

Physique : DM5

Partie I - Circulation sanguine (CCP - PC - 2017)

Q1) Soit $D_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{80 \cdot 10^{-6}}{1} = 80 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$
 $\Rightarrow \underline{\underline{\Delta V(1 \text{ min}) = 4,8 \text{ L} \sim 5 \text{ L}}}$

Q2) la puissance mécanique marquée du cœur est telle que :

$$P_{cm} = \frac{P_g + P_d}{m_c} \quad \text{à} \quad \begin{cases} P_d = 0,2 \text{ W} \\ P_g = \frac{P \Delta V}{\Delta t} = \frac{16 \cdot 10^3 \times 80 \cdot 10^{-6}}{1} = 1,3 \text{ W} \\ m_c = 0,3 \text{ kg} \end{cases}$$

Donc $\underline{\underline{P_{cm} = 5 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}}}$

Q3) Les 90% d'énergie restants servent à alimenter le muscle, c'est à maintenir/développer les tissus qui le constituent et à permettre leur fonctionnement. Une partie est également dissipée sous forme thermique, pour maintenir le corps à 37°C.

Q4) D'après la figure 2: $\log N = 10 + p \log a$ où $p = -2,7$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{N}{a^p} \right) = 10$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{N = 10^{10} a^p}} \quad \text{où } p = -2,7: \text{ Murray}$$

Q5) On retrouve la notion de vitesse d'attente t.q: $D_v = N a S a = N a \cdot \pi a^2$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{N a = \frac{D_v}{\pi a^2} = 1,0 \text{ ms}^{-1}}}$$

Q6) Pour mettre en mouvement le fluide, il faut une différence de pression. La viscosité du fluide entraîne une perte de charge ce qui explique que la pression décroît avec l'écoulement.

Q7)

$$\text{Soit } \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{f}_v - \vec{\text{grad}} p + \eta \nabla^2 \vec{v} \leftarrow \text{force volumique de viscosité}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
accélération locale accélération convective forces volumiques force volumique (équivalent) de pression

Q8)

$$\text{Soit } Re = \rho \frac{L v}{\eta} = \frac{1000 \times 10 \cdot 10^{-3} \times 1}{10^{-3}} = 10000 \gg 1.$$

d'écoulement n'est pas laminaire dans l'aorte car $Re > 2000$. En revanche dans les plus petits vaisseaux il est laminaire car $Re < 2000$. Ce qui correspond à un grand nombre de vaisseaux

Q9). Écoulement permanent: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

• Soit $\vec{v} = v(r) \vec{u}_x$ d'où $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial x} v(r) \cdot \vec{u}_x = \vec{0}$

• Effet de pesanteur négligé: $\vec{f}_v \approx \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{\text{grad}} p = \eta \nabla^2 \vec{v}$

Q10)

$$\text{On a } \int d\vec{F}_+ = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r+dr} \Sigma_{r+dr} \vec{e}_x$$

$$\int d\vec{F}_- = - \eta \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_r \Sigma_r \vec{u}_x$$

D'où $d\vec{F}_+ + d\vec{F}_- = \eta \vec{u}_x [f(r+dr) - f(r)]$ où $f(r) = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot r d\theta dx$.

or $f(r+dr) = f(r) + \frac{\partial f}{\partial r} dr + o(dr) \Rightarrow f(r+dr) - f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} dr = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr d\theta dx$

Donc $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \underbrace{r d\theta dx}_{dS} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{f}_{\text{visc}} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_x$

Q11). Il y a invariance par rotation autour de Ox donc $p = p(r, x)$

De plus $\vec{\text{grad}} p = \eta \vec{\Delta} \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \text{ (1)} \\ \frac{\partial p}{r \partial \theta} = 0 \text{ (2)} \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \text{ (3)} \end{cases} \Rightarrow \underline{p = p(x)}$

Dans (1) les 2 termes de chaque côté ne dépendent pas de la même variable indépendante

donc : $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = K \Rightarrow p = Kx + B.$

or $p(0) = P_A$ et $p(L) = P_B \Rightarrow \begin{cases} B = P_A \\ K = \frac{P_B - P_A}{L} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{p(x) = P_A - \frac{P_A - P_B}{L} x}$

Et par conséquent : $\frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{P_B - P_A}{L}$

$\Leftrightarrow r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{P_B - P_A}{L} \cdot \frac{r^2}{2\eta} + C$

