

## Physique : DM6

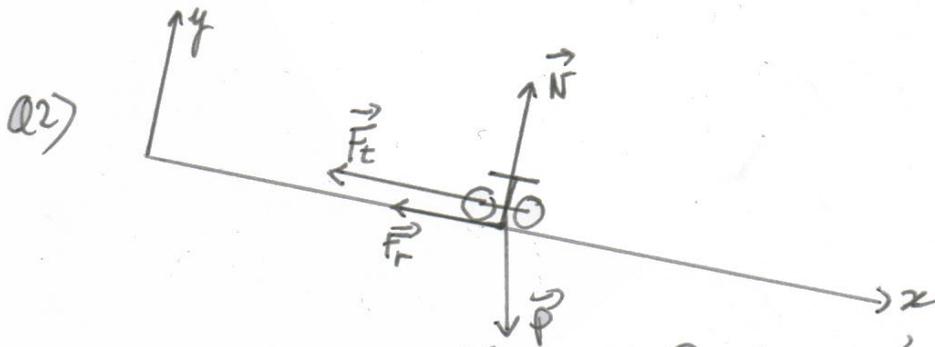
## Partie I - Améliorations des performances en cyclisme

Q1) Nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ . de nombre de Reynolds caractéristique :

- le type d'écoulement : laminaire ou turbulent.
- le caractère dominant : convection ou diffusion
- l'épaisseur de la couche limite :  $\delta = L/\sqrt{Re}$ .

• Prenons  $L = 0,5m$  (largeur) d'où :  $Re = \frac{1,225 \times 40/3,6 \times 0,5}{1,8 \cdot 10^{-5}}$   
 $\Rightarrow Re = 4 \cdot 10^5$

• Or  $10^3 < 4 \cdot 10^5 < 10^6$  donc le modèle  $F_t \propto v^2$  est adapté'



PFD au système {vélo+cycliste} dans le référentiel supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_t + \vec{F}_r + \vec{N}$$

Sur Ox :  $m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_x v^2 - \mu_r N$

Sur Oy :  $N = mg \cos \alpha$

d'où  $\frac{dv}{dt} + \frac{\rho S C_x}{2m} v^2 = (-\mu_r (mg \cos \alpha) + mg \sin \alpha) \frac{1}{m}$ .

d'où  $\frac{dv}{dt} + a v^2 = b$  où  $\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\rho S C_x}{2m} = 2,3 \cdot 10^{-3} m^{-1} \\ b = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha) = 0,92 m \cdot s^{-2} \end{array} \right.$



Q7) La  $L_{RP}$  peut se définir par:  $L_{RP} = \int_0^{t_0} v(t) dt$  où  $t_0 \approx 40s$  si on prend comme critère  $v < 0,95 v_{lim}$ .

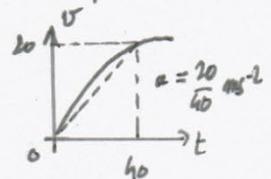
D'après la courbe 2 et 3 on voit qu'en première approximation on peut choisir

$$a = \text{cte} \approx \frac{10}{12} \text{ ms}^{-2} \quad (\text{courbe 3})$$

$$\Rightarrow L_{RP} = \frac{1}{2} a t_0^2 = \frac{10}{24} \times (40)^2 = 670 \text{ m} \quad \text{par excès}$$

Sur la courbe 1 on remarque que  $a$  s'abaisse à l'approche de  $v_{lim}$  ainsi on peut prendre  $a = 0,15 \text{ ms}^{-2} \Rightarrow L_{RP} = 400 \text{ m}$  par défaut.

$$\Rightarrow \underline{400 < L_{RP} < 670 \text{ (en mètres)}}$$



Q8) Fonction python :

def LRP(v, t):

L = 0

R = 0

LIM = 0,95 \* v[-1] # v[-1] c'est  $v_{lim}$ .

