Physique : DM11

Vers une nouvelle définition du Kelvin (Centrale PC 2016)

I) L'Agitation thermique

I.A.1) a) Soit $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -n_v m g$

or $p = n_v k_B T$ d'où $\frac{dp}{dz} = -p \cdot \frac{mg}{k_B T}$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dz} + \frac{p}{H} = 0 \quad \text{où } H = \frac{k_B T}{mg}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p(0) e^{-z/H} \quad \text{où } H = \frac{k_B T}{mg}}$$

b). Or $p = n_v k_B T \Rightarrow \boxed{n_v(z) = N_0 e^{-mgz/k_B T} \text{ avec } N_0 = \frac{p(0)}{k_B T}}$

. Pour une molécule $E_{pp} = mgz$ = énergie potentielle de pesanteur.

I.A.2) . On pose $H = \frac{k_B T}{mg}$

. Conservation de l'E_m : $\frac{1}{2} m v_e^2 = mgH \Rightarrow v_e = \sqrt{2gH}$

$$\Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}}$$

Par conséquent $v_e < v_q = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$ mais du m̂ ordre de grandeur.

I.A.3) Considérons une balle de $m = 100g$ et $T = 300K$ ainsi si on compare l'énergie thermique à l'E_{pp} alors :

$$mg\,\delta z = \frac{3}{2} k_B T \Leftrightarrow \delta z = \tfrac{3}{2} k_B T / mg = 6.10^{-21} m$$

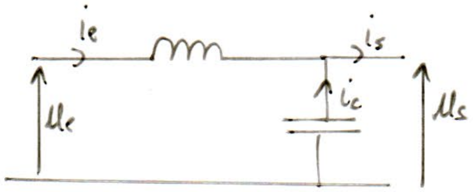
Sous l'agitation thermique, le centre de gravité de la balle se déplace très légèrement.

I.B Agitation thermique dans un circuit électrique

I.B.1) Dans un métal on a $v_q = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m_e}} \simeq 1{,}1.10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ll c$

$\Rightarrow$ on peut utiliser la physique non relativiste

I.B.2)



Loi des mailles : $u_s = u_e - L\dfrac{di_e}{dt}$

Loi des noeuds $i_s = i_e - C\dfrac{du_s}{dt}$

I.B.3) (a) D'après le schéma :

$$\begin{cases} u(x+dx,t) = u(x,t) - L\,\partial i(x,t)/\partial t \\ i(x+dx,t) = i(x,t) - C\,\partial u(x+dx,t)/\partial t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial u/\partial x\, dx = -\lambda dx.\,\partial i/\partial t \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} dx = -\gamma dx.\,\partial u/\partial t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \partial u/\partial x = -\lambda\,\partial i/\partial t & (1) \\ \partial i/\partial x = -\gamma\,\partial u/\partial t & (2) \end{cases}}$$

(b) Par conséquent : $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\gamma\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

d'où $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\lambda\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c_e^2 = \dfrac{1}{\lambda\gamma}}$ (3)

(c) Equation de d'Alembert où $\underline{u}(x,t) = \underline{U}e^{i(\omega t - kx)}$

(3) s'écrit : $-\omega^2\underline{u} = c_e^2(-k^2)\underline{u} \Rightarrow \boxed{\omega = kc_e}$ (4)

(1) donne : $-ik\underline{u} = -\lambda.\,i\omega\underline{i}$ d'où $R_c = \underline{u}/\underline{i} = \dfrac{\lambda\omega}{k} = \lambda c_e$.

(2) donne : $-ik\underline{i} = -\gamma i\omega\underline{u}$ $\rightarrow$ $R_c = \underline{u}/\underline{i} = k/\gamma\omega = \dfrac{1}{\gamma c_e}$

Donc $\boxed{\lambda = R_c/c_e \quad \text{et} \quad \gamma = \dfrac{1}{R_c c_e}}$

I.B.4) ⓐ D'après ③ : $-\omega^2 U(x)\cos(\omega t) = c_e^2 \cos(\omega t)\, U''(x)$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 U = c_e^2 U''$$

$$\Leftrightarrow U'' + \frac{\omega^2}{c_e^2} U = 0 \Leftrightarrow U'' + k^2 U = 0$$

$$\Rightarrow U(x) = A\cos kx + B\sin kx \quad \text{t.q} \begin{cases} U(0) = 0 = A \\ U(D) = 0 = B\sin(kD) \end{cases}$$