$\Leftrightarrow v = \frac{P_B - P_A}{L} \cdot \frac{r^2}{4\eta} + C \ln r + D. \text{ (4)}$

Or, v ne peut diverger d'où $C = 0$

et $v(a) = 0 \Rightarrow D = - \frac{P_B - P_A}{L} \frac{a^2}{4\eta} \text{ (5)}$

(4) et (5) $\Rightarrow \underline{v = \frac{P_A - P_B}{4\eta L} (a^2 - r^2)}$

Q12) Soit $D_v = \iint v dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} \alpha (a^2 - r^2) r dr d\theta = \alpha \int_0^a (a^2 - r^2) r dr \times 2\pi$
 $= \alpha \left[a^2 \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \right] \times 2\pi = \frac{\alpha \cdot a^4}{2} \cdot \pi$

$$\text{Donc } \Delta V = \frac{P_A - P_B}{8\eta L} \pi a^4$$

En électricité on note $i = \frac{\Delta V}{R}$, par analogie $\Delta V = \frac{\Delta P}{R_h}$
 $\uparrow$ C.S⁻¹ $\uparrow$ m^{3.s⁻¹}

$$\Rightarrow R_h = \frac{8\eta L}{\pi a^4}$$

Q13) la figure 3 montre N_a artères en parallèles chacune mise en série avec N_c capillaires donc :

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{tot},a} + R_{\text{tot},c} \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} \frac{1}{R_{\text{tot},a}} = \frac{N_a}{R_a} \\ \frac{1}{R_{\text{tot},c}} = \frac{N_c}{R_c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{\text{tot}} = R_a / N_a + R_c / N_c$$

$$\Rightarrow R_{\text{tot}} = \frac{8\eta}{\pi} \left[\frac{L_a}{N_a a^4} + \frac{L_c}{N_c c^4} \right]$$

Q14) le volume de la paroi d'un vaisseau de longueur L , de rayon a et d'épaisseur $e = ar$ est : $V_e = 2\pi r \times e \times L = 2\pi ar^2 L$

$$\text{Donc } V_0 = 2\pi a \left[N_a L_a a^2 + N_c L_c c^2 \right]$$

$$\text{or } dV_0 = 0 \Rightarrow 2N_a L_a a \, da = - 2N_c L_c c \, dc.$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{da} = - \frac{N_a L_a a}{N_c L_c c} \quad (8)$$

Q15) Soit $R_{\text{tot}} = \frac{8\eta}{\pi} \left[\frac{L_a}{N_a a^4} + \frac{L_c}{N_c c^4} \right]$, or $dR_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow \frac{L_a}{N_a} \cdot \frac{da}{a^5} = - \frac{L_c}{N_c} \frac{dc}{c^5}$

$$\Rightarrow \frac{dc}{da} = - \frac{L_a N_c c^5}{L_c N_a a^5} \quad (9)$$

⑧ et ⑨ donnent: $-\frac{\kappa_a N_c r_c^5}{\kappa_c N_a r_a^5} = -\frac{N_a \kappa_a r_a}{N_c \kappa_c r_c}$

$$\Leftrightarrow N_c^2 r_c^6 = N_a^2 r_a^6$$

$$\Leftrightarrow \underline{N_c r_c^3 = N_a r_a^3}$$

Q16) A la question 4°) on a trouvé $N r^{2,7} = \text{cte}$. L'exposant est légèrement plus élevé dans notre modèle. On peut mentionner les raisons suivantes.

- Modèle à deux types de vaisseaux alors qu'il y a une infinité de rayons possibles
- Modèle à régime stationnaire alors qu'avec les battements de cœur celui-ci n'est pas stationnaire.
- Le caractère newtonien supposé du sang alors qu'il est rhéofluidifiant.
- L'écoulement supposé laminaire alors que $Re(\text{aorte}) = 10000$.
- L'absence de pesanteur.
- Des vaisseaux parfaitement cylindriques

Q17) L'élasticité de l'aorte et des artères leur permet de modifier leurs sections et ainsi le débit du sang (le flux sanguin) en fonction des besoins du corps. Par exemple pour une pression artérielle donnée, l'augmentation de la section augmente le débit sanguin pendant un effort ainsi que le volume d' O_2 nécessaire. ($D_v = \text{cte} \times a^4$).

