TPDS 1 – Viscosité

Le but de ce TP est de mesurer un coefficient de viscosité à l'aide de la loi de Stokes si les conditions opératoires le permettent.

Matériel à disposition :
- 1 Pendule Eurosmart avec son dispositif d'acquisition et une masse en laiton.
- 1 Carte Sysam SP5.
- 1 sphère de rayon R immersible.
- De l'eau.
- Un mélange eau + glycérol
- Les notices des différents appareils de mesure.

I – Préparation théorique

Q1) Démontrez que l'équation différentielle qui régit le mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{\theta}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

Où l'on exprimera les constantes ω_0 *et Q en fonction de* J, g, λ *et* m

TMC appliqué selon l'axe de rotation :

$$J\ddot{\theta}=-\lambda vl-mgl\,sin\theta \text{ où } v=l\dot{\theta}$$

$$Si\ petits\ angles:\ \Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{\lambda l^2\dot{\theta}}{J}+\frac{mgl}{J}\theta=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{\lambda l^2}{J}\\ \omega_0^2=\dfrac{mgl}{J}\end{cases}\Rightarrow Q=\frac{J\omega_0}{\lambda l^2}=\frac{J}{\lambda l^2}\times\sqrt{\frac{mgl}{J}}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{Jmg}{l^3}}$$

On s'intéresse maintenant à la valeur de λ.
En annexe, on vous fournit la représentation en échelle logarithmique de différents objets sphériques dont la sphère lisse.

Q2) À l'aide de ce document :
- *Représenter rapidement ce graphique dans votre compte rendu en faisant apparaître quatre zones dont on donnera une nomination à chacune de ces zones.*
  - *1 pour* $0{,}1<R_e<100$
  - *2 pour* $100<R_e<1000$
  - *3 pour* $1000<R_e<200000$
  - *4 pour* $R_e>200000$

Q3) Démontrer que dans la zone 1 on peut écrire $log(C_x)=A\,log(R_e)+B$*. En déduire que* $C_x=\frac{\alpha}{Re}$*. Donnez la valeur numérique de alpha obtenue. Comparer à la valeur communément admise de* α *=24. En déduire que la force de trainée peut s'écrire dans le domaine de Stokes :* $\overrightarrow{F_t}=-6\pi\eta R\vec{v}$ *où* η *est la viscosité du fluide, R le rayon de la sphère.*
  - 1 pour $0{,}1<R_e<100$: Domaine de Stokes, écoulement laminaire : $log(C_x)=A\,log(R_e)+B$
  - 2 pour $100<R_e<1000$: Domaine lamino-turbulent, pas de loi en C_x précise
  - 3 pour $1000<R_e<200000$: Domaine turbulent où $C_x\sim 0{,}4$
  - 4 pour $R_e>200000$: Chute (ou crise) de trainée

Ordonnée à l'origine : $\log(Cx(0))=\log(25)=1{,}4$
Pente : $a=\frac{\log(4)-\log(80)}{\log(6)-\log(0{,}2)}=-0{,}9\sim-1$
D'où $log(C_x)=-log(R_e)+1{,}4\Rightarrow C_x=\frac{25}{R_e}\sim\frac{24}{R_e}$

Q4) En admettant que la force de trainée peut s'écrire $\overrightarrow{F_t} = -6\pi\eta R\vec{v}$ dans le domaine de Stokes, en déduire l'expression de $\frac{\omega_0}{Q}$ et Q en fonction de η et des paramètres mécaniques l, J, R m et g.

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda l^2}{J} \\ Q = \dfrac{1}{\lambda}\sqrt{\dfrac{Jmg}{l^3}} \\ \lambda = 6\pi\eta R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{6\pi\eta R l^2}{J} \\ Q = \dfrac{1}{6\pi\eta R}\sqrt{\dfrac{Jmg}{l^3}} \end{cases}$$