D'où $U(x) = B\sin(k_n x)$ où $k_n D = n\pi$

$$\boxed{\Rightarrow U_n(x) = U_{0n}\sin(k_n x) \text{ où } k_n = n\pi/D \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c_e}{D}}$$

ⓑ Les fréquences f_n sont t.q : $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n c_e}{2D}$ avec n entier. Dans l'intervalle Δf, il y a N modes propres avec : $N = \frac{\Delta f}{f_n - f_{n-1}}$ $\Leftrightarrow \boxed{N = \frac{2D\Delta f}{c_e}}$

ⓒ D'après ② : $\frac{\partial i_n}{\partial x} = +\gamma U_{0n}\sin(k_n x)(\omega)\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow i_n(x,t) = -\frac{\gamma\omega U_{0n}}{k_n}\cos(k_n x)\sin(\omega t) + \underbrace{cste(t)}_{=0 \text{ car } i_n = 0 \text{ si } U_{0n} = 0}$$

$$\Rightarrow i_n(x,t) = -\gamma c_e U_{0n} \text{ ———— "}$$

$$\boxed{\Rightarrow i_n(x,t) = -\frac{U_{0n}}{R_c}\cos(k_n x)\sin(\omega_n t)}$$

I.B.5) ⓐ Soit $de_n(x,t) = \frac{1}{2}\gamma dx\, u_n^2 + \frac{1}{2}\lambda dx\, i_n^2$

$$= \frac{1}{2}dx\left[\gamma U_{0n}^2 \sin^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t) + \lambda\frac{U_{0n}^2}{R_c^2}\cos^2(k_n x)\sin^2(\omega_n t)\right]$$

or $\frac{\lambda}{R_c^2} = \frac{\lambda}{R_c} \times \frac{1}{R_c} = \frac{1}{c_e}\cdot\gamma c_e = \gamma$

d'où $de_n = \frac{1}{2}\gamma U_{0n}^2 dx\left[\sin^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t) + \cos^2(k_n x)\sin^2(\omega_n t)\right]$

$$\Rightarrow \langle de_n \rangle_t = \frac{1}{2}\gamma U_{0n}^2 dx\left[\frac{1}{2}\sin^2(k_n x) + \frac{1}{2}\cos^2(k_n x)\right]$$

$$\boxed{\text{d'où } \langle de_m \rangle_t = \frac{1}{4}\gamma U_{0n}^2\, dx}$$

$\Rightarrow$ Elle ne dépend pas de x vu que l'onde est stationnaire.

(b) Donc $\langle E_m \rangle = \int_0^D \langle de_m \rangle = \int_0^D \frac{1}{4}\gamma U_{0n}^2\, dx$

$$\Rightarrow \langle E_m \rangle = \frac{1}{4}\gamma U_{0n}^2 D \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{R_c C_e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle E_m \rangle = \frac{1}{4}\frac{U_{0n}^2 D}{R_c C_e}}$$

I.B.6 (a) Soit $\langle E_m \rangle = k_B T = \frac{1}{4}\frac{U_{0m}^2 D}{R C_e}$

$$\Leftrightarrow U_{0n}^2 = \frac{4 k_B T R C_e}{D}$$

Or $u_{eff,m}^2(x) = \frac{1}{T}\int_0^T u_m^2(x,t)\,dt = \frac{1}{2}U_{0m}^2 \sin^2(k_m x)$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_{eff,m}^2(x) = \frac{2 k_B T R C_e}{D}\sin^2(k_m x)} \quad \Rightarrow \boxed{U_{eff,m}^2 = \frac{2 k_B T R C_e}{D}}$$

(b) Soit $U_{eff}^2 = \sum_{n=1}^{N} U_{eff,m}^2 = \frac{2 N k_B T R C_e}{D}$ où $N = \frac{2 D \Delta f}{C_e}$

$$\Rightarrow U_{eff}^2 = 4 k_B \Delta f\, T R$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{eff} = \sqrt{4 k_B T \Delta f R}}$$