While v[i] < LIM:

L = L + v[i+1] \* (t[i+1] - t[i]) # on rajoute la distance parcourue entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ .

i = i + 1

return L

Rq: Avec ce programme et les relevés sur les courbes on obtient  $L_{RP} \approx 500 \text{ m}$

Q9) Grâce à la calculatrice on calcule  $v_c = \frac{L'}{T_c}$  puis  $\langle v_c \rangle$  et  $\mu(\langle v_c \rangle)$ :

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle v_c \rangle = 18,526 \text{ ms}^{-1} \\ \mu(\langle v_c \rangle) = \frac{\sigma_v}{\sqrt{10}} = 0,1036 \text{ ms}^{-1} \end{array} \right. \quad (\text{cf Annexe page 14})$$

Q10) D'après les histogrammes:  $\langle v_c \rangle = 18,5 \text{ ms}^{-1}$  et  $\frac{\Delta_{1/2} v_c}{2} = \frac{18,7 - 18,4}{2} = 0,15 \text{ ms}^{-1}$  (demi-largeur à mi-hauteur).

$$\cdot \langle v_p \rangle = 19,3 \text{ ms}^{-1} \text{ et } \frac{\Delta_{1/2} v_p}{2} = 0,15 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} \langle v_c \rangle - \langle v_p \rangle \approx 0,8 \text{ ms}^{-1} \\ \text{et} \\ 2u \langle v_c \rangle \approx 0,07 \text{ ms}^{-1} \end{cases}$$

Vu que  $u[\langle v_c \rangle - \langle v_p \rangle] \approx \frac{\langle v_c \rangle - \langle v_p \rangle}{10}$  on peut valider la démarche expérimentale

Remarque : la  $\frac{1}{2}$  largeur à mi-hauteur est reliée pour une gaussienne à  $u \langle v \rangle$  par :

$$\Delta v = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 0,923 u \langle v \rangle$$

$$\Rightarrow u \langle v \rangle \text{ calculé } \approx 0,03 \text{ ms}^{-1}$$

$\Rightarrow$  on retrouve la valeur obtenue sur la calculatrice.

Q11) On adapte le programme donné en calculant  $K = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{e} = \frac{2m}{e} \cdot b = \underline{\underline{119,6 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}}}$

def MonteCarlo2 (vitesseMoyenne: float, incertitude Type: float, N: int, K: float)  $\rightarrow$  [float] :

    generateur = rd.default\_rng()

    V = generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitude Type, N)

# on génère les vitesses v à l'aide de la distribution normale.

$$SCx = K / (V ** 2)$$

    return (mp.mean(SCx), mp.std(SCx))

print (MonteCarlo2 (18.52, 0.036, 10000, 119.6))

print (MonteCarlo2 (19.25, 0.041, 10000, 119.6))

On obtient des résultats proches de l'énoncé :

$$\left. \begin{aligned} SCx \text{ (classique)} &= 0,351 \pm 0,0036 \text{ m}^2 \\ SCx \text{ (profilé)} &= 0,2937 \pm 0,3051 \text{ m}^2 \end{aligned} \right\}$$

↓  
dans l'énoncé on donnait 0,30 plus tôt

$$\text{Q12) } \begin{cases} P_p = mg \cdot \vec{v} = mgv \sin \alpha \\ P_N = 0 \text{ car } \vec{N} \perp \vec{v} \\ P(\vec{F}_r) = -\mu mg \cos \alpha \cdot v \\ P(\vec{F}_t) = -\frac{1}{2} \rho SCx v^3 \end{cases}$$

Q13) On va tenir compte de l'écart  $SC_x$  de chaque profil par rapport au classique :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{|P_T(\text{profil}) - P_T(\text{classique})|}{P_T(\text{classique})} \\ &= \frac{|SC_x(\text{profil}) - SC_x(\text{classique})|}{SC_x(\text{classique})} \\ &= \frac{|0,3051 - 0,2937|}{0,3051} \\ &= \underline{3,7\%} \quad (\text{cohérent avec les } 2 \text{ à } 8\% \text{ de l'énoncé}) \end{aligned}$$

