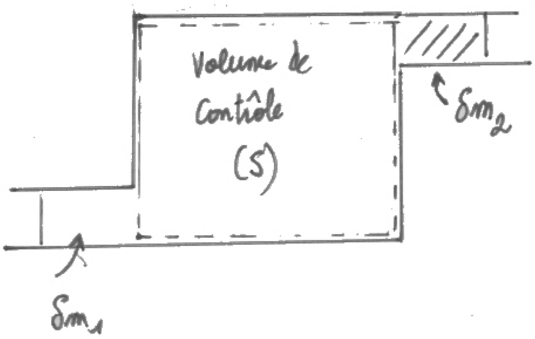
Physique : DM4

Partie I : Renouvellement de l'air dans l'habitat (CCP/PC - 2023)

Q1)



Soit (S^*) le système fermé alors : $\begin{cases} m(S^*,t) = m(S,t) + \delta m_1 \\ m(S^*,t+dt) = m(S,t+dt) + \delta m_2 \end{cases}$

Or dans (S^*) le système fermé : $dm(S^*) = 0$

$$\Rightarrow m(S,t+dt) + \delta m_2 = m(S,t) + \delta m_1$$

Or en régime stationnaire : $m(S,t+dt) = m(S,t) \Rightarrow \delta m_1 = \delta m_2$

et $\boxed{\dfrac{\delta m_1}{dt} = \dfrac{\delta m_2}{dt} = D_m}$ (1)

Q2) Soit $\delta W_p = \delta W_1 + \delta W_2$, or le système fermé gagne δV_2 et perd δV_1 d'où :

$$\delta W_p = -p_1(-\delta V_1) - p_2(\delta V_2)$$

$$\Rightarrow w_p = +p_1 \frac{\delta V_1}{\delta m_1} - p_2 \frac{\delta V_2}{\delta m_2}$$

Volume massique.

$$\Rightarrow w_p = p_1 v_1 - p_2 v_2 \quad \text{or } v = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \boxed{w_p = p_1/\rho_1 - p_2/\rho_2}$$ (2)

Q3) On effectue un bilan d'énergie interne :

$$\begin{cases} U(S^*, t+dt) = U(S, t+dt) + \delta U_2 \\ U(S^*, t) = U(S, t) + \delta U_1 \end{cases}$$

Donc $\underbrace{dU(S^*)}_{=dU} = \underbrace{dU(S)}_{=0 \text{ en régime stationnaire}} + \delta U_2 - \delta U_1$ avec $\delta U = u\,\delta m$.

$\Rightarrow dU = u_2 \delta m_2 - u_1 \delta m_1$ d'où $dU = \delta m(u_2 - u_1)$

$$\Rightarrow \boxed{dU = D_m (u_2 - u_1)\, dt} \quad 3$$

Q4) D'après le premier principe appliqué à S^* :

$$dU + dE_p + dE_c = \delta W_p + \delta W_u + \delta Q.$$

$$\Leftrightarrow D_m dt \left[(u_2 + e_{p2} + e_{c2}) - (u_1 + e_{p1} + e_{c1}) \right] = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \delta m + \delta W_u + \delta Q.$$

On divise par dt : $D_m \left[u + e_p + e_c \right]_1^2 = \left[\frac{P}{\rho} \right]_2^1 D_m + P_u + P_{th}$ où $\begin{cases} P_u = \delta W_u / dt \\ P_{th} = \delta Q / dt \end{cases}$

or $u + P/\rho = h$

donc $\boxed{D_m \left[(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (h_1 + e_{c1} + e_{p1}) \right] = P_u + P_{th}} \quad 4$

Q5) Par définition : $T_1 - T_2 = R_{th} \cdot P_{th,p}$ $\Rightarrow R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{P_{th,p}} = \dfrac{20}{5000}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_{th} = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{K\,W^{-1}}}}$$