I.B.7) (a) Sur les courbes on remarque que $\ln u_{eff} = cste + \alpha \ln R$

or $\alpha \sim \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \boxed{U_{eff} \div R^{1/2}}$ les courbes vérifient la loi de Nyquist

On choisit un point de mesure pour mesurer k_B sachant que :

$$U_{eff\,tracé} = 500\ V_{eff\,réel}$$

$$= 500\sqrt{4k_B T R\Delta f}$$

$$\Leftrightarrow k_B = \frac{U_{eff\,tracé}^2}{4A^2TR\Delta f}$$

Pour $R = 2\Omega$, $\Delta f = 100\,Hz$ on $U_{eff,\,tracé} = 9.10^{-7}\,V$

$$\Rightarrow \boxed{k_B = 1{,}35.10^{-23}\,J.K^{-1}}$$

(b) . Les valeurs de U_{eff} mesurées sont très faibles, il faut donc protéger les mesures de parasites extérieurs.

. Sur plusieurs jours il sera difficile de maintenir les températures constantes

$\Rightarrow$ utilisation de thermostat

(II) Mesure acoustique

II.A.1) D'après l'énoncé $\ell \geq \ell_{inter}$ avec $n_{lim} = \left(\frac{1}{\ell_{inter}}\right)^3$

$$\text{or } p = n k_B T \Leftrightarrow p = \frac{k_B T}{\ell^3}$$

$$\boxed{\text{d'où } p \leq p_{lim} \text{ avec } p_{lim} = \frac{k_B T}{(\ell_{inter})^3} = 0{,}3\,bar}$$

II.A.2) On va linéariser les équations selon l'approximation acoustique

Euler : $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\,p$ devient $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ (1)

Conservation masse : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + div\,\mu\vec{v} = 0$ devient $\frac{\partial \mu'}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}$ (2)

Hypothèse adiabatique : $\chi_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S$ devient : $\chi_S = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{\mu'}{\Pi}$ (3)

③ et ② donnent : $\mu_0 \chi_S \dfrac{\partial \pi}{\partial t} = -\mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x}$

$\Rightarrow \mu_0 \chi_S \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = -\mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t\, \partial x}$

or ① : $\mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x \partial t} = -\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \mu_0 \chi_S \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} \text{ où } c_a^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \chi_S}}$

ⓑ Pour un GP : $\mu = \dfrac{pM}{RT} \Rightarrow \chi_T = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = \dfrac{M}{\mu R T} = \dfrac{1}{p} \Rightarrow \begin{cases} \chi_T = 1/p \\ \chi_S = \dfrac{\chi_T}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma p} \end{cases}$

D'où $c_a^2 = \dfrac{\gamma p}{\mu_0} = \dfrac{\gamma R T}{M} = \boxed{\dfrac{\gamma N_a k_B T}{M} = c_a^2}$

ⓒ On a $c_a = c_{a,GP} \underbrace{\left(1 + \beta p\right)^{1/2}}_{\simeq 1 + \frac{\beta p}{2}} \Rightarrow \dfrac{\Delta c_a}{c_{a,GP}} = \dfrac{\beta p}{2} \leq 10^{-6}$

$\Leftrightarrow \boxed{p \leq \dfrac{2.10^{-6}}{\beta}} \simeq \underline{1{,}5\,\text{bar}}$

II.A.3) Formule de composition des incertitudes

$$\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(2\frac{\delta c_a}{c_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_a}{N_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta c_a}{c_a} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\delta k_B}{k_B}\right)^2 - \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 - \left(\frac{\delta N_a}{N_a}\right)^2 - \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta c_a}{c_a} \leq \underline{0{,}64.10^{-6}}$$

II.B Onde acoustique sphérique

II.B.1) ⓐ Soit $\vec{v} = v(r,t)\,\vec{e_r} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi}\vec{e_\theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}\vec{u_\varphi} = \vec{0}$

d'où $\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi}$

Par conséquent l'équation d'Euler (1) s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{où } \vec{v} = \overrightarrow{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\vec{u_r} \text{ (invariance suivant } \theta \text{ et } \varphi)$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$\text{donc } \Pi(r,t) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{cste}(t)$$

Or $\phi = 0$ si $\Pi(r,t) = 0 \Rightarrow \boxed{\Pi(r,t) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}}$