Pour l'incertitude écrivons le résultat sous la forme :  $\eta = 1 - \frac{SC_x(\text{profil})}{SC_x(\text{classique})}$

$$\Rightarrow \frac{u(\eta)}{\eta} = \sqrt{\left[ \frac{u(SC_x(\text{profil}))}{SC_x(\text{profil})} \right]^2 + \left[ \frac{u(SC_x(\text{classique}))}{SC_x(\text{classique})} \right]^2}$$

$$\Rightarrow u(\eta) = 0,064\%$$

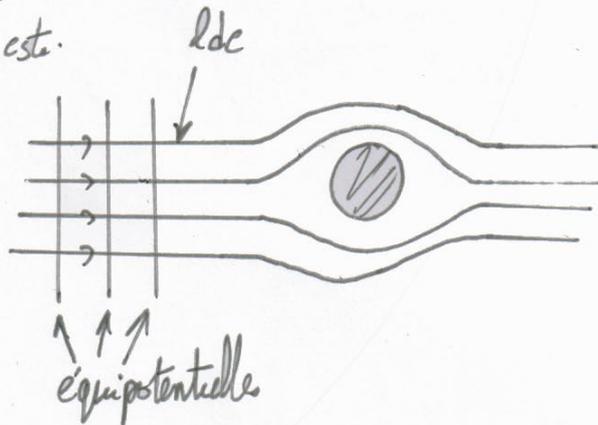
$$\text{D'où } \underline{G = 3,73 \pm 0,07\%}$$

Q27) L'écoulement est irrotationnel donc  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$   
 $\Rightarrow \vec{v} = \text{grad } \phi$

L'écoulement est incompressible donc  $\text{div } \vec{v} = 0$   
 $\Rightarrow \text{div}(\text{grad } \phi) = 0$   
 $\Rightarrow \Delta \phi = 0$

Q28) loin en amont  $\vec{v} = \vec{v}_0 \Leftrightarrow \vec{v}_0 = \text{grad } \phi$   
 $\Leftrightarrow v_0 u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} u_x$   
 $\Leftrightarrow \phi = v_0 x + \text{cte.}$

On choisit la constante nulle :  $\phi = v_0 x$



Q29) Pour  $r \gg a$  :  $\phi = \gamma r (1) \cos \theta$   
 or  $x = r \cos \theta \Rightarrow \phi = \gamma x$  d'où  $\gamma = v_0$

Q30) Soit  $\vec{v} = \text{grad } \phi \Rightarrow \begin{cases} v_{er} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \gamma \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + \gamma r \left( -\frac{2a^2}{r^3} \right) \cos \theta \\ \text{et } v_{e\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ = \gamma \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta - v_{er} \\ = \gamma \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) (-\sin \theta) = v_{e\theta} \end{cases}$

Q31) D'après les TZ on doit avoir  $N_{\text{normal}}(r=a) = 0$ . Effectivement  $N_{er}(r=a) = 0$

$$Q32) \text{ Page 13: } \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}$$

• Ecoulement parfait:  $\eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$

• Ecoulement stationnaire:  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

• pesanteur négligée et Réf. Galiléen:  $\vec{f}_v = \vec{0}$

•  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \underbrace{(\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}}_{= \vec{0} \text{ car irrotationnel.}}$

$$\text{d'où } \rho \text{ grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = - \text{grad } p$$

• Ec. homogène:  $\rho = \text{cte}$  d'où  $\text{grad} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p \right) = \vec{0}$ .

