

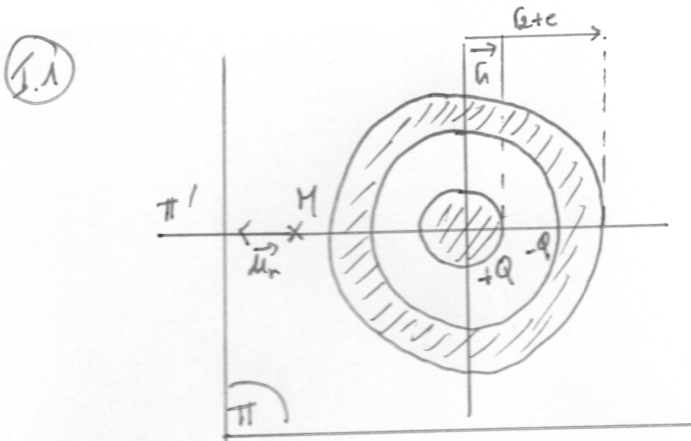
Physique : DM8

Partie I – Câble coaxial (Banque PT – 2008)

Barème : /46

- I-1) Plans et invariances /2
- I-2)
 - a- Choix de la surface et résultats /3
 - b- Un point pour la mention $Q=0$ /1
- I-3)
 - a- Graphe (axes bien définis) /2
 - b- Un point pour chaque $\Delta\vec{E}$ /2
- I-4) Bien vérifié les bornes choisies /2
- I-5) Résultat /1
- I-6) Résultat /1
- I-7) Résultat et unité /1
- I-8) Résultat et unité /1
- 2-1) Symétries et invariance /2
- 2-2) Cercle d'Ampère + Résultats /4
- 2-3)
 - a- Axes bien définis /2
 - b- D volumique /1
- 2-4)
 - a- Définition /1
 - b- Résultat /1
- 2-5) Résultat /1
- 2-6) Résultat /1
- 2-7) Résultat /1
- 3-1) Série + résultat /1
- 3-2) Résultat + unité /1
- 3-3) Résultat /1

- 1- Résultat /1
- 2- Circulation fermé + résultat /1
- 3- Résultats /2 (1+1)
- 4- Résultats /2 (1+1)
- 5- Formule /1
- 6- Ecriture sous forme d'intégrale (1) + Résultat (3) /4
- 7- Présence ou non de la casserole /1
- 8- Résultat + unité /1



• (Π) et (Π') sont plans de symétrie donc $\vec{E} = E \vec{u}_r$
 • Il y a invariance par $T(z)$ et $R(\theta)$ d'où $\vec{E} = \vec{E}(r)$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} = E(r) \vec{u}_r}$$

1.2.a) Nous avons affaire à une distribution surfacique, si on prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur l on a :

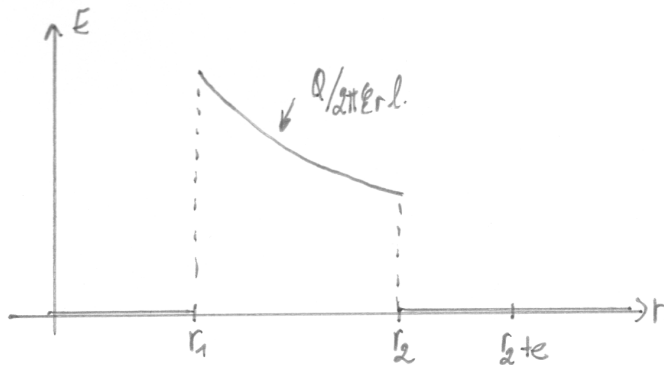
$$\oint_{\Sigma_g} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{int}/\epsilon \quad (\Rightarrow) \quad E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{int}}{\epsilon}$$

Donc :

$$\begin{cases} \text{si } r < r_1 : q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r < r_1) = \vec{0} \\ \text{si } r_1 < r < r_2 : q_{int} = Q \Rightarrow \vec{E}(r_1 < r < r_2) = \frac{Q}{2\pi\epsilon r l} \vec{u}_r \\ \text{si } r_2 < r < r_2 + e : q_{int} = Q - Q = 0 \Rightarrow \vec{E}(r_2 < r < r_2 + e) = \vec{0} \end{cases}$$

1.2.b) De m. pour $r > r_2 + e$, $q_{int} = Q - Q = 0 \Rightarrow \underline{\vec{E}(r > r_2 + e) = \vec{0}}$

