \text{ K}$

Formulaire

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$$

Moyenne d'une fonction

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt$$

Moyenne quadratique (ou valeur efficace)

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

Composition des incertitudes

$$\text{Si } f = g^\alpha h^\beta \text{ et } g \text{ et } h \text{ sont indépendants, alors } \frac{\delta f}{f} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\delta g}{g} \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\delta h}{h} \right)^2}$$

Laplacien scalaire d'une fonction de la variable radiale sphérique r

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf(r))}{\partial r^2}$$

Gradient en coordonnées sphériques

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Rotationnel en coordonnées sphériques

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

Rotationnel du rotationnel

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

• • • FIN • • •