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho \frac{v^2}{2} + p = \text{cte dans tout l'écoulement}}}$$

Q33) lorsque  $v \nearrow$ ,  $p \searrow$  et vice-versa. Ainsi:

• lorsque les ldc se rapprochent en  $\theta = \pm \pi/2$ ,  $v \searrow$  et  $p \nearrow$

• à l'inverse les ldc s'écartent en  $\theta = 0$  ou  $\pi$ ,  $v \nearrow$  et  $p \searrow$

Q34) Soit  $\vec{v}(y,t) = v_x'(y,t) \vec{e}_x'$

$$\text{d'où } (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_x' \cdot \frac{\partial}{\partial x'} (v_x'(y,t) \vec{e}_x') = \vec{0}$$

• On néglige les effets de pesanteur et de pression

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x'}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}$$

On pose  $D = \frac{\eta}{\rho}$  la viscosité cinématique d'où:

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}$$

$\uparrow$   $F(v_x')$   $\uparrow$   $G(v_x')$

$$Q.35) \text{ Analyse en ODE : } \begin{cases} \mathcal{E}_{diff} = \frac{L^2}{D} \\ \mathcal{E}_{conv} = \frac{L}{U} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \frac{\mathcal{E}_{diff}}{\mathcal{E}_{conv}} = \frac{UL}{D} = \frac{UL}{\eta} \text{ c'est à dire : } \quad \boxed{Re = \frac{\mathcal{E}_{diff}}{\mathcal{E}_{conv}}}$$

Q.36) On distingue les longueurs caractéristiques :

$$\bullet \frac{\partial v_x'}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} \Rightarrow \text{en ODE : } \frac{v_x'}{\mathcal{E}_{diff}} = D \cdot \frac{v_x'}{\delta^2} \Rightarrow \mathcal{E}_{diff} = \frac{\delta^2}{D}$$

$$\bullet \text{ Pour la convection : } \mathcal{E}_{conv} = \frac{L}{U}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{U} = \frac{\delta^2}{D} \Rightarrow \delta^2 = \frac{LD}{U}$$

$$\Rightarrow \delta^2 = L^2 \cdot \underbrace{\frac{D}{UL}}_{= 1/Re}$$

$$\text{Donc } \delta^2 = \frac{L^2}{Re} \Rightarrow \delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

Q.37) Avec  $\nu = 6 \cdot 10^{-5}$ ,  $L = 0,5 \text{ m} \Rightarrow \delta = 0,8 \text{ mm}$

Q.38) hypothèse (1)  $\delta = 0,8 \text{ mm} \ll L = 0,5 \text{ m}$  vérifiée

hypothèse (2) :  $\text{div } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0$

En ordre de grandeur :  $\frac{v_x'}{L} = \frac{v_y'}{\delta}$

$$\Leftrightarrow \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{\delta}{L} \ll 1 \Leftrightarrow |v_y'| \ll |v_x'| \text{ vérifiée}$$

hypothèse (3) :  $\begin{cases} \frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} \approx \frac{v_x'}{L^2} \\ \frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2} = \frac{v_y'}{\delta^2} \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2} \right|$  le même pour  $\left| \frac{\partial v_x'}{\partial x'} \right| \ll \left| \frac{\partial v_y'}{\partial y'} \right|$

$$\text{Q31) NS: } \rho \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0} \text{ car stationnaire}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{v} = v(y') \vec{u}_x'} \right) = \eta \Delta \vec{v} - \text{grad } p + \underbrace{\vec{f}_v}_{=\vec{0} \text{ car négligé.}}$$

$$\text{d'où sur } (Ox') : \frac{\partial p}{\partial x'} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_{x'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_{x'}}{\partial y'^2} \right)$$

$$\text{L'hypothèse (3) donne donc } \left. \frac{\partial p}{\partial x'} \right|_{y'=0} = \eta \left. \frac{\partial^2 v_{x'}}{\partial y'^2} \right|_{y'=0} \quad \text{c'est m\u00eame valable dans la couche limite si } \delta \ll L.$$

$$\text{Q40) En A et B on observe que } \frac{\partial v_{x'}}{\partial y'} > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 v_{x'}}{\partial y'^2} < 0$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial p}{\partial x'} < 0 \right|$$

En C on voit que  $\frac{\partial v_{x'}}{\partial y'}$  mais on a un point d'inflexion ainsi

$$\frac{\partial^2 v_{x'}}{\partial y'^2} > 0 \text{ puis nul, puis négatif.}$$

$$\text{Donc sur le pari en C: } \left. \frac{\partial p}{\partial x'} > 0 \right|$$