Q18) L'équation d'Euler s'écrit: $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \text{grad } p$

On néglige la pesanteur d'où: $\underline{\hspace{10em}} = - \text{grad } p$.

$$\text{Or } \vec{v} = v(x,t) \vec{e}_x \Rightarrow \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_x = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

De plus: $p(x,t) = \underbrace{p_0}_{\text{cte.}} + \tilde{p}(x,t) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$

d'où: $\underbrace{(\rho_0 + \tilde{\rho})}_{\text{ordre 0 ordre 1}} \left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{ordre 2}} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$

En se limitant aux termes majeurs: $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (18)$

Q19) Bilan de masse: $m(t+dt) - m(t) = \delta m_e - \delta m_s \Leftrightarrow \frac{\partial m}{\partial t} dt = \delta m_e - \delta m_s$

or $\begin{cases} m(t) = \rho(x,t) A(x,t) dx \\ \delta m_e = \Phi_m(x,t) \delta t \\ \delta m_s = \Phi_m(x+dx, t) \delta t \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \cdot dx = - \frac{\partial (\rho v A)}{\partial x} dx$

$\Rightarrow \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} \cdot dx = - \frac{\partial (\rho v A)}{\partial x} dx$

$\Rightarrow \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v A)}{\partial x}$

Q20) Donc: $\rho_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = 0$

or $\begin{cases} A = A_0 \tilde{p} \\ \tilde{\rho} = \rho_0 \chi_s \tilde{p} \end{cases} \Rightarrow \rho_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 A_0 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + A_0 \rho_0 \chi_s \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow (D + \chi_s) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (19)$

Q21) (18) $\Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = - \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \stackrel{(19)}{=} \rho_0 (D + \chi_s) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}$ où $c^2 = \frac{1}{\rho_0 (D + \chi_s)}$

C'est une équation d'Alembert dont la solution générale est:
 $\tilde{p} = f(x-ct) + g(x+ct)$
 Si le fluide est incompressible $\chi_s = 0 \Rightarrow c = 1/\sqrt{\rho_0 D}$ en m.s^{-1}
 On retrouve les valeurs de la Q5

IV.A.1

On a : $a \gg l$ et $b \gg l$, on peut donc considérer la plaque comme "infinie" : pas d'effets de bord. Il y a donc invariance par translation suivant $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ d'où :

$$T(x, y, z, t) = T(x, t) \quad (1)$$

IV.A.2 On fait un bilan thermique sur une tranche d'épaisseur dx et de section S entre t et $t+dt$:

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$\Leftrightarrow U(t+dt) - U(t) = \delta Q$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{du}{dt} dt dV = \left[j_{th}(x) - j_{th}(x+dx) \right] S dt$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{du}{dt} dt dV = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx S dt$$

Or d'après la loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \rho \frac{du}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Or $du = c dT \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ où } D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}} \quad (2)$

IV.A.3 En régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = Ax + B$

Avec les c.l. : $\boxed{T = \frac{T_0 - T_1}{l} x + T_1} \quad (3)$

Donc : $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx} ab$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Phi = \lambda \frac{T_1 - T_0}{l} ab} \quad (4)$$

IV.A.4

$$\text{D'où } \Phi = \frac{(T_1 - T_0)}{R_{th}} \text{ où } R_{th} = \frac{l}{\lambda_{ab}} \quad (5)$$

$$\text{Analogie à : } I = \frac{V_1 - V_0}{R} \text{ où } R = \frac{L}{\lambda_{ab}}$$

IV.B.1

$$\text{Soit } \Phi_{cc} = h(T_0 - T_a) dy dz dt \Rightarrow \Phi_{cc} = h(T_0 - T_a) dy dz$$

$$\Rightarrow [h] = \text{Wk}^{-1}\text{m}^{-2}$$

$$\text{De plus } \Phi_{cc} = \frac{\Delta T}{R_h} \Rightarrow R_h = \frac{1}{h_{ab}} \quad (6)$$

IV.B.2

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} R_{th} = \frac{l}{\lambda_{ab}} = \underline{\underline{1,1 \cdot 10^{-2} \text{ kW}^{-1}}} \\ R_h = \frac{1}{h_{ab}} = \underline{\underline{35 \text{ kW}^{-1}}} \end{array} \right.$$

Ces deux résistances étant en série $\Rightarrow R_{tot} \approx R_h$

* C'est l'air qui limite le transfert thermique $\Rightarrow$ ça ne sert à rien d'améliorer les parois, mais remplacer l'air ou augmenter la surface de contact peut-être utile.

