

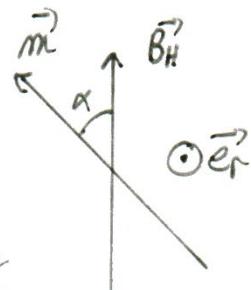
## Physique : DM7

## Physique en arctique (Mines-Ponts PC / 2019)

1) Pour un dipôle magnétostatique:  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ , donc la position d'équilibre stable correspond à  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  alignés et de même sens.

⇒ l'aiguille est dirigée vers le nord magnétique

2) D'après le TMC:  $\frac{d\vec{I}}{dt} = \sum \vec{dI}_{ext}$



Suivant  $\vec{e}_r$ :  $I\ddot{\alpha} = -mB_H \sin\alpha$  si on néglige les frottements.

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \frac{mB_H \alpha}{I} = 0 \text{ où } \sin\alpha \leq \alpha.$$

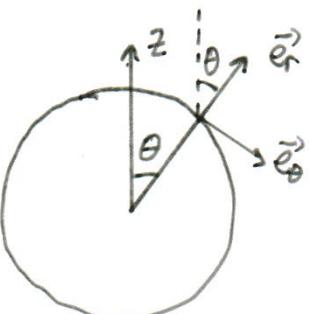
$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha &= 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{mB_H}{I} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB_H}} \end{aligned}$$

D'où  $B_H = \frac{4\pi^2 I}{m\omega_0^2}$

C'est la composante horizontale que l'on peut déterminer par cette méthode.

3) D'après l'annexe:  $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}'(\vec{R} \cdot \vec{R}') - R^2 \vec{d}\vec{b}}{R^5}$  où  $\vec{R} = \vec{r}_P$

$$\text{or } \vec{d}\vec{b} = d\alpha \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi R_P^3} \cdot [3\vec{e}_r (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_r) - \vec{e}_2]$$



$$\text{d'où } \vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[ 3\cos\theta \vec{e}_r - (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \right]$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[ 2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta \right]$$

$$\text{Or } \lambda = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[ 2\sin\lambda \vec{e}_r + \cos\lambda \vec{e}_\theta \right]$$

4). A l'équation  $\lambda = 0$  et  $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}_{\text{éq}} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[ -\vec{e}_z \right]$

Or  $\vec{B}_{\text{éq}}$  est dirigé du sud vers le nord donc  $\text{clo} < 0$

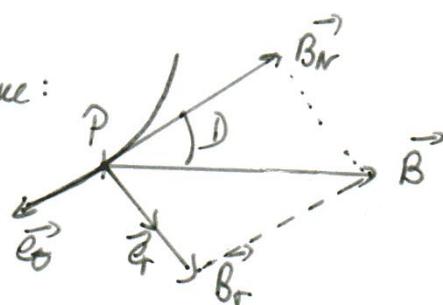
• D'où :  $\text{clo} = - \frac{4\pi R_T^3 B_{\text{éq}}}{\mu_0} \stackrel{3.10^{-5} \text{T}}{\simeq} - 8.10^{22} \text{ Am}^2$

• Aux pôles magnétiques :  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{\text{Nord}} = 2 |B_{\text{éq}}| (-\vec{e}_z) = 2 |B_{\text{éq}}| (-\vec{e}_z) \\ \vec{B}_{\text{Sud}} = 2 |B_{\text{éq}}| (+\vec{e}_z) = 2 |B_{\text{éq}}| (-\vec{e}_z) \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{Nord}} = \vec{B}_{\text{Sud}} = 6.10^{-5} (-\vec{e}_z) \text{ en Tesla.}$$