1.3.a)



1.3.b) On a discontinuité de $E(r)$ car on traverse des densités surfaciques :

$$\text{-- en } r_1 : \vec{E}(r_1^+) - \vec{E}(r_1^-) = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l r_1} \vec{u}_r = \frac{\sigma_1 \times 2\pi\epsilon_0 l}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l r_1}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{E} = \frac{\sigma_1}{\epsilon} \vec{u}_r$$

$$\text{-- en } r_2 : \vec{E}(r_2^+) - \vec{E}(r_2^-) = \frac{-Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l r_2} \vec{u}_r \Rightarrow \Delta\vec{E} = \frac{-\sigma_2}{\epsilon} \vec{u}_r$$

1.4) Soit $\vec{E} = -\text{grad}V$ d'où $dV = -E dr$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l r} dr$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

1.5) Soit $Q = CV_{12} \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}$

D'où par unité de longueur : $C_1 = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln(r_2/r_1)}$

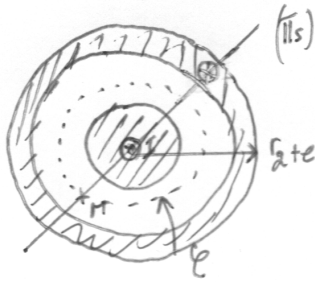
1.6) Soit $W_e = \frac{1}{2} CV_{12}^2 = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}\right)^2 \left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^2$

$$\Rightarrow W_e = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln(r_2/r_1)$$

1.7) On a $C_1 = 92,4 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

1.8) Et : $W_e = \frac{1}{2} C_1 l V_{12}^2 = \underline{\underline{4,62 \cdot 10^{-9} \text{ J}}}$

2.1)



(Π_s) est plan de symétrie donc $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$.
 Il y a invariance par $R(\theta)$ et $T(z)$ d'où $B = B(r)$
 $\Rightarrow \vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$

2.2) Théorème d'Ampère appliqué à un cercle de rayon r :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$

• Si $r < r_1$: $I_{\text{int}} = I \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$ car $\begin{cases} I = \int_0^{r_1} 2\pi r_1^2 \\ I_{\text{int}} = \int_0^r 2\pi r^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{B}(r < r_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} \vec{u}_\theta$$

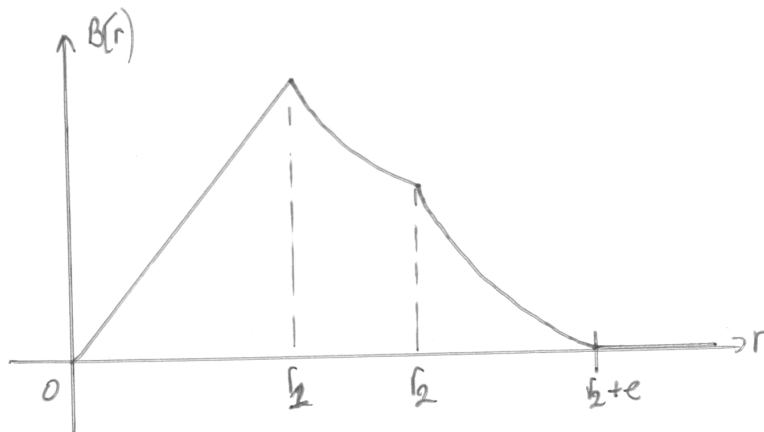
• Si $r_1 < r < r_2$: $I_{\text{int}} = I \Rightarrow \vec{B}(r_1 < r < r_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

• Si $r_2 < r < r_2 + e$: $I_{\text{int}} = I - I \frac{(r^2 - r_2^2)}{(r_2 + e)^2 - r_2^2}$ car $\begin{cases} I = \int_0^{r_2+e} 2\pi [(r_2+e)^2 - r^2] \\ I_{\text{int}} = \int_0^r 2\pi (r^2 - r_2^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[1 - \frac{r^2 - r_2^2}{(r_2 + e)^2 - r_2^2} \right] \vec{u}_\theta$$

• Si $r > r_2$: $I_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \vec{B}(r > r_2) = \vec{0}$

2.3.a)



2.3.b) Pas de discontinuité car distribution volumique, ou le résultat était prévisible

2.4.a) On a $W_m = \frac{dW_m}{d\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