(b) Soit $\Delta \Pi - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta\phi - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right] = 0$

$$\Rightarrow \Delta\phi - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \beta(r)$$

Posons $\beta(r) = -\Delta\alpha(r) \Rightarrow \Delta(\phi+\alpha) - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2(\phi+\alpha)}{\partial t^2} = 0$

Comme ϕ est défini à une cste près on peut écrire $\Delta\phi - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$

II.B.2) • Le confinement va entraîner une quantification de ω_n

• Les parois étant indéformables : $v(r=a,t) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r}(a,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(r=a,t) = 0}$$

II.B.3) Soit $\vec{J_e}(r,t) = \Pi(r,t)\,\vec{v}(r,t) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e_r}$

$$= -\mu_0 f(r) f'(r) \cos(\omega t)(-\omega)\sin(\omega t)\vec{e_r}$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{J_e} = \mu_0\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) f(r) f'(r)\vec{e_r}}$ d'où $\boxed{\langle\vec{J_e}\rangle = \vec{0}}$

II.B.4) Soit $\phi(r) = f(r)\cos(\omega t)$ d'où D'Alembert :

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

Δ expression en cylindriques ?

s'écrit : $\cos(\omega t)\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_a^2}(-\omega^2)\cos(\omega t)\, f = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} f \times r = 0$$

Posons $u = rf \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} u = 0}$

Posons $k^2 = \frac{\omega^2}{c_a^2} \Rightarrow u = A\cos(kr) + B\sin(kr)$

$$\Rightarrow f = \frac{A}{r}\cos(kr) + \frac{B}{r}\sin(kr)$$

or $f(0)$ ne doit pas diverger $\Rightarrow f(r) = \frac{B}{r}\sin(kr)$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{B}{r}\sin(kr)\cos(\omega t)}$$

II.B.5) Or $f'(a) = 0$ t.q $f'(r) = \left[-\frac{1}{r^2}\sin(kr) + \frac{1}{r}(k)\cos(kr)\right]B$

$$\Rightarrow + \frac{1}{a}\sin(ka) = k\cos(ka)$$

$$\Rightarrow ka\cos ka - \sin ka = 0$$

Posons $g(x) = x\cos x - \sin x$ d'où x_n t.q $g(x_n) = 0$

$$\Rightarrow x_n = \frac{\omega_n a}{c_a} = 2\pi\nu_n \cdot \frac{a}{c_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_n = \frac{x_n c_a}{2\pi a}}$$

II.B.6) Donc $c_a = \frac{2\pi\nu_1 a}{x_1} = \underline{307,8245\ ms^{-1}}$

t.q $\frac{\delta c_a}{c_a} = \sqrt{\left(\frac{\delta\nu_1}{\nu_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2} \simeq 1{,}8\cdot10^{-6} > \left(\frac{\delta c_a}{c_a}\right)_{max} \simeq 0{,}64\cdot10^{-6}$

$$\Rightarrow \underline{c_a = 307,8246 \pm 0,0006\ ms^{-1}}$$

II.B.7) Or $\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{2\delta C_a}{C_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_a}{N_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}$

$= 3,9.10^{-6}$

$\Rightarrow k_B = \underline{(\underbrace{1,380649}_{\text{7 chiffres significatifs}} \pm 0,000006).10^{-23}\,JK^{-1}}$

III) Spectroscopie Laser

III.A.1) L'azote possède un doublet non liant t.q AX_3E_1 (Gillespie)

$\Rightarrow$ Conformations pyramidales les plus stables en $x = b$.

$\Rightarrow$ en $x = 0$ conformation instable due à la forte répulsion des liaisons N–H et du doublet non liant.

$\Rightarrow$ en $|x| > b$, $E_p \nearrow$ car on tend à casser les liaisons N–H.

III.A.2) – Au pt triple de l'eau $k_B T = 0,024\,eV < V_0$, l'inversion est impossible en mécanique classique

– Pour l'inversion il faut $k_B T_{min} = V_0 \Leftrightarrow \underline{T_{min} = 2900K}$, pourtant on observe des inversions à des températures usuelles $\Rightarrow$ description en mécanique quantique.