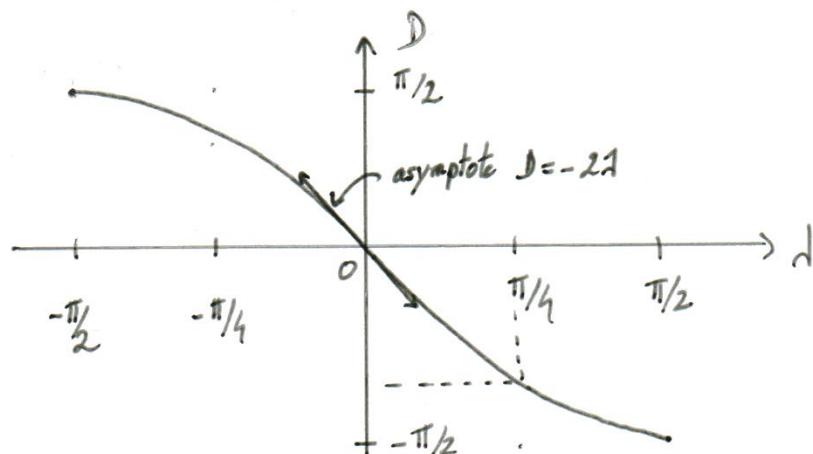
5) D'après l'énoncé l'angle  $\lambda$  est tel que :

d'où  $\left\{ \begin{array}{l} B_N / B = \cos\lambda \\ B_r / B = \sin\lambda \end{array} \right.$



or  $B_N = -B_\theta \Rightarrow \tan\lambda = - \frac{B_r}{B_\theta} = -2\tan\lambda \Rightarrow \tan\lambda = -2\tan\lambda$

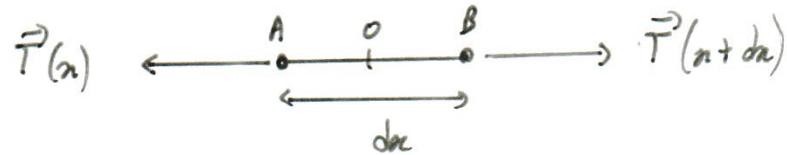
D'où le tracé de  $\mathcal{D} = \text{Arctan}[-2 \tan \alpha]$



Pour  $\alpha = \pi/4$  :  $\mathcal{D} = \text{Arctan}(-2) \approx -63^\circ$ .

- Aux pôles,  $B_H = 0$ , si bien qu'on va mesurer les fluctuations du champ magnétique au niveau de la boussole  $\Rightarrow$  les boussoles s'affolent à proximité des pôles.
- Dans l'hémisphère Nord l'aiguille plonge vers le sol.  
— " — Sud — " pointe vers le ciel.  
 → Il faut donc utiliser la boussole dans un plan vertical, et observer si l'aiguille pointe vers le sol ou le ciel.

6) Soit l'élément de corde du suivant :



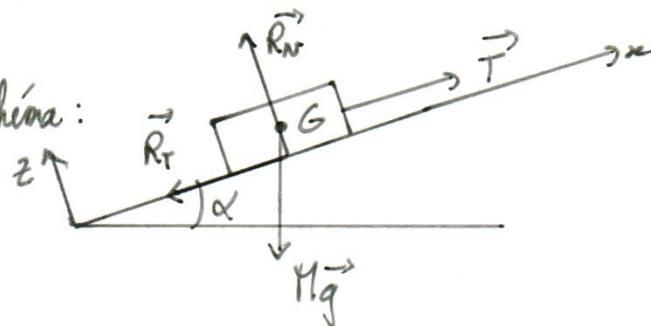
Si on applique le PFD et le TDC à cet élément de corde on a

$$\begin{cases} \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx) = 0 \\ \frac{dx}{2} \vec{e}_x \wedge \underbrace{[\vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)]}_{= -2\vec{T}(x)} = \vec{0} \end{cases}$$

D'où  $\left\{ \begin{array}{l} |T(x)| = |T(x+dx)| \\ \text{et} \end{array} \right. \Rightarrow \text{transmet les tensions}$

$\vec{T}(x)$  colinéaire à  $\vec{e}_x \Rightarrow$  les tensions sont colinéaires à la corde.

7) Effectuons un schéma :



D'après le PFD appliqué au tracé :  $M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{Mg} + \vec{T}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ox : } M \frac{dV}{dt} = T - R_T - Mg \sin \alpha & \textcircled{1} \\ \text{Oz : } 0 = R_N - Mg \cos \alpha & \textcircled{2} \end{cases}$$

Dans le cas où cela glisse :  $R_T = \mu_s R_N$ ,  $\textcircled{1}$  donne :

$$M \frac{dV}{dt} = T - \mu_s (\underbrace{Mg \cos \alpha}_{R_N}) - Mg \sin \alpha$$

Si le glissement était uniquement horizontal :  $M \frac{dV}{dt} = T - \mu_s Mg$ .