Q6) Soit $C_p - C_v = nR$

$= \dfrac{m}{M} R \Rightarrow \overset{\text{massique}}{c_p - c_v} = R/M$

or $c_p / c_v = \gamma \Rightarrow \gamma c_v - c_v = R/M$ d'où $c_v = \dfrac{R}{M} \dfrac{1}{\gamma - 1}$

et $c_p = \dfrac{R}{M} \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} = \dfrac{8{,}31}{29 \cdot 10^{-3}} \cdot \dfrac{1{,}4}{0{,}4}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c_p = 1{,}0 \cdot 10^3\, \mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}}}$$

Q7) • Pour l'air neuf : $P_1 = D_m(h'_{ext} - h_{ext})$

car il n'y a pas de parties mobiles : $P_u = 0$

et Δe_c et $\Delta e_p = 0$ d'après l'énoncé.

De même pour l'air vicié : $P_2 = D_m(h'_{int} - h_{int})$

• L'échangeur étant parfaitement isolé du reste du système : $P_1 = -P_2$

d'où $h'_{int} - h_{int} = h_{ext} - h'_{ext}$

or $\Delta h = c_p \Delta T$ pour les gaz parfaits d'où : $\boxed{T_{int} - T'_{int} = T'_{ext} - T_{ext}}$ 5

$\Rightarrow \underline{\underline{T'_{int} = 5°C}}$

Q8) Pour l'air de la pièce, l'application du PPI donne :

reçu par l'air insufflé $\rightarrow P_{th,a} = D_m\left[h_{int} - h'_{ext}\right]$

$\Rightarrow \boxed{P_{th,a} = D_m c_p\,(T_{int} - T'_{ext})}$ 6

$= 150/3600 \times 1000 \times 5$

$= \underline{\underline{208\,W}}$

Q9) Il faut tenir compte des pertes par les parois et de la puissance de chauffage fournie à l'air insufflé : $\Rightarrow \boxed{P_c = P_{th,a} + P_{th,p}} = \underline{\underline{5,2\,kW}}$

Q10) • Avec une VMC simple flux : $P'_{th,a} = D_m c_p (T_{int} - T_{ext}) = \frac{20}{5} P_{th,a}$

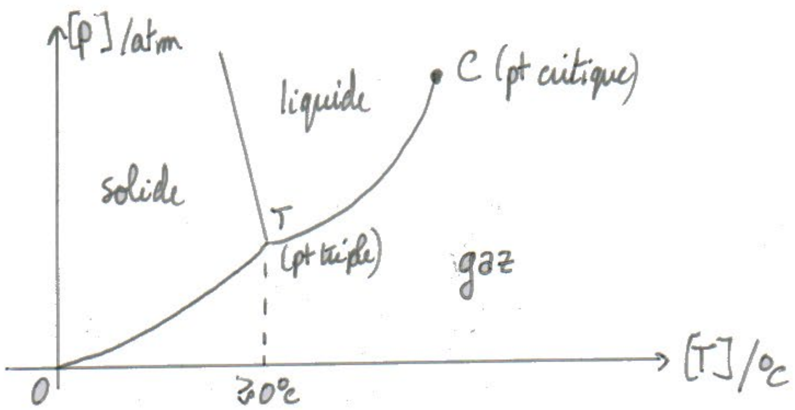
$= 833\,W$

D'où $\boxed{P'_c = P'_{th,a} + P_{th,p}} = \underline{\underline{5,8\,kW}}$

D'où $\dfrac{P'_c - P_c}{P'_c} = \underline{\underline{11\%}}$

• Si l'échange thermique était parfait : $P_c = 5\,kW \Rightarrow \dfrac{P'_c - P_c}{P'_c} = 14\%$

Q11)



pt triple : point où coexiste les 3 phases
pt critique : point au delà duquel il y a continuité de l'état fluide.