2.4.b) Donc $W_m = \int \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \right)^2 \frac{d\ell}{2\mu_0}$

$$\Leftrightarrow W_m = \frac{2\pi l}{2\mu_0} \cdot \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \ln(r_2/r_1)$$

$$\Leftrightarrow W_m = \frac{l\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(r_2/r_1)$$

2.5) Or $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$$

2.6) $\Rightarrow \underline{L_1 = 2,41 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}}$

2.7) Et $W_m = \frac{1}{2} L_1 l I^2 = \underline{1,21 \cdot 10^{-8} \text{ J}}$

3.1) On sait pour un conducteur ohmique que $R = \frac{\ell}{\sigma S}$ d'où ici en série :

$$\underline{R_1 = \frac{1}{\sigma \pi r_1^2} + \frac{1}{\sigma \pi (r_3^2 - r_2^2)}}$$

3.2) Donc $\underline{R_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ m}^{-1}}$

3.3) On a $E_G = (R_u + R_1) I$ avec $R_1 \ll R_u$.

$$\Rightarrow \underline{E_G = 10 \text{ V}}$$

Partie II - Chauffage par induction (CCP - TSI - 2013)

$$1^o) \text{ On a : } \underline{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

$$2^o) \text{ Soit } C(r,t) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{j} / \sigma \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Leftrightarrow C(r,t) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma} j(r,t) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\Leftrightarrow \underline{C(r,t) = \frac{2\pi r}{\sigma} j(r,t)}$$

$$3^o) \text{ Soit } \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^r B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z \cdot r dr d\theta \vec{e}_z$$

$$\underline{\text{Si } r < a : \Phi = B_m \cos(\omega t) \cdot \frac{2\pi r^2}{2} \Rightarrow \Phi = \pi r^2 B_m \cos(\omega t) \text{ si } r < a}$$

$$\underline{\text{Si } r > a : \Phi = \pi a^2 B_m \cos(\omega t) \Rightarrow \Phi = \pi a^2 B_m \cos(\omega t) \text{ si } a < r < b}$$

$$4^o) \text{ Soit } \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \iint \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{\Leftrightarrow} \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\text{D'où : } \frac{2\pi r j}{\sigma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } r < a : \pi r^2 B_m \sin(\omega t) \cdot \omega \\ \text{Si } a < r < b : \pi a^2 B_m \sin(\omega t) \cdot \omega \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} j(r < a) = \frac{\sigma}{2} r B_m \omega \sin(\omega t) \\ j(a < r < b) = \frac{\sigma a^2}{2r} B_m \omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$5^o) \text{ Soit } \underline{P_{\text{joule}}^r = \vec{j} \cdot \vec{E}}$$

$$\begin{aligned}
 6^{\circ}) \text{ d'où } P_{\text{joule}} &= \iint_{\text{disque}} P_{\text{joule}}^v dG = 2\pi e \int_0^b \vec{J} \cdot \vec{E} r dr. \\
 &= \frac{2\pi e}{\sigma} \int_0^b J^2 r dr \\
 &= \frac{2\pi e}{\sigma} \left[\int_0^a \left(\frac{\sigma}{2} B_m \omega \sin(\omega t) \right)^2 r^3 dr + \int_a^b \left(\frac{\sigma}{2} a^2 B_m \omega \sin(\omega t) \right)^2 \frac{1}{r} dr \right] \\
 &= \frac{2\pi e}{\sigma} \frac{\sigma^2}{4} B_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \left[\frac{a^4}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) a^4 \right] \\
 &= \frac{\pi e \sigma}{2} B_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t a^4 \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right]
 \end{aligned}$$

Donc la valeur moyenne : $\langle P_{\text{joule}} \rangle = \frac{\pi e \sigma}{4} B_m^2 \omega^2 a^4 \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right]$

$$\Rightarrow \langle P_{\text{joule}} \rangle = A \omega^2 B_m^2 \text{ avec } A = \frac{\pi e \sigma}{4} a^4 \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right)$$

7^o) Le champ magnétique peut-être créé à l'aide d'une bobine alimentée en sinusoïdal. On pourra augmenter le champ avec un noyau ferromagnétique.

Le rendement est meilleur que les plaques électriques. De plus sans présence de carcasse, la plaque ne se met pas en marche, la chaleur est produite directement dans la carcasse et la température de la plaque redescend rapidement.

8^o) A.N:

$$\langle P_{\text{joule}} \rangle = \frac{\pi e \sigma}{4^2} a^4 \omega^2 B_m^2 = \underline{\underline{6 \text{ kW}}}$$