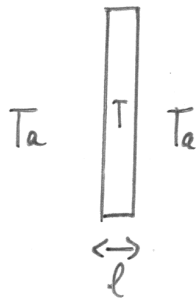
IV.C.

Question ouverte:

. Le microprocesseur est composée de fils de Cu et de puces en silicium, sur un support en silicium. On va utiliser le TDP = 15 W, et supposons que le processeur est détruit quand le cuivre fond : $T_{fus}(\text{Si}) > T_{fus}(\text{Cu})$.

. On suppose que la plaque est à température uniforme et qu'elle n'échange de transfert thermique qu'avec l'air ($R_h \gg R_{th}$):

$$\begin{aligned} \text{Calcul de la surface de contact : } S &= 2ab + 2bl + 2al \\ &= 2b(a+l) \\ &\approx \underline{\underline{2ab}} \end{aligned}$$

1^{er} principe appliqué à la plaque

$$\text{Soit } dU = m c_s dT = \delta W + \delta Q$$

$$= P_c dt - h(T - T_a) S dt.$$

$$\Leftrightarrow \rho_{si} c_{si} a b l \frac{dT}{dt} = P_c - h(T - T_a) S$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_a}{\tau} + \frac{P_c}{\rho_{si} c_{si} \times a b l}$$

$$\text{Donc } T = A e^{-t/\tau} + T_a + \frac{P_c \tau}{\rho_{si} c_{si} \cdot a b l} \quad \text{où } \tau = \frac{\rho_{si} c_{si} a b l}{h S}$$

$$= \frac{\rho_{si} c_{si} l}{2h}$$

$$\text{Donc } T = T_a + A e^{-t/\tau} + \frac{P_c}{2h a b}$$

$$\text{Hypothèse : } T(0) = T_a \quad \text{d'où } T = T_a + \frac{P_c}{2h a b} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\text{A.N : } \begin{cases} T_a = 293K \\ T(t \rightarrow \infty) = 553K \end{cases} \quad \text{et } \tau = 41s.$$

• Ni le métal, ni le silicium ne fondent dans ces conditions. Mais on a aussi à respecter

$$T_{\text{jonction}} = 100^\circ C \quad (\text{Spécification du microprocesseur})$$

$$\text{Or } T_{\text{lim}} = T(t_{\text{lim}}) = T_a + \frac{P_c}{2h a b} (1 - e^{-t_{\text{lim}}/\tau})$$

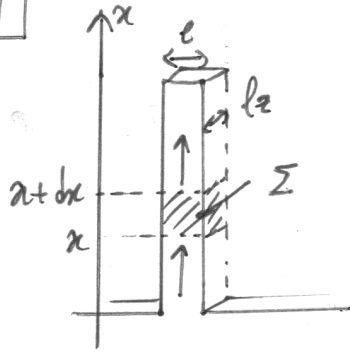
$$\Leftrightarrow \frac{T_{\text{lim}} - T_a}{P_c} \cdot 2h a b = 1 - e^{-t_{\text{lim}}/\tau}$$

$$\Leftrightarrow t_{\text{lim}} = -\tau \ln \left(1 - \frac{(T_{\text{lim}} - T_a) 2h a b}{P_c} \right) = \underline{\underline{15s}}$$

• Sans système de refroidissement efficace le processeur arrêtera de fonctionner après

$$\boxed{t = 15s} \quad (7)$$

IV.D.1



D'après le premier principe appliqué à Σ :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

En régime stationnaire : $0 = (\Phi_e + \Phi_s + \Phi_{lat}) dt$

$$\Leftrightarrow \Phi(x) - \Phi(x+dx) - h(T - T_a) dx \cdot (2e + 2lz) = 0$$

$$\Leftrightarrow - \frac{d \int_{th} S dx}{dx} - h(T - T_a) dx (2e + 2lz) = 0$$

$$\text{or } \begin{cases} \int_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \\ \text{et} \\ S = e lz \end{cases}$$

$$\Rightarrow e lz \cdot \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - h(T - T_a)(2e + 2lz) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T - T_a) = 0$$

$$\text{ou } \delta = \sqrt{\frac{\lambda e lz}{h(2e + 2lz)}} \quad (8)$$

Dont la solution est : $T - T_a = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$

or $B = 0$ sinon T diverge.