Q12) . Loi de Dalton : $\boxed{p_0 = p_{as} + p_e}$ (7)

. Le degré hygrométrique : $\varphi = \dfrac{p_e}{p_{e,sat}} \Rightarrow p_e = \varphi\, p_{e,sat} = 0{,}55 \times 2300 = 1{,}3 \cdot \text{kPa}$

$\Rightarrow \boxed{p_{as} = p_0 - p_e} = 101325 - 1265$

$= \underline{1{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$

. Loi des GP : $\boxed{\begin{cases} m_e = \dfrac{p_e V}{RT} \cdot M_e \\ m_{as} = \dfrac{p_{as} V}{RT} \cdot M_a \end{cases}}$ $\begin{aligned} &= \dfrac{1265 \times 50}{8{,}314 \times 293} \times 18 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0{,}47 \text{ kg}}} \\ &= \dfrac{10^5 \times 50}{8{,}314 \times 293} \times 29 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{60 \text{ kg}}} \end{aligned}$

D'où $\boxed{\phi = \dfrac{m_e}{m_{as}}} = \underline{\underline{7{,}9 \cdot 10^{-3}}}$

Q13) Si $\varphi = 100\% \Rightarrow p_e = p_{e,sat} = 2{,}3 \text{ kPa} \Rightarrow p_{as} = 99{,}0 \text{ kPa}$

d'où $\begin{cases} m'_e = 0{,}85 \text{ kg}. \\ m'_{as} = 59 \text{ kg}. \end{cases}$ $\Rightarrow$ Il faut évaporer $0{,}85 - 0{,}47 = 0{,}38 \text{ kg}$

or $\rho_{eau} = 1 \text{ kg/L} \Rightarrow \underline{\underline{V_e = 0{,}38 \text{ L}}}$

Q14) Bilan de masse : $dM = \delta M_{éch} + \delta M_c$

$$\text{or} \begin{cases} M = CV \\ \delta M_{éch} = \delta M_e - \delta M_s = C_{ext} . D_v dt - C(t) D_v dt \\ \delta M_c = S dt \end{cases}$$

d'où $\frac{\partial C}{\partial t} dt V = C_{ext} . D_v dt - C(t) D_v dt + S dt$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dC}{dt} + \frac{D_v C}{V} = \frac{D_v}{V} C_{ext} + \frac{S}{V}}$$

Pour avoir $C = C_{lim}$, on se place en régime permanent d'où :

$$C_{lim} = C_{ext} + S / D_{v,m}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_{v,m} = \frac{S}{C_{lim} - C_{ext}}}$$

Q15) Soit $\rho_{air} = \frac{M_a P_a}{RT} = 1,2 \, kg.m^{-3} \Rightarrow D_v = \frac{D_m}{\rho} = 125 \, m^3.h^{-1}$

On calcule $D_{vm} = \frac{0,30 / 3600}{0,01 - 0,007} = 2,77.10^{-2} \, m^3.s^{-1}$ ou $\underline{\underline{100 \, m^3.h^{-1}}}$

Donc le débit choisit est supérieur à celui nécessaire. On pourra donc bien maintenir un <u>taux d'humidité satisfaisant</u>

Partie II – Diffusion thermique (Mines – 2023 – PSI)

Q15) • Posons $D = \mu^\alpha \lambda^\beta c^\gamma$

or
$$\begin{cases} [D] = T^{-1}L^{+2} \\ [\mu] = ML^{-3} \\ [\lambda] = [W]L^{-1}K^{-1} = \overbrace{ML^2T^{-2}}^{\text{Joule}}.T^{-1}L^{-1}K^{-1} = ML^{+1}K^{-1}T^{-3} \\ [c] = [J].M^{-1}K^{-1} = ML^2T^{-2}M^{-1}K^{-1} = L^2T^{-2}K^{-1} \end{cases}$$

Donc $L^2T^{-1} = L^{-3\alpha+\beta+2\gamma}.M^{\alpha+\beta}T^{-3\beta-2\gamma}K^{-\beta-\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -\gamma \\ \alpha = -\beta \end{cases} \quad \text{d'où } \alpha = -\beta = +\gamma$$

et $-3\alpha+\beta+2\gamma = 2 \Leftrightarrow -3\alpha - \alpha + 2\alpha = 2 \Rightarrow \underline{\alpha = -1}$