Pour consignent : 
$$\left\{ \begin{array}{l} M_s' = \mu_s \cos \alpha + \sin \alpha \\ \text{et si } \alpha \ll 1 : M_s' = \mu_s + \alpha \end{array} \right.$$

8°) Si le traineau est immobile : 
$$\left\{ \begin{array}{l} (0_x) : F_0 - R_T = 0 \\ (0_z) : R_N - Mg = 0 \end{array} \right.$$

On il n'y a pas de mouvement tant que  $R_T < \mu_s R_N$   
 $\Leftrightarrow F_0 < \mu_s Mg$

D'où le valeur limite de  $F_0$  :  $F_0 = \mu_s Mg \quad \boxed{= 400 \text{ N}}$

9°) de PFD s'écrit : 
$$\left\{ \begin{array}{l} (0_x) : M \frac{dv}{dt} = F_0 - \beta v - R_T \quad \textcircled{1} \\ (0_z) : 0 = R_N - Mg. \quad \textcircled{2} \end{array} \right.$$

①  $\Rightarrow M \frac{dv}{dt} + \beta v = F_0 - \mu_s Mg \quad (\text{glissement})$

$$\Rightarrow v(t) = A e^{-t/\beta} + \frac{F_0 - \mu_s Mg}{\beta} \quad \text{où } \beta = \frac{M}{\beta}$$

$$\text{or } v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 (1 - e^{-t/\beta}) \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = M/\beta \\ v_0 = \frac{F_0 - \mu_s Mg}{\beta} \end{array} \right.$$

$$\text{or } v(t_1) = 0,95 v_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t_1/\beta} = 0,95 \Leftrightarrow e^{-t_1/\beta} = 0,05$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \beta (-\ln 0,05)$$

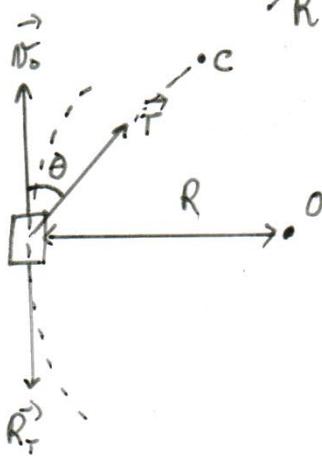
$$\Leftrightarrow t_1 = \beta \ln 20$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{M}{\beta} \ln 20 \quad \Leftrightarrow \beta = \frac{M}{t_1} \ln 20 = \underline{\underline{300 \text{ kg.s}^{-1}}}$$

$$\text{Et: } \underline{\underline{F_0 = \beta N_0 + \mu_s M g}} = \underline{\underline{1,1. \text{ kN}}}$$

10) Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est radiale d'où:

$$- \frac{M v_0^2}{R} \vec{e}_r = \vec{T} + \vec{R}_T \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{e}_r) : - \frac{M v_0^2}{R} = - T \sin \theta \\ (\vec{e}_\theta) : 0 = T \cos \theta - R_T \end{cases}$$



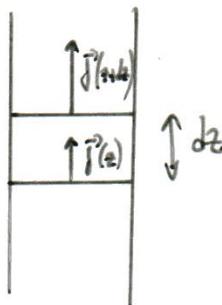
$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \frac{M v_0^2}{R} = - T \sin \theta \\ 0 = T \cos \theta - \mu_s M g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T \sin \theta = M v_0^2 / R \\ T \cos \theta = \mu_s M g \end{cases}$$

$$\text{D'où } \tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_s R g} \quad \text{et} \quad T^2 = \left( \frac{M v_0^2}{R} \right)^2 + (\mu_s M g)^2$$

$$\Leftrightarrow T = M \sqrt{\left( \frac{v_0^2}{R} \right)^2 + (\mu_s g)^2}$$

11)



D'après le premier principe:  $dV = \delta W + \delta Q$ . On suppose l'évolution à vitesse constante d'où:  $dH = \delta Q$ .

$$\text{P. g. } \frac{\partial T}{\partial t} dt \cdot \delta dz = (f_\alpha(z, t) - f_\alpha(z + dz, t)) \delta dt.$$

$$\Leftrightarrow \text{P. g. C. g. } \frac{\partial T}{\partial t} dz = - \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} dz.$$

D'après la loi de Fourier :  $f_Q = - \lambda \frac{\partial T}{\partial z}$  d'où :

$$\rho g c_g \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \text{ où } D = \frac{\lambda}{\rho g c_g}$$

12) En ordre de grandeur on peut écrire :  $\frac{T^*}{\Delta t} \sim D \frac{T^*}{(\Delta z)^2}$   
 $\Rightarrow \Delta t = (\Delta z)^2 / D$ .