III.B.1) Soit $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi$ avec $\Psi = \varphi \underbrace{e^{-iEt/\hbar}}_{f}$

$\Rightarrow i\hbar\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)\varphi f = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' f + V\varphi f$

$\Rightarrow \boxed{\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\varphi = 0}$

III.B.2) (a) φ localisée $\Rightarrow \boxed{\int_{\mathcal{D}} |\varphi|^2 d\tau = 1}$

(b) . Il faut que le produit $V\varphi$ ne diverge pas $\underline{\varphi = 0 \text{ en dehors des puits}}$

. Continuité de φ : $\boxed{\begin{cases}\varphi_A(-x_0 - l) = \varphi_A(-x_0) = 0 \\ \varphi_B(x_0) = \varphi_B(x_0 + l) = 0\end{cases}}$

c) Soit $\boxed{\begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\ell} |\varphi_B|^2 dx = 1 \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_{-x_0-\ell}^{-x_0} |\varphi_A|^2 dx = 1 \end{cases}}$

III.B.3) a) Particule libre : $\varphi'' + k^2\varphi = 0$ où $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \varphi_A = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (3)$$

avec $\begin{cases} \varphi(-x_0-\ell) = 0 \\ \varphi(-x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{-ik(x_0+\ell)} + Be^{ik(x_0+\ell)} = 0 & (1) \\ Ae^{-ikx_0} + Be^{ikx_0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = -Be^{2ikx_0} \quad (2)$

(1) s'écrit : $Be^{ikx_0}\left[-e^{-ik\ell} + e^{ik\ell}\right] \Rightarrow \sin k\ell = 0 \Leftrightarrow \boxed{k_n = \dfrac{n\pi}{\ell}}$

D'où (3) : $\varphi_A = -Be^{2ikx_0}e^{ikx} + Be^{-ikx}$

$$= Be^{ikx_0}\left[-e^{ik(x+x_0)} + e^{-ik(x+x_0)}\right]$$

$$= Be^{ikx_0} \times 2i \times \sin(-k(x+x_0))$$

$$= -2iB\, e^{ikx_0} \sin(k(x+x_0))$$

Notons $\boxed{\varphi_A(x) = B_A \sin k(x+x_0)}$

or $\displaystyle\int_{-x_0-\ell}^{-x_0} |\varphi_A|^2 dx = 1 \Leftrightarrow \frac{\ell B_A^2}{2} = 1$ d'où $\boxed{\begin{cases} \varphi_{A,n}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\ell}} \sin(k_n(x+x_0)) \\ \text{et} \\ E_n^A = \dfrac{\hbar k_n^2}{2m} = \dfrac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m\ell^2} \end{cases}}$

b) De même : $\boxed{\begin{cases} \varphi_{B,n}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\ell}} \sin k_n(x-x_0) \\ \text{et} \\ E_n^B = \dfrac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m\ell^2} \end{cases}}$

(c) φ_A est non nul ssi $x \in]-x_0-\ell\,;\,-x_0[$ $\Rightarrow$ $\boxed{P^A_{x_0,x_0+\ell} = 0\ \forall t}$

$\Rightarrow$ Le double puits infini ne peut expliquer l'inversion de l'ammoniac.

III.B.4) Vu la symétrie du problème notons :

$$\varphi_B(x) = A\cos k(x-x_0-\ell) + B\sin k(x-x_0-\ell)$$

or $\begin{cases} \varphi_B(x_0)=0 \\ \varphi_B(x_0+\ell)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos k\ell - B\sin k\ell = 0 \\ A = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_B(x) = B\sin k(x-x_0-\ell)}$$

III.B.5) (a) L'équation de Schrodinger s'écrit : $\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{(E-V_0)}_{<0}\varphi = 0$

Posons $K^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{K = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}}$

(b) Si $V(x)$ est borné alors φ et φ' sont continues d'où :

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_B(x_0) = \varphi_c(x_0) \text{ et } \varphi'_B(x_0) = \varphi'_c(x_0) \\ \text{et} \\ \varphi_A(-x_0) = \varphi_c(-x_0) \text{ et } \varphi'_A(-x_0) = \varphi'_c(-x_0) \end{cases}}$$

III.B.6) (a) Si la fonction d'onde est $\varphi_G(x) = \Psi(x,0)$ alors.