Donc
$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D = \frac{\lambda}{\mu c}}$$
(on se souvient qu'il n'y a pas de constante multiplicative)

• En ODG l'équation de diffusion s'écrit : $\frac{T^*}{\tau} = D\frac{T^*}{L^2}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L^2}{D} = \boxed{\frac{L^2}{\lambda}\mu c} = \frac{(0{,}5)^2 . 7900 . 400}{80}$$

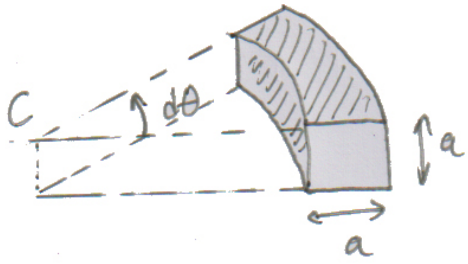
$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau = 10^4 s}}$$

Q16) Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T$

Ici $T = T(\theta, t) \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{th} = -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{u}_\theta}$

Vu l'orthoradialité de $\vec{j}_{th}$, les lignes de champ sont des cercles concentriques.

Q17)



• Volume élémentaire : $dV = a^2 . Rd\theta.$

dS_{LAT} est défini par la surface latérale du Tore (partie visible hachurée) d'où :

$$dS_{LAT} = Rd\theta \times a + (R+a)d\theta a + 2Rd\theta . a$$

Si $a \ll R \Rightarrow \boxed{dS_{LAT} = 4Rd\theta . a}$

• Bilan thermique sur dV :

$$dU = \delta Q_e + \delta Q_c \text{ où } \delta Q_c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} . dVdt = \delta Q_e$$

$$\Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} dVdt = \left[\left(\phi_{th}(\theta, t) - \phi_{th}(\theta + d\theta, t)\right)\right] dt - \overbrace{h\left(\underbrace{T(\theta, t) - T_e}_{>0}\right) dS_{LAT}}^{\text{perdue d'où } \ominus}$$

$$\Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} a^2 R\cancel{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left[-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} . a^2\right]\cancel{d\theta} - h\left(T(\theta, t) - T_e\right) . 4R\cancel{d\theta} . a$$

$r \simeq R$ car $a \ll R$.

$$\Rightarrow \boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a}\left(T - T_e\right)}$$

Q18) En R.S : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{\lambda a} . R^2 T = -\frac{4h}{\lambda a} R^2 T_e.$

on pose $\delta^2 = \frac{a\lambda}{4h} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 T = -\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 T_e}$

qui admet pour solution : $\boxed{T = Ae^{-R/\delta\,\theta} + Be^{R/\delta\,\theta} + T_e}$

$\boxed{[\delta] = L}$ car R/δ doit être adimensionnée

Q19) D'après les graphes :

$$\begin{cases} T(0) = T_1 \\ j(\pi) = 0 \text{ ou } j_{th}(-\pi) = 0 \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} A + B + T_e = T_1 \\ \frac{R}{\delta}\left(-\frac{\lambda}{R}\right)\left[-Ae^{-R/\delta\,\pi} + Be^{R/\delta\,\pi}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = T_1 - T_e \\ Ae^{-R/\delta\,\pi} = Be^{R/\delta\,\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = Be^{2R/\delta\,\pi} \\ B\left(1 + e^{2R/\delta\,\pi}\right) = T_1 - T_e \end{cases}$$

D'où $\boxed{B = \dfrac{T_1 - T_e}{1 + e^{2R/\delta\,\pi}}}$ et $\boxed{A = \dfrac{e^{2R/\delta\,\pi}}{1 + e^{2R/\delta\,\pi}}(T_1 - T_e)}$

D'où $$\boxed{T(\theta) = T_e + \frac{T_1 - T_e}{1 + e^{2R/\delta\,\pi}}\left[e^{\frac{R}{\delta}\theta} + e^{\frac{R}{\delta}(2\pi - \theta)}\right]}$$

Q20) Si la diffusion prépondère en régime transitoire $\tau_{dif} \ll \tau_{conv}$ alors :

$$\tau = \frac{\mu c L^2}{\lambda} \text{ ou } L = \pi R \text{ (de 0 à } \pi \text{ ou de 0 à } -\pi)$$

$$= \frac{7900 \times 400 \times \pi^2 \times (1{,}6.10^{-2})^2}{80}$$

$\Rightarrow \underline{\tau = 3000\text{ s}} \sim \underline{1\text{h}}$ On retrouve bien le même ordre de grandeur.