Si la durée de formation de l'épaisseur de glace  $z_g(t)$  est supérieure à  $\Delta t$ ,  
on pourra alors considérer la température dans la glace indépendante du temps :  
régime quasi-stationnaire

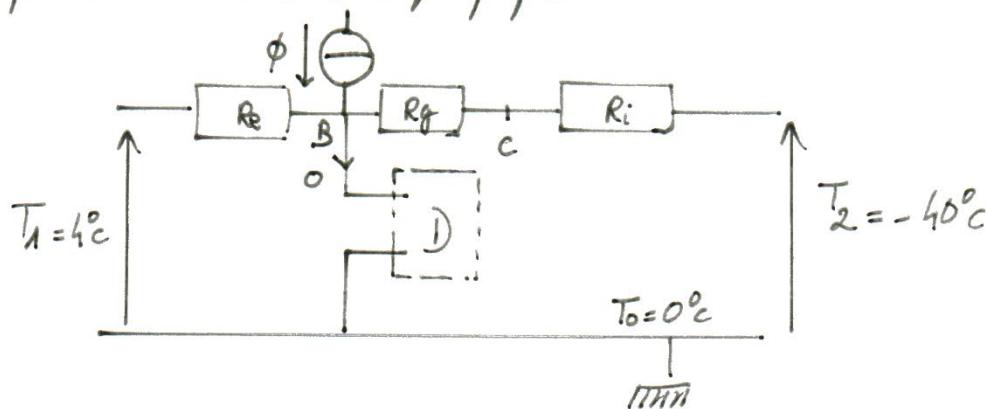
13) En coordonnées cartésiennes :  $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$  d'où :

$$R_g = \frac{z_g}{\lambda g S} \text{ et } R_e = \frac{e}{\lambda e S}$$

14) D'après la loi de Newton :  $|P_{ul}| = h (T_s - T_2)$   
puissance surfacique.

$$\text{a } R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi} \Rightarrow R_i = \frac{|T_s - T_2|}{S |P_{ul}|} \Rightarrow R_i = \frac{1}{h S}$$

15). Reprenons le schéma électrique proposé :



. Essayons de représenter l'analogie de la partie sèche



La partie représentée par le flux  $\phi$  est due au changement d'état de l'eau liquide en vapeur. Le reste correspond à l'association des résistances thermiques.

. Pendant  $dt$ , il se solidifie une masse d'eau  $dm = \rho g \cdot S dz \cdot$

$$\Rightarrow dH = dm \cdot l_f$$

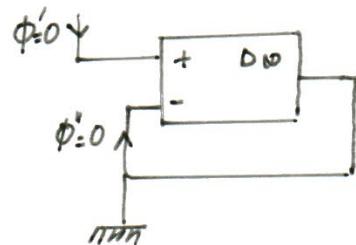
$$\Rightarrow dH = \rho g \cdot S dz \cdot l_f$$

$$\text{or } dH = \phi dt$$

$$\Rightarrow \phi = \rho g \cdot S \frac{dz}{dt} l_f$$

$$\text{D'où } \phi = \rho g \cdot S N g \cdot l_f \quad \text{où } N g : \text{vitesse de croissance de la couche de glace.}$$

16) Le dispositif connu pour ce type de fonction est l'ALI idéal. On peut le brancher en montage suivant.