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1^{sym}(x)e^{-iE_1^{sym}t/\hbar} + \varphi_1^{anti}(x)e^{-E_1^{anti}t/\hbar}\right]$$

(b) Seul la densité de probabilité a un sens physique. Or $|\Psi_1|^2 = |\Psi_2|^2$

$\Rightarrow$ $\Psi_2 = \Psi_1 e^{i\alpha}$ représente le même état physique.

(c) Soit $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = \frac{1}{2}\left[|\varphi_1^{sym}|^2 + |\varphi_1^{anti}|^2 + 2Re\left(\varphi_1^{sym}\varphi_1^{anti*}e^{-i(E_1^{sym}-E_1^{anti})t/\hbar}\right)\right]$

$$\Rightarrow |\Psi|^2 = \frac{1}{2}\left[|\varphi_1^{sym}|^2 + |\varphi_1^{anti}|^2 + 2\varphi_1^{sym}\varphi_1^{anti}\cos(\delta E t/\hbar)\right]$$

Ainsi la densité $|\Psi|^2$ oscille à la fréquence f t.q $\delta E\,T/\hbar = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\delta E}{\hbar} \Leftrightarrow \boxed{f = \frac{\delta E}{2\pi\hbar}}$

Donc $f = \dfrac{\delta E}{h} = \underline{23{,}8\ \text{GHz}}$

d) . Soit $\Psi(x, \tau/2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{E_1^{sym}\tau}{2\hbar}} \left[\varphi_1^{sym}(x) + \varphi_1^{anti}(x) e^{-i\,\delta E \tau/2\hbar}\right]$

or $e^{-i\,\delta E\tau/2\hbar} = e^{-i\pi} = -1$

$\Rightarrow \Psi(x, \tau/2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-E_1^{sym}\tau/2\hbar} \underbrace{\left[\varphi_1^{sym}(x) - \varphi_1^{anti}(x)\right]}_{\varphi_G(x) \text{ d'après figure 12.}}$

. La molécule dont l'énergie est inférieure à la barrière de potentiel est passée d'un puits à l'autre par <u>effet tunnel</u> ce qui lui serait interdit en mécanique classique

e) . Soit $\begin{cases} \delta E = \dfrac{4\pi^2 \hbar^3}{m\ell^3} \dfrac{e^{\left(-2x_0\sqrt{2mV_0}/\hbar\right)}}{\sqrt{2mV_0}} \\ \text{et } f = \dfrac{\delta E}{2\hbar\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{f'}{f} = \dfrac{e^{-10x_0\sqrt{6}\cdot\sqrt{2mV_0}/\hbar}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2mV_0}} \cdot \dfrac{\sqrt{2mV_0}}{e^{-2x_0\sqrt{2mV_0}/\hbar}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{e^{-10\sqrt{6}\cdot x_0\sqrt{2mV_0}/\hbar}}{e^{-1\cdot x_0\sqrt{2mV_0}/\hbar}}$

$\Rightarrow f' = 1{,}1.10^{-7}\ \text{Hz}$ d'où $\dfrac{\tau'}{2} = 55$ jours

L'inversion est peu probable (car très lente)

III.C.1) Soit $\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \\ \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \partial\vec{E}/\partial t = \mu_0\gamma\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t \end{cases}$

Or $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = -\vec{\Delta}\vec{E} + \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) \Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{\partial(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B})}{\partial t}$

$\Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

or $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0\vec{e}_x e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow -\underline{k}^2 = \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2) + \mu_0\gamma\, i\omega.$

$\Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \omega^2/c^2 - i\mu_0\omega\gamma}$

III.C.2) a) Soit $\underline{k} = k_r - ik_i$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-k_i x} e^{i(\omega t - k_r x)} \vec{e_y}$$

Or x croît donc pour éviter une amplification il faut $k_i > 0$.

b) On a $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$

où $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \left(i \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \dfrac{i\vec{k}}{\mu_0 \omega} E^2$ car OPPH.

donc I est proportionnel à E^2 càd à $e^{-2k_i x}$

$$\Rightarrow \boxed{I(L) = I_0 e^{-\alpha L} \text{ où } \alpha = 2k_i}$$

III.C.3) a) Soit $\lambda_0 = c/\nu_0 = 10{,}354204\ \mu m$

et $E_\gamma = h\nu_0 = 0{,}12\ eV$

b) L'énergie du niveau excité est définie à δE près donc celle du photon permettant la transition sera définie de la même façon d'où :

$$\Delta \nu = \frac{\delta E}{h} = 4{,}8\ MHz$$

III.C.4) a) Soit $\phi = \omega t - kx = \omega_0 \left(t - \dfrac{k}{\omega} x\right) = \boxed{2\pi\nu \left(t - \dfrac{x}{c}\right) = \phi}$

b) De plus $x' = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \cdot \vec{u_x} = x - v_x t$.