$$\text{et } T(x_1) = T_R = T_a + A e^{-x_1/\delta} \Rightarrow A = (T_R - T_a) e^{x_1/\delta}$$

$$\text{Donc } T(x) = T_a + (T_R - T_a) e^{-(x - x_1)/\delta}$$

IV.D.2

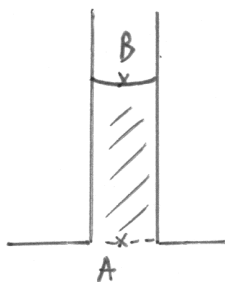
$$\begin{aligned}
 \text{Soit Paillette} &= \phi(x_1) = j_{th}(x_1) e_{lz} \\
 &= -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_1} e_{lz} \\
 &= (T_R - T_A) \frac{\lambda e_{lz}}{\delta}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{P_{radiation} = 6(T_R - T_A) \frac{\lambda e_{lz}}{\delta}} \quad (9)$$

$$\text{et } \boxed{R_{radiation} = \frac{\delta}{6\lambda e_{lz}}}$$

A.N. : $\begin{cases} P_{rad} = 44W \\ R_{rad} = 1,1 \text{ kW}^{-1} \end{cases} \ll R_a = 35 \text{ kW}^{-1} : \text{le système est efficace.}$

IV.E.1 Caloduc = tube transportant de chaleur proche de gazoduc et aqueduc.

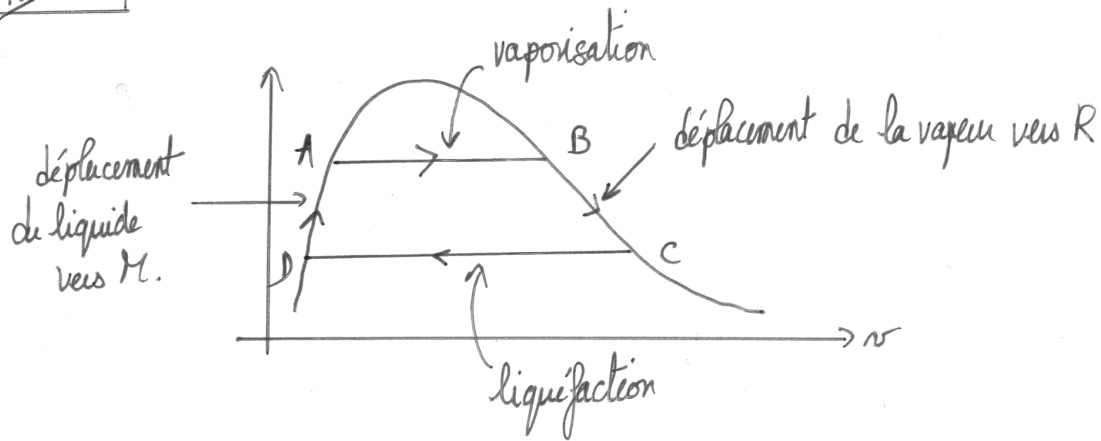
IV.E.2

les forces appliquées au fluide sont :

- les forces de pression en B et A
- le poids
- les forces de capillarité.

les forces de pression sont t.q. $\vec{F}_{PA} = -\vec{F}_{PB}$, de plus le poids travaille négativement si le fluide monte : $P = -\vec{P} \cdot \vec{v} < 0$ donc il faut un travail positif pour que le fluide monte :

$\Rightarrow$ Ce sont ces forces de capillarité qui permettent au fluide de monter (10)

IV.E.3IV.F

Soit $P_{micro} = \frac{T_R - T_M}{R_{calo}} \Rightarrow R_{calo} = \frac{T_R - T_M}{P_{micro}} = \frac{1}{20} = \underline{\underline{5,0 \cdot 10^{-2} \text{ kW}^{-1}}}$

Alors que pour un barreau en cuivre : $R_{cu} = \frac{l}{\delta S} = \frac{y_2 - y_1}{l x \cdot l z}$

$$= \frac{10}{2 \cdot 2,9 \cdot 10^{-3} \cdot 401} = \underline{\underline{4,3 \text{ kW}^{-1}}}$$

le caloduc transporte mieux l'énergie qu'un barreau de cuivre.