La différence de potentiel est nulle ce qui correspond au fait que la transformation se fait de manière isotherme car  $p$  est fixé : polici de changement d'état

17) Appliquons la loi des noeuds en B :

$$\phi + \frac{T_1 - T_0}{R_e} + \frac{T_2 - T_0}{R_g + R_i} = 0 \quad (\text{on passe jusqu'à } T_0, \text{ pour éviter l'inconnue } T_c)$$

$$\Leftrightarrow \rho_g l_f \cdot N_g \cdot S + \frac{T_1 - T_0}{e/h_e S} + \frac{T_2 - T_0}{z_g/h_g S + 1/h} = 0$$

$$\text{Or } \begin{cases} |T_1 - T_0| = \frac{1}{h_e} |T_2 - T_0| \\ \text{et } e/h_e \gg z_g/h_g + 1/h \end{cases} \Rightarrow \rho_g l_f N_g + \frac{T_2 - T_0}{z_g/h_g + 1/h} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz_g}{dt} \left( \frac{1}{h} + \frac{z_g}{h_g} \right) = - \frac{T_2 - T_0}{\rho_g l_f}$$

$$\Rightarrow dz_g \left( \frac{1}{h} + \frac{z_g}{h_g} \right) = - \frac{T_2 - T_0}{\rho_g \cdot l_f} dt$$

$$\text{On intègre : } \frac{z_g^2}{2h_g} + \frac{z_g}{h} = - \frac{T_2 - T_0}{\rho_g \cdot l_f} t + \text{cste} \quad \text{avec cste} = 0 \text{ car } z_g(0) = 0$$

que l'on doit mettre sous la forme:  $\frac{Eg}{\text{temp}} [lg zg + zg^2] = lg^2 + (longeur)^2$

$$\text{or } \begin{cases} [d] = Wm^{-1}k^{-1} \\ [h] = Wm^{-2}k^{-1} \end{cases} \Rightarrow \left[ \frac{dg}{h} \right] = m.$$

$$\text{Done: } zg^2 + \frac{2\dot{q}}{h} zg = -\frac{T_2 - T_0}{Eg \cdot g} \cdot 2\dot{q} \cdot t$$

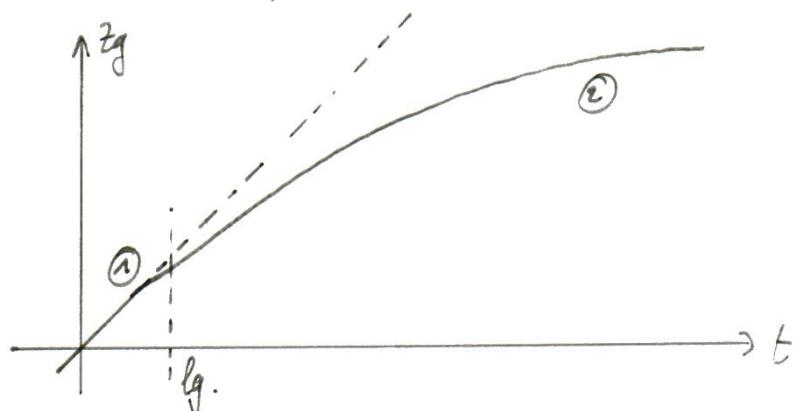
$$= \frac{T_0 - T_e}{\epsilon g f g} \cdot \frac{h^2}{2dg} \cdot \left( \frac{2dg}{h} \right)^2 t$$

$$\text{Done } \lg (lg. z_g + z_g^2) = lg^2 + \text{ on } \left\{ \begin{array}{l} 2dg/h = lg. \\ lg = \frac{2dg \cdot pg \cdot ff}{T_b - T_2} \end{array} \right.$$

$$18) \quad \text{Si } z_g \ll l_g \text{ alors: } z_g \sim \frac{l_g}{5g} t. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Si } z_g \gg l_g \text{ alors } z_g^2 \sim \frac{l_g^2}{l_g} \cdot t \Leftrightarrow z_g \sim \frac{l_g}{\sqrt{l_g}} \sqrt{t}. \quad (2)$$

D'où le tracé à l'aide des deux comportements asymptotiques :



19) Dans le cas de l'eau la viscosité diminue lorsque la température augmente :

$$\underline{\underline{\eta_e(4^\circ) > \eta_e(25^\circ)}}$$

20) La force de pesanteur magique s'écrit :  $\vec{f}_p = \frac{\delta \vec{F}_p}{\delta m} = + \vec{g}_0 = \underline{\underline{-g_0 \vec{e}_z}}$

— d'inertie de Coriolis — " :  $\vec{f}_{ic} = \frac{\delta \vec{F}_{ic}}{\delta m} = - 2 \vec{\omega} \times \vec{N}$

$$\Leftrightarrow \vec{f}_{ic} = - 2 \cdot \frac{2\pi}{T_0} \vec{e}_z \times (N_x \vec{e}_x + N_y \vec{e}_y + N_z \vec{e}_z)$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}_{ic} = \frac{4\pi}{T_0} \cdot \underline{\underline{[-N_x \vec{e}_y + N_y \vec{e}_x]}}$$

La force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = \frac{\delta \vec{F}_{ie}}{\delta m} = R^2 \vec{H}M = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$

$\Rightarrow$  Cependant cette force est incluse dans le poids par définition.