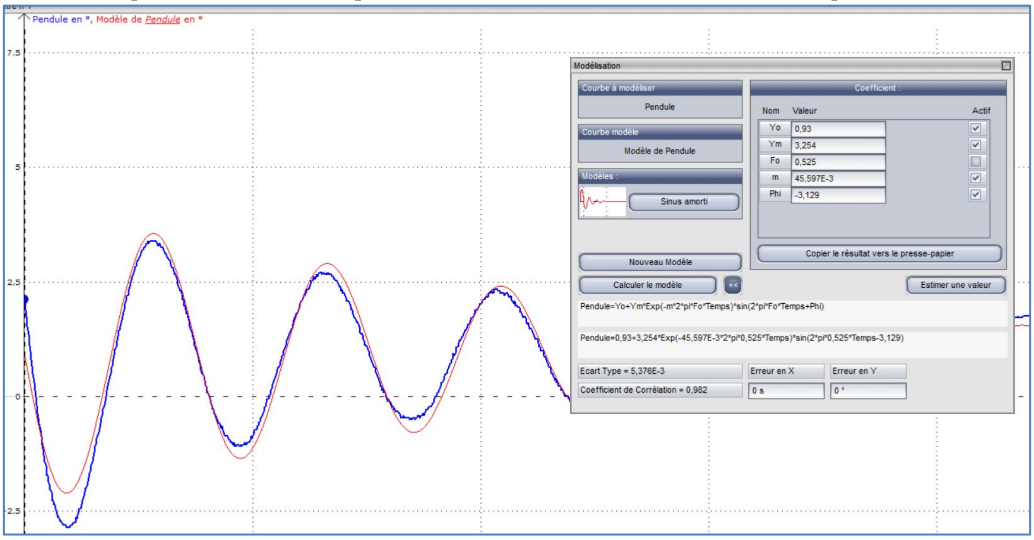
Vu que le coefficient de viscosité apparaît dans l'expression de Q, un élève de première année désire retrouver l'expression de la viscosité dynamique. Pour cela il désire faire l'acquisition sous Latis-Pro d'une dizaine d'oscillations puis remonter à Q puis à η de l'eau.

Q5) Relevez les valeurs numériques de l, R (rayon de la boule), m (masse de l'ensemble oscillant).

$$\begin{cases} m = 0{,}322\ kg \\ R = 0{,}0275\ m \\ l = 0{,}45\ m\ (le\ plus\ délicat\ à\ mesurer) \end{cases}$$

Q6) Effectuer l'expérience proposer par l'élève, et donnez les valeurs numériques ω_0, J, Q obtenues à l'aide de votre tracé. On précisera la démarche effectuée dans le compte-rendu.

On acquisitionne sous latis pro sur 15s et 2000 points et on obtient les résultats suivants par modélisation « sinus amorti »



On relève : $f_0 = 0{,}525\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_0 = 3{,}30\ rad\cdot s^{-1}}$

Déduisons J de $\omega_0 \Rightarrow J = \frac{mgl}{\omega_0^2} = \frac{0{,}322\times 9{,}8\times 0{,}45}{3{,}30^2} = \boldsymbol{0{,}130\ kg\cdot m^2}$ (On remarque qu'avec nos approximations de confondre les différents l, si on admet que toute la masse est au centre de la boule, on obtient $l = 63\ \mathrm{cm}$)

La valeur de m (à ne pas confondre avec la masse) proposée par Latis-Pro permet de remonter à Q.

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2m} \sim \frac{1}{2\times 46\cdot 10^{-3}} = \boldsymbol{11{,}0}$$

Q7) En déduire la valeur de η_{eau} obtenue. Conclure.

$$\Rightarrow \eta_{eau} = \frac{J\omega_0}{6\pi Q R l^2} = \frac{0{,}130\times 3{,}30}{6\times 3{,}14\times 11{,}0\times 2{,}75\cdot 10^{-2}\times (0{,}45)^2} = 0{,}375\ Pa\cdot s$$

$$E.R = \frac{|0{,}375 - 0{,}001|}{0{,}001} = 37375\ \%\ d'erreur$$

Vu l'erreur relative obtenue, un calcul d'incertitude à ce stade n'est pas judicieux car on voit que c'est la modélisation qui est mauvaise.