Donc ϕ peut s'écrire dans R' : $\phi = 2\pi\nu' \left(t - \dfrac{x'}{c}\right)$

$$= 2\pi\nu' \left[t - \frac{x}{c} + \frac{v_x t}{c}\right]$$

$$= 2\pi\nu' \left[t\left(1 + \frac{v_x}{c}\right) - \frac{x}{c}\right]$$

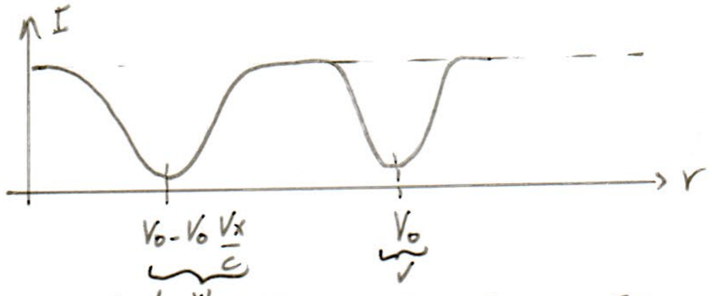
$$= 2\pi\nu' \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) \left[t - \frac{x/c}{1 + v_x/c}\right]$$

or $\dfrac{v_x}{c} \ll 1$ d'où : $\nu = \nu' \left(1 + \dfrac{v_x}{c}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\nu' \simeq \nu \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \text{ ou } v_x = c\,\frac{\nu - \nu'}{\nu}}$$

• L'effet Döppler Fizeau est utilisé en astronomie pour mesurer la vitesse radiale des étoiles ou galaxies.

(c) Le spectre va être identique mais décalé t.q $\Delta\nu = \nu' - \nu = -\nu \frac{v_x}{c}$



III.C.5) Soit $v_x = c\,\frac{\nu-\nu'}{\nu} \overset{\nu'}{=} c\,\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0}$ d'où $dv_x = c\,\frac{\delta\nu}{\nu_0}$

$$\Rightarrow \boxed{dP(\nu,\nu_0) = \frac{ck_0}{\nu}\, e^{-\frac{mc^2(\nu_0-\nu)^2}{2k_BT\nu_0^2}}\, d\nu} = \frac{\delta n}{n_0}$$

III.C.6) (a) A cause de l'agitation thermique, il y a élargissement de la raie naturelle (au repos) par effet Döppler.

(b) D'après l'énoncé si $f = e^{-(u-u_0)^2/2a^2}$ alors $\Delta u = 2a$

d'où : $\Delta\nu = 2\times\frac{\sqrt{k_BT}}{\sqrt{m_a}}\,\frac{\nu_0}{c} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\nu = 2\,\frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{k_BT}{m_a}}} = 2{,}4.10^{-6}\,\nu_0$

(c) $\Rightarrow \underline{\Delta\nu = 70{,}6\ \text{MHz}}$

Or $k_B = \frac{c^2(\Delta\nu)^2}{\nu_0^2}\cdot\frac{m_a}{T}\times\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\Big(\underbrace{\frac{\delta m_a}{m_a}}_{2{,}9.10^{-5}}\Big)^2 + 4\Big(\underbrace{\frac{\delta\Delta\nu}{\nu}}_{0{,}14}\Big)^2 + 4\cancel{\Big(\frac{\delta\nu_0}{\nu_0}\Big)^2} + \Big(\underbrace{\frac{\delta T}{T}}_{1{,}8.10^{-5}}\Big)^2 + 4\cancel{\Big(\frac{\delta c}{c}\Big)^2}}$

$\Rightarrow \frac{\delta k_B}{k_B} \sim 2\,\frac{\delta\Delta\nu}{\nu} = \underline{\underline{0{,}14}}$, on ne peut pas négliger cette dernière car elle empêche d'obtenir la précision voulue.