Q41) A la Q33) on a vu que  $p$  diminue entre M et N puis augmente entre N et P.

donc  $\frac{\partial p}{\partial x'} > 0$  ne peut avoir lieu qu'entre N et P.

$$\text{Q42) Soit } D_m = \int_0^{S(x')} \rho v \, dS = \int_0^{S(x')} \rho v L_t \, dy'$$

$$\text{Pour un fluide parfait: } D_{m_e} = \int_0^{S(x')} \rho v_e L_t \, dy'$$

$$\text{D'o\u00f9 } \Delta D_m = \int_0^{S(x')} \rho (v_e - v) L_t \, dy'$$

$$\text{Enonc\u00e9: } \Delta D_m = \rho L_t v_e \delta^*(x')$$

$$\Rightarrow \delta^*(x') = \int_0^{S(x')} \left( 1 - \frac{v}{v_e} \right) dy'$$

Q43) Vu la définition proposée en bas de la page 10 on peut écrire :

$$\Rightarrow Dm(x') = \int_{S^*}^{S(x')} \rho L t v_e dy' = \underline{\rho L t v_e (S(x') - S^*) = Dm(x')}$$

Q44) En régime stationnaire vu qu'il y a 2 entrées :

$$S_{me} + S_{me,sup} = S_{ms}$$

$$\Leftrightarrow S_{me,sup} = S_{ms} - S_{me}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \bullet S_{me,sup} &= \rho L t v_e (x' + dx') [S(x' + dx') - S^*(x' + dx')] dt \\ &\quad - \rho L t v_e (x') [S(x') - S^*(x')] dt \\ &= \rho L t \frac{\partial}{\partial x'} [v_e(x') (S(x') - S^*(x'))] dx' dt \end{aligned}$$

• Pour la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{P}(x' + dx') - (d\vec{P}_{e,sup} + d\vec{P}(x'))}{dt} = d\vec{F}_{AB} + d\vec{F}_{ICD} + d\vec{F}_{sup} + d\vec{f}$$

$$\text{Or } \left\{ \begin{aligned} dP_{e,sup} &= S_{me,sup} v_e(x') dt \\ dF_{AB} &= \rho(x') L t S(x') \\ dF_{ICD} &= -\rho(x' + dx') L t S(x' + dx') \\ d\vec{f} &= -\zeta \omega L t dx' \end{aligned} \right.$$

$$\text{et } \left\{ \begin{aligned} dP(x') &= \rho v_e^2(x') L t (S(x') - S^*(x') - \theta(x')) dt \\ dP(x' + dx') &= \rho v_e^2(x' + dx') L t [S(x' + dx') - S^*(x' + dx') - \theta(x' + dx')] dt \end{aligned} \right.$$

D'où :

$$\left\{ \begin{aligned} \bullet dP(x' + dx') - dP(x') &= \frac{\partial}{\partial x'} [\rho v_e^2(x') L t (S(x') - S^*(x') - \theta(x'))] dt dx' \\ \bullet dP_{e,sup} &= v_e(x') \cdot \rho L t \cdot \frac{\partial}{\partial x'} [v_e(x') (S(x') - S^*(x'))] dx' dt \\ \bullet \Sigma dF &= -L t dx' \frac{\partial (\rho v_e^2(x') S(x'))}{\partial x'} - \zeta \omega L t \cdot dx' \end{aligned} \right.$$

En simplifiant par  $Lt dx'$  :

$$\left\| \begin{aligned} \frac{d}{dx'} \left[ \rho v_e^2(x') (S(x') - S^*(x') - \theta(x')) \right] - \rho v_e(x') \frac{d}{dx'} (\rho v_e(x') (S(x') - S^*(x'))) \\ = - \frac{d}{dx'} (\rho(x') S(x')) - \rho_w \\ \text{au premier ordre} \\ = - \frac{d}{dx'} [\rho(x') \cdot S(x')] - \rho_w \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Q45) . D'après Bernoulli  $p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 = \text{cste}$

$$\Rightarrow \frac{dp_e}{dx'} + \rho v_e \cdot \frac{dv_e}{dx'} = 0$$

$$\text{Enonce}' = \frac{dp}{dx'}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx'} = - \rho v_e(x') \cdot \frac{dv_e(x')}{dx'} \quad (1)$$

