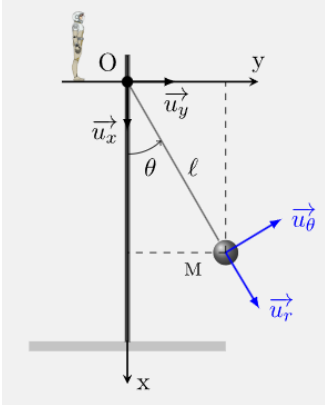


PHYSIQUE : DM n°0 (Correction)

I – Le pendule simple

1°) Schéma :



Système : masse ponctuelle M étudié dans référentiel terrestre supposé galiléen

PFD :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T} + \vec{P}$$

En projection sur l'axe orthoradial :

$$m \left(2 \underbrace{l}_{=0} \dot{\theta} + l \ddot{\theta} \right) = -mg \sin \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Pour de petits angles : $\sin \theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ où $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

2°) À l'aide des conditions initiales et en prenant la solution sous la forme $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

$$\begin{cases} \theta_0 = A \\ 0 = B \omega_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

3°)

D'après le PFD sur l'axe radial :

$$-m \left(\frac{v^2}{l} \right) = -T + mg \cos(\theta)$$

Il faut connaître l'accélération en cylindriques par cœur, c'est un gain de temps énorme.

$$\Rightarrow T = \frac{v^2}{l} m + mg \cos(\theta)$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique, vu qu'il n'y a pas phénomènes dissipatifs :

$$E_m = \underbrace{E_c(0)}_0 - mgl \cos(\theta_0) = \frac{1}{2} mv^2 - mgl \cos(\theta)$$

NB : J'ai choisi l'origine des potentiels pour un angle de 90° avec axe descendant :

$$\Rightarrow mv^2 = 2mgl(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

$$\Rightarrow T = 2mg(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) + mg \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow T = mg(3\cos(\theta) - 2\cos(\theta_0))$$

Plaçons dans la situation défavorable pour Spiderman : $\theta = 0^\circ$ et $\theta_0 = 90^\circ$. Alors :

$$T_{\max} = 3mg > T_{\text{critique}} = 2mg$$

Les fils de soie vont craquer et Spiderman va lamentablement s'écraser au sol 😊.

II – Histoire de bobines

1. Déterminer les grandeurs suivantes s, u et i_1, i_2, i_3, i_4, i :

a. Lorsque $t \rightarrow \infty$.

Pour le régime final les deux bobines sont équivalentes à un fil donc :

$$s(t \rightarrow \infty) = 0 \text{ et } u(t \rightarrow \infty) = 0$$

Et par conséquent : $i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0$ et $i(\infty) = i_1(\infty) = i_4(\infty) = \frac{E}{R}$ (Maille E et R en série)

b. À l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur).

Pour le régime permanent initial, l'interrupteur est ouvert donc $i_4(0^-) = 0$.

L'autre bobine est équivalent à un fil donc $i_2(0^-) = 0$. Ainsi $i(0^-) = i_1(0^-) = i_3(0^-) = \frac{E}{2R}$. (circuit équivalent E avec deux résistances R en série)

Les bobines imposent la continuité du courant à leur borne donc : $i_4(0^+) = 0$ et $i_1(0^+) = \frac{E}{2R}$

Or :

$$\begin{aligned} \begin{cases} i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4 \\ E = Ri + Ri_2 + Ri_3 \end{cases} \Rightarrow \text{à } t = 0^+ : \begin{cases} i(0^+) = \frac{E}{2R} + i_2(0^+) = i_3(0^+) \\ E = R \left(\frac{E}{2R} + i_2(0^+) + \frac{E}{2R} + i_2(0^+) + i_2(0^+) \right) \end{cases} \\ \Rightarrow i_2(0^+) = 0 \Rightarrow i_3(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{2R} \\ \Rightarrow s(0^+) = Ri_3(0^+) = \frac{E}{2} \text{ et } u(0^+) = Ri_2(0^+) = 0 \end{aligned}$$

2. On pose $X(t) = s(t) - u(t)$. Démontrer que $X(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dt} + \frac{X}{\tau} = 0 \text{ où } \tau = \frac{L}{R}$$

On écrit la loi des nœuds :

$$\begin{aligned} i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{di_3}{dt} + \frac{di_4}{dt} \Rightarrow \frac{u}{L} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} = \frac{s}{L} + \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} \quad (1) \text{ où } \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

On pose alors : $X(t) = s(t) - u(t)$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dt} + \frac{X}{\tau} = 0$$