Q21) Vu l'isolation thermique $\delta Q_{cc} = 0$

$$\Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (1)$$

Or $T(\theta,t) = f_n(\theta).g_n(t) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = f_n(\theta).\dot{g}_n \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = f_n''.g_n(t) \end{cases}$

d'où (1) s'écrit : $\mu c . f_n \dot{g}_n = \frac{\lambda}{R^2} f_n'' g_n$.

d'où $\frac{\mu c R^2}{\lambda} \frac{f_n}{f_n''} = \frac{g_n}{\dot{g}_n}$

D'où $F(\theta) = G(t)$ par conséquent les deux termes sont égaux à une constante.

Donc : $\cdot\ g_n = \alpha \frac{dg_n}{dt} \Rightarrow \frac{dg_n}{dt} - \frac{g_n}{\alpha} = 0 \Rightarrow g_n = A_n e^{+t/\alpha}$

Donc α négatif car sinon g_n diverge et donc T diverge aussi

$\cdot\ f_n'' - \underbrace{\frac{\mu c R^2}{\lambda \alpha}}_{\lambda_n^2} f_n = 0 \Rightarrow f_n = A_n' \cos(\lambda_n \theta) + B_n' \sin(\lambda_n \theta)$

or $T(\theta,t) = T(-\theta,t) \Rightarrow f_n = A_n' \cos(\lambda_n \theta)$

On pose $\begin{cases} A_n' A_n = B_n \\ \tau_n = -\alpha \end{cases}$ d'où $T_n(\theta,t) = B_n \cos\left(\underbrace{\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}}\theta}_{= \frac{R\theta}{d_n}}\right) e^{-t/\tau_n}$

$$\underline{\text{d'où } T_n(\theta,t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n} \quad \text{où } d_n = \sqrt{\frac{\lambda \tau_n}{\mu c}}}$$

Q22) . T_m représente la valeur moyenne de $\theta = -\pi$ à π. Or $T_n(\theta, t)$ a pour période $T = 2\pi \frac{d_n}{R}$ et la fonction proposée a pour période $\frac{2\pi}{n}$.

$$\Rightarrow 2\pi \frac{d_n}{R} = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{R}{d_n}}$$

. Une combinaison linéaire des solutions à variables séparées est la solution générale du problème :

$$T(\theta,t) = T_m + \sum_n T_n(\theta,t)$$

$$= T_m + \underbrace{\sum_n B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right)}_{= \sum_n b_n \cos(n\theta)} e^{-t/\tau_n}$$

D'où

$$\boxed{\begin{cases} B_n = b_n \\ d_n = R/n \\ \tau_n = \frac{\mu c d_n^2}{\lambda} = \frac{1}{n^2} \frac{\mu c R^2}{\lambda} \end{cases}}$$

Q23) Dans l'expression de la somme on retrouve une exponentielle décroissante ainsi

Pour l'ordre 1 : $e^{-t \cdot \frac{\lambda}{\mu c R^2}}$

— 2 : $e^{-t \cdot \frac{\lambda}{\mu c R^2} \times 4}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{ordre } 1}{\text{ordre } 2}\right)_{max} = \frac{b_1}{b_2 e^{-4}} \sim \frac{b_1}{b_2} \times 55$$

Effectivement, en première approche on peut négliger les termes d'ordre $n > 1$ d'où :

$$T(\theta,t) = T_m + b_1 \cos\theta \, e^{-\lambda t/\mu c R^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T(\theta,t) - T_m = B_1(t) \cos\theta} \quad (\text{proportionnel à } \cos\theta)$$