. (2) donne :

$$2 \rho v_e \frac{dv_e}{dx'} [S - S^* - \theta] + \rho v_e^2 \frac{d}{dx'} [S - S^* - \theta] - \rho v_e^2 \frac{d}{dx'} (S - S^*) - \rho v_e (S - S^*) \frac{dv_e}{dx'} = - \frac{dp}{dx'} S - \rho_w$$

$$\Rightarrow 2 \rho v_e \frac{dv_e}{dx'} \left[ S - S^* - \theta - \frac{S - S^*}{2} \right] + \rho v_e^2 \frac{d}{dx'} (-\theta) = - \frac{dp}{dx'} S - \rho_w$$

$$\Leftrightarrow 2 \rho v_e \frac{dv_e}{dx'} \left( \frac{S - S^*}{2} - \theta \right) - \rho v_e^2 \frac{d\theta}{dx'} \stackrel{(1)}{=} \rho v_e \frac{dv_e}{dx'} \cdot S - \rho_w$$

$$\Leftrightarrow \rho_w = \rho v_e \frac{dv_e}{dx'} (S^* + 2\theta) + \rho v_e^2 \frac{d}{dx'} (-\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho_w}{\rho v_e^2} = \frac{1}{v_e} \cdot \frac{dv_e}{dx'} (S^* + 2\theta) + \frac{d\theta}{dx'} \quad \text{Von Karman}$$

Q46) lorsque la C.L décolle on a  $T_w$  qui s'annule :

$$\Rightarrow S(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -0,0820 \text{ et } H(\lambda) = 3,40 \text{ (tableau 3)}$$

Supposons  $0 < \frac{x'}{L} < 0,1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_e(x')}{v_0} = 19 \frac{x'}{L} \\ \text{et} \\ \left(\frac{\theta(x')}{L}\right)^2 = \frac{0,0039}{Re} \end{cases}$

on a  $d = Re \cdot \left(\frac{\theta}{L}\right)^2 \cdot \frac{d(v_e/v_0)}{d(x'/L)} = 0,0039 \times 19 \neq -0,0820 \Rightarrow 0,1 < \frac{x'}{L} < 1$

d'où  $\lambda = 0,075 \left( \frac{49,522}{(2 - x'/L)^6} - 1 \right) \times (-1) = -0,0820 \Leftrightarrow \frac{49,522}{(2 - x'/L)^6} = 1 + \frac{0,082}{0,075}$

$\Leftrightarrow (2 - x'/L)^6 = 23,213 \Leftrightarrow \underline{x'/L = 0,311}$

$\Rightarrow$  le décollement se produit sur le premier tiers du dos du cycliste

Q47) D'après les images le casque va prendre la place du sillage turbulent, un peu comme la goutte d'eau et la sphère.



Autre possibilité le point de décollement recule donc le sillage diminue

Q48) Soit  $P_{\text{trainée}} = \frac{1}{2} \rho C_x S v^3$  où  $v = \frac{180 \cdot 10^3}{4 \times 3600 + 37,60 + 49} = 10,8 \text{ ms}^{-1}$   
 $\Rightarrow \underline{P_{\text{trainée}} = 192 \text{ W}}$

En 2017 :  $P_{\text{trainée}} = 213 \text{ W}$  si  $S_{Cx}$  identique :

$$\Rightarrow \Delta P = 21 \text{ W} \Rightarrow \Delta P/P \approx 11\%$$

Or d'après Q13,  $\frac{\Delta P}{P} \approx 2 \text{ à } 8\%$  en plus. Ce n'est pas seulement le casque profilé qui a permis cela mais aussi une amélioration de son physique