3. On résout l'ED tel que : $X(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\text{Or } X(0^+) = s(0^+) - u(0^+) = \frac{E}{2} \Rightarrow X(t) = \frac{E}{2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Or : $E = Ri + u + s$

$$\Rightarrow 0 = \frac{du}{dt} + \frac{ds}{dt} + R \frac{di}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{ds}{dt} + R \left(\frac{s}{L} + \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \right) \Rightarrow \frac{du}{dt} = -2 \frac{ds}{dt} - \frac{s}{\tau} \quad (2)$$

Et :

$$\frac{du}{dt} = \frac{ds}{dt} - \frac{dX}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{E}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

Donc :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{E}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -2 \frac{ds}{dt} - \frac{s}{\tau} \Rightarrow 3 \frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = -\frac{E}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} + \frac{s}{3\tau} = -\frac{E}{6\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Qui s'intègre en :

$$\begin{aligned} s(t) = Be^{-\frac{t}{3\tau}} + \underbrace{Ce^{-\frac{t}{\tau}}}_{s_p(t)} \text{ avec } \begin{cases} -\frac{1}{\tau}C + \frac{C}{3\tau} = -\frac{E}{6\tau} \Rightarrow C(-3+1) = -\frac{E}{2} \Rightarrow C = \frac{E}{4} \\ \text{et } s(0^+) = B + C = \frac{E}{2} \Rightarrow B = \frac{E}{4} \end{cases} \\ \Rightarrow s(t) = \frac{E}{4} \left(e^{-\frac{t}{3\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Et : } u(t) = s(t) - X(t) = \frac{E}{4} \left(e^{-\frac{t}{3\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - \frac{E}{2} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow u(t) = \frac{E}{4} \left(e^{-\frac{t}{3\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

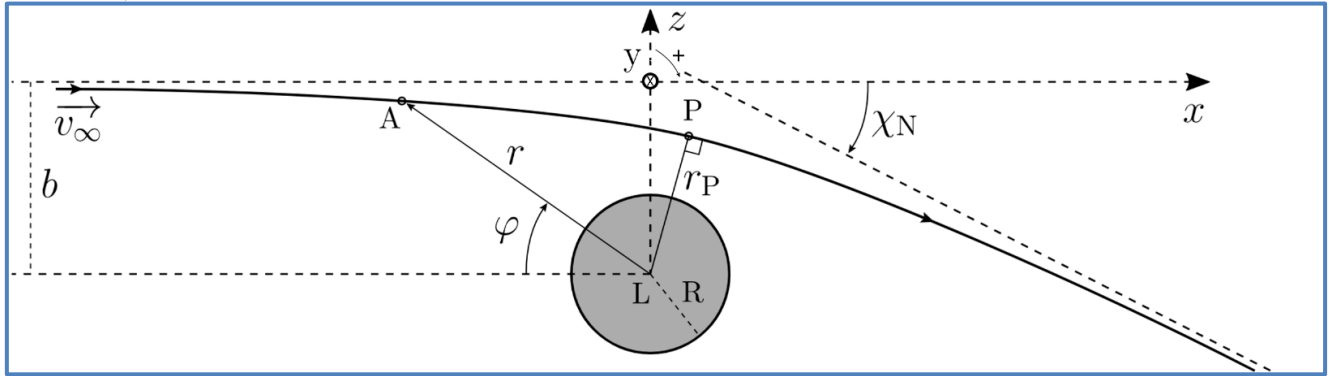
III – Lentille gravitationnelle

1.

- $[\chi_N]$ est sans dimension ;
 - $\left[\frac{1}{c^2}\right] = L^{-2} \cdot T^2$;
 - $\left[\frac{GM}{b}\right] = \frac{E}{M} = \frac{M}{M} \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
- Or : $\chi_N = K \times \frac{GM}{c^2 b}$ donc K est sans dimension

2.

a)



On a affaire à un problème à forces centrales par conséquent, le moment cinétique se conserve, et par application de la loi des aires on obtient :

$$C = \frac{L_y}{m} = r^2 \dot{\varphi} = cste \Leftrightarrow \frac{L_y}{m} = r^2 \dot{\varphi} \Leftrightarrow (b \vec{u}_z \wedge \vec{v}_\infty) \cdot \vec{u}_y = r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow b v_\infty = r^2 \dot{\varphi}$$

b) En projetant le PFD sur $\vec{u}_z$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = -\frac{GM}{b v_\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\frac{GM}{b v_\infty} \dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} &= \frac{GM}{b v_\infty} \frac{d(\cos(\varphi))}{dt} \end{aligned}$$