21) Équation de Navier Stokes :  $\rho_e \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} p - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e \Delta \vec{v}$   
 $+ \frac{4\pi}{T_0} (-N_x \vec{e}_y + N_y \vec{e}_x) \cdot \rho_e$ .

Sur  $Oz$  :  $\rho_e \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_z \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e \Delta v_z$

Or  $N_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = - \rho_e \cdot g_0 \Rightarrow p = p_0 - \rho_e \cdot g_0 z + f(x, y)$ .

or en  $z=0$ ,  $p(0) = p_0$   $\forall (x, y)$  d'où :  $\underline{\underline{p = p_0 - \rho_e \cdot g_0 z}}$

22) D'après l'énoncé :  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0} \text{ et } \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0} \text{ d'où } (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{0} \text{ (car } N_z = 0) \end{array} \right.$

écoulement stationnaire :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ .

D'où  $\left\{ \begin{array}{l} (0_x) : \eta_e \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \rho_e \cdot \frac{4\pi}{T_0} v_y = 0 \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} (0_y) : \eta_e \cdot \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \rho_e \cdot \frac{4\pi}{T_0} v_x = 0 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2 V_x}{dz^2} + \frac{1}{\delta^2} V_y = 0 \\ \frac{d^2 V_y}{dz^2} - \frac{1}{\delta^2} V_x = 0 \end{cases} \quad \text{ou } \delta = \frac{m_e T_0}{4 \pi \epsilon_0}$$

23) Cela rappelle les équations de couplage du mouvement "cyclotron", utilisons la même méthode de résolution:

$$\text{Posons } u = V_x + j V_y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} - j \frac{u}{\delta^2} = 0$$

$$\Rightarrow u'' - \left(\frac{f^{1/2}}{\delta}\right)^2 u = 0$$

$$\Rightarrow u'' - \left(\frac{e^{\delta \pi/4}}{\delta}\right)^2 u = 0$$

$$\Rightarrow u'' - \left(\frac{1+\delta}{\sqrt{2} \cdot \delta}\right)^2 u = 0 \quad \Rightarrow u = A e^{rz} + B e^{-rz}$$

or si  $z \rightarrow -\infty$ ,  $u$  ne doit pas diverger d'où:  $B = 0$

$$\text{si } z = 0, u = V_0 \Rightarrow A = V_0$$

$$\text{donc } u = V_0 \cdot e^{\frac{1+j}{\sqrt{2} \cdot \delta} z}$$

$$= V_0 \cdot e^{\frac{z}{\sqrt{2} \cdot \delta}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2} \cdot \delta}\right) + j \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2} \cdot \delta}\right) \right]$$

$$\text{Donc: } \begin{cases} V_x = V_0 e^{z/\sqrt{2}\delta} \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \\ V_y = V_0 e^{z/\sqrt{2}\delta} \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \end{cases}$$

24) Supposons qu'il y a continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface  $\Rightarrow \frac{1}{\delta_0} = V_x'(0)$

$$\text{d'où } u'(0) = \frac{1}{\delta_0} = rA \Rightarrow A = \frac{1}{\delta_0} \cdot \frac{\sqrt{2}\delta}{1+j} \Rightarrow A = \frac{1}{\delta_0} \cdot \delta e^{-j\pi/4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{\delta}{\delta_0} e^{z/\sqrt{2}\delta} \cos\left(z/\sqrt{2}\delta - \pi/4\right) \\ V_y = - \frac{\delta}{\delta_0} e^{z/\sqrt{2}\delta} \sin\left(z/\sqrt{2}\delta - \pi/4\right) \end{cases}$$

Donc la vitesse de l'eau en surface est à  $45^\circ$  d'droite de celle du vent ce qui est assez proche des  $20 \rightarrow 40^\circ$  de l'énoncé