c) Le résultat précédent donne : $dv_z = \frac{GM}{b v_\infty} d(\cos(\varphi))$

Or v_z varie de 0 à $-v_\infty \sin(\chi_N)$, et φ varie de 0 à $\pi + \chi_N$ d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{-v_\infty \sin(\chi_N)} dv_z &= \int_0^{\pi + \chi_N} \frac{GM}{b v_\infty} d(\cos(\varphi)) \Rightarrow -v_\infty \sin(\chi_N) = \frac{GM}{b v_\infty} [\cos(\pi + \chi_N) - 1] \\ \Rightarrow -v_\infty \sin(\chi_N) &= \frac{GM}{b v_\infty} [-\cos(\chi_N) - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \begin{cases} \sin(\chi_N) = 2 \sin\left(\frac{\chi_N}{2}\right) \cos\left(\frac{\chi_N}{2}\right) \\ \cos(\chi_N) = 2 \cos^2\left(\frac{\chi_N}{2}\right) - 1 \end{cases} &\Rightarrow -2 v_\infty \sin\left(\frac{\chi_N}{2}\right) \cos\left(\frac{\chi_N}{2}\right) = -2 \frac{GM}{b v_\infty} \cos^2\left(\frac{\chi_N}{2}\right) \\ &\Rightarrow \tan\left(\frac{\chi_N}{2}\right) = \frac{GM}{b v_\infty^2} \end{aligned}$$

On admet que la déviation est faible d'où : $\chi_N \sim 2 \frac{GM}{b v_\infty^2} \Rightarrow K = 2$

Avec les données de l'énoncé si on suppose $b \sim R$ et $v_\infty^2 = c^2$

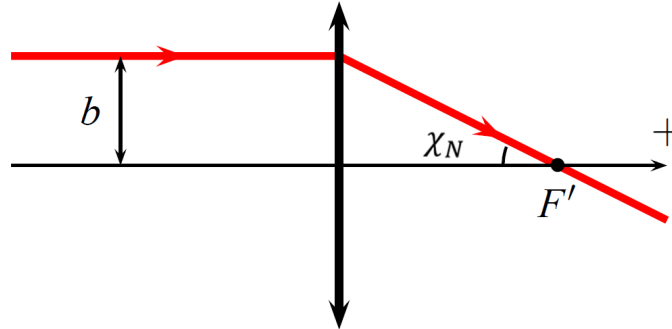
$$\Rightarrow \chi_N = 2 \times \frac{(6,67 \times 10^{-11}) \times 2 \times 10^{30}}{7 \cdot 10^8 \times (3 \times 10^8)^2} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 4,2 \cdot 10^{-6} \times \frac{180}{\pi} \times 3600 = 0,87'' \text{ d'arc}$$

Remarque :

$$\begin{aligned} \text{À l'aide de DL c'est plus rapide : } -v_\infty \sin(\chi_N) &= \frac{GM}{bv_\infty} [-\cos(\chi_N) - 1] \Rightarrow -v_\infty \chi_N \sim \frac{GM}{bv_\infty} (-2) \\ \Rightarrow \chi_N &\sim 2 \frac{GM}{bv_\infty^2} \end{aligned}$$

Le modèle classique montre son insuffisance sur les particules de vitesse c (sans masse en plus) il faut utiliser un calcul relativiste qui donnera $K = 4$.

3. On modélise la situation en optique géométrique :

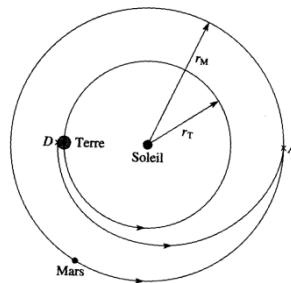


Ainsi, sur le schéma on remarque : $\tan(\chi_N) = \frac{b}{f'}$ or $\tan(\chi_N) \sim \chi_N$

$$\Rightarrow \frac{b}{f'} = K \times \frac{GM}{c^2 b} \Rightarrow f' = \frac{c^2 b^2}{KGM} = 8 \cdot 10^{13} \text{ m} = 550 \text{ u. a.}$$

On comprend mieux le nom de lentille gravitationnelle donné à ce phénomène de déviation de la lumière.

IV - Voyage interplanétaire de la terre a mars



1°) Dans les exercices sur les ellipses, il faut connaître l'énergie mécanique sur une orbite elliptique comme c'est mentionné dans le programme. Ne pas la connaître c'est perdre beaucoup de chances de réussite...

Le plus simple est de décomposer le problème en quatre étapes.

Système : le vaisseau dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

- Trajectoire circulaire terrestre

$$E_m = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{GmM_s}{R_T} = -\frac{GmM_s}{2R_T} \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{GM_s}{R_T}}$$

- Trajectoire elliptique en D

$$E_m = \frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{GmM_s}{R_T} = -\frac{GmM_s}{2a} \Rightarrow v_D = \sqrt{2GM_s \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a} \right)}$$

Or : $2a = R_T + R_M$

$$\Rightarrow v_D = \sqrt{2GM_s \left(\frac{R_M}{R_T(R_T + R_M)} \right)}$$

$$\Rightarrow v_D = v_T \sqrt{2 \frac{R_M}{R_T + R_M}} = 32,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour la variation d'énergie, vu que l'altitude est la même on a $\Delta E_m = \Delta E_c$. On donne le résultat pour 1kg de navette vu que la masse de la navette n'est pas donnée.

$$\Rightarrow \frac{\Delta E_m}{m} = \frac{1}{2}(v_D^2 - v_T^2) = 91,6 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

2°) On peut faire les deux derniers résultats par analogie :

$$v_A = \sqrt{2GM_s \left(\frac{R_T}{R_M(R_T + R_M)} \right)} \text{ et } v_M = \sqrt{\frac{GM_s}{R_M}}$$

$$\Rightarrow v_A = v_M \sqrt{2 \frac{R_T}{R_T + R_M}} = 21,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E_m}{m} = \frac{1}{2}(v_M^2 - v_A^2) = 60,3 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

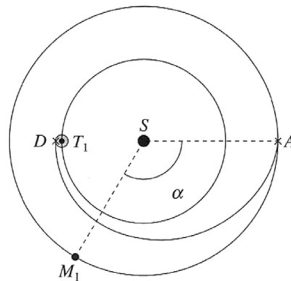
3°) Le transfert va durer une demi-période elliptique $\tau = \frac{T}{2}$ d'où en utilisant la troisième loi de Képler (la constante est à connaître ou à savoir retrouver TRES rapidement mais ici on n'en a pas besoin 😊) :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{R_T^3}{T_T^2} \Rightarrow T = T_T \left(\frac{R_T + R_M}{2R_T} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{1}{2} T_T \left(\frac{R_T + R_M}{2R_T} \right)^{\frac{3}{2}} = 258 \text{ jours}$$

4°) Calculons la période de rotation de Mars autour du Soleil :

$$T_M = T_T \left(\frac{R_M}{R_T} \right)^{\frac{3}{2}} = 684 \text{ jours}$$



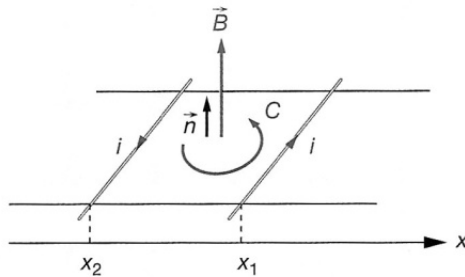
Vu que sur l'orbite circulaire la vitesse est constante on peut écrire que :

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\tau}{T_M} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi\tau}{T_M} = 136^\circ$$

V – Course poursuite

a) À l'instant initial, les vitesses des tiges sont différentes. Le circuit formé par les deux tiges et les portions de rail les séparant voit donc varier sa surface (Fig. 17). On en déduit que le flux du champ magnétique à travers ce circuit varie, ce qui provoque l'apparition d'une force électromotrice induite et donc d'un courant.

De ce fait, chaque tige subit une force de Laplace, dont on peut déterminer le sens grâce à la loi de modération. En effet, la cause première est la différence de vitesse : T_1 étant en mouvement tandis que T_2 est immobile. L'effet est donc certainement la mise en mouvement de T_2 et le ralentissement de T_1 .



b) La surface du circuit formé par les tiges et les portions de rail les séparant est égale à $d(x_1 - x_2)$; avec l'orientation retenue, on aboutit à un flux valant : $\Phi = Bd(x_1 - x_2)$. La force électromotrice induite est calculée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bd(v_1 - v_2)$. Pour une résistance électrique totale R , l'intensité du courant induit est donc :

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bd}{R} (v_1 - v_2).$$

Toutes les grandeurs manipulées ici sont algébriques ; cette précaution est essentielle car la méthode présentée s'applique alors à tout problème ! La force de Laplace exercée sur T_1 a pour composante sur Ox : $F_1 = +Bdi$, tandis que T_2 subit $F_2 = -Bdi$. On en déduit les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{Bd}{m} i \\ \frac{dv_2}{dt} &= +\frac{Bd}{m} i. \end{aligned}$$

L'obtention d'équations relatives à chaque vitesse prise séparément suppose un découplage. On peut opérer en sommant ou soustrayant les deux équations mécaniques. On pose $S = v_1 + v_2$ et $D = v_1 - v_2$.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 0 \\ \frac{dD}{dt} &= -2 \frac{B^2 d^2}{mR} D. \end{aligned}$$

La somme des vitesses est constante : avec les valeurs initiales,

$$v_1 + v_2 = V_0.$$

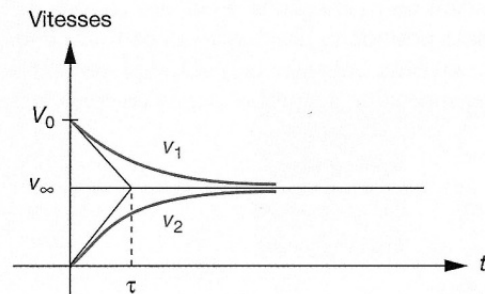
La différence des vitesses tend vers 0 avec une constante de temps $\tau = \frac{mR}{2B^2 d^2}$. L'utilisation des conditions initiales donne $v_1 - v_2 = V_0 \exp(-t/\tau)$.

On calcule alors chaque vitesse par somme et différence des résultats précédents :

$$v_1 = \frac{V_0}{2} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 1 \right] \text{ et } v_2 = \frac{V_0}{2} \left[-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 1 \right].$$

c) On confirme ici ce que la loi de modération a permis de prévoir *a priori* : la tige T_1 ralentit pendant que la tige T_2 accélère (Fig. 18). Après une durée de l'ordre de

quelques fois la constante de temps, les deux vitesses tendent vers une valeur commune : $v_f = \frac{V_0}{2}$.



d) Les forces de Laplace appliquées aux deux tiges sont opposées ($+idB$ et $-idB$), on en déduit que la somme de leurs quantités de mouvement se conserve :

$$mv_1 + mv_2 = mV_0.$$

En revanche, l'énergie mécanique, qui se limite ici à l'énergie cinétique, diminue :

$$\frac{1}{2} m V_0^2 > \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2.$$

L'énergie mécanique perdue est convertie en énergie électrique, dissipée par effet Joule dans la résistance. Dans l'état final,

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m V_0^2.$$

VI – Chauffage de piscine

1.

a) La machine thermique à utiliser est une pompe à chaleur (PAC) :

- Consomme du travail : $W > 0$;
- Fournit de la chaleur à l'eau de la piscine : $Q_p < 0$;
- Prélève de la chaleur au fluide caloporteur et à l'air ambiant : $Q_{air} < 0$

La COP est défini par :

$$COP = -\frac{Q_p}{W} = \frac{Q_p}{Q_p + Q_{air}} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{air}}{Q_p}}$$

D'après le second principe de la thermodynamique appliqué à un cycle :

$$\Delta S_{cyc} = S_{éch} + S_c = 0 \Rightarrow \frac{Q_p}{T_p} + \frac{Q_{air}}{T_{air}} \leq 0$$

Dans le cas d'une COP maximale on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{Q_p}{T_p} + \frac{Q_{air}}{T_{air}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{Q_{air}}{Q_p} = -\frac{T_{air}}{T_p} \\ \Rightarrow COP_{max} &= \frac{1}{1 - \frac{T_{air}}{T_p}} = \frac{1}{1 - \frac{288}{300}} = 25 \end{aligned}$$

b) Bien entendu le modèle utilisé est trop parfait par rapport à l'existence de machines réelles. En réalité, on est de l'ordre de 3 à 5. Le modèle proposé en document 2 propose pour ses températures d'utilisation **une COP de 4,5**. On proposera cette valeur pour la suite, afin de garder les mêmes applications numériques.

2. Pendant une heure il s'évapore une masse de :

$$\begin{aligned} m &= \alpha S \Delta t = 0,15 \times 250 \times 1 = 37,5 \text{ kg} \\ \Rightarrow \Delta H_{vap} &= m l_{vap} = 105 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Pour compenser cette perte d'énergie en 1 heure, on va utiliser notre BP-160HS-A de $COP = 4,5$. D'où :

$$W = \frac{\Delta H_{vap}}{COP} = 23 \text{ MJ}$$

Il ne faut pas oublier qu'il faut aussi réchauffer l'eau réinjectée, même si on se doute que cela va être négligeable.

$$\Delta H_2 = mc\Delta T = 37,5 \times 4,18 \times (300 - 293) = 1,1 \text{ MJ}$$

Cela correspond à 1% des dépenses liés à l'évaporation. De plus on préfère souvent des systèmes de chauffage solaire à tubes fins pour réaliser cette tâche.