Q8) En déduire la principale erreur faîte par l'élève de première année à l'aide de vos connaissances. Conclure

On voit que le modèle n'est pas adaptée. Essayons de voir si on est bien dans le domaine de Stokes, pour cela calculons le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\mu v L}{\eta} = \mu v_{max} \times \frac{2R}{\eta} = 2\frac{\mu l\dot{\theta}_{max} R}{\eta} = 2\mu l\theta_{max}\omega_0 \times \frac{2R}{\eta} = 4600 \gg 1$$

On n'est pas dans le domaine de Stokes proposé au début dans Q2. Il nous faut donc revoir le protocole. Plusieurs possibilités pour cela :

$$\begin{cases} Diminuer\ R \\ Diminuer\ v \\ Changer\ de\ fluide \end{cases}$$

Les deux premières possibilités sont irréalisables :

- Diminuer R, notre hypothèse de confondre les différentes longueurs comme si la masse était ponctuelle devient encore plus fausse. (En plus le frottement fluide risque d'être caché par celui de la tige sur l'air)
- Diminuer v, d'autres forces de frottement vont relativement devenir plus importantes (liaison non pivot…)

Il faut donc changer le fluide.

On s'intéresse maintenant à un mélange {eau+glycérol} dont le titre massique en glycérol est noté t. On admet que la viscosité d'un mélange homogène peut s'écrire :

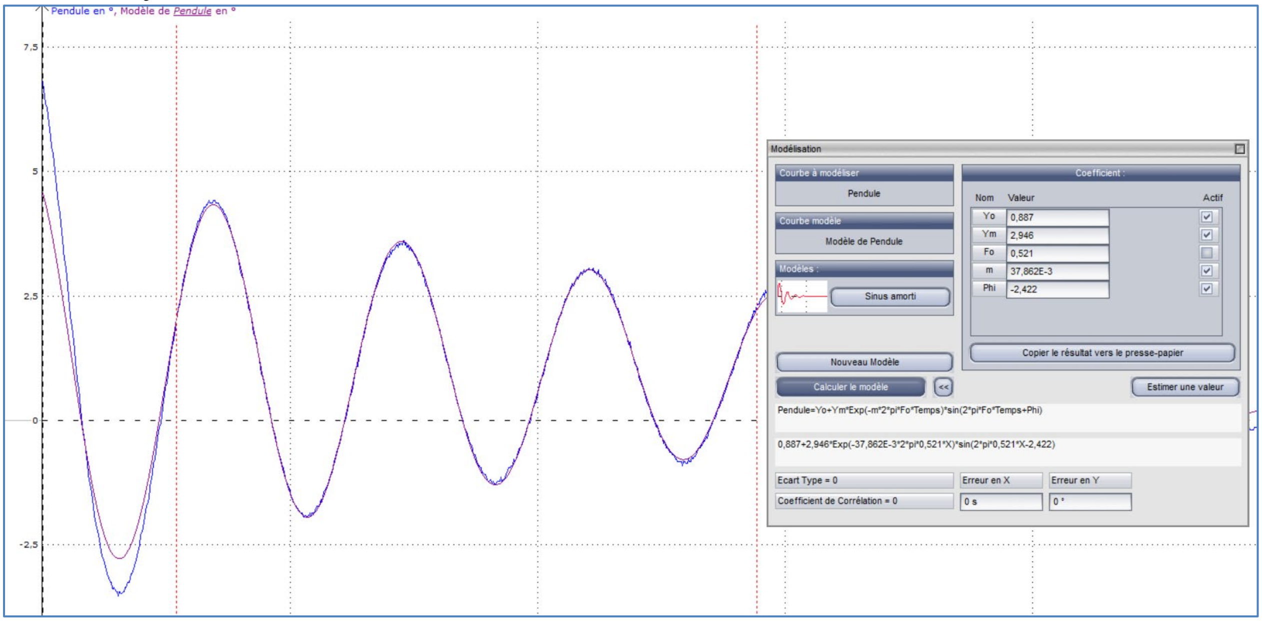
$$\eta_m = t \times \eta_{glycérol} + (1-t)\eta_{eau}$$

Q8) Donner le titre massique de votre solution. En déduire la valeur de la viscosité du mélange. On désire mesurer la viscosité du glycérol. Décrire votre protocole puis donner la valeur obtenue de la viscosité du glycérol. Conclure sur les causes d'erreur.

On avait 200g de glycérol pour 1300g d'eau d'où $t = 0{,}133$.

Vu que $\eta_{gly} \gg \eta_{eau} \Rightarrow \eta_m = 0{,}3\ Pa \cdot s$

Cette fois $R_e = 30 \Rightarrow on\ est\ dans\ le\ domaine\ de\ Stokes.$



On regroupe tous les résultats sous forme de tableau à partir de nos deux mesures (Cela peut valoir le coup de faire une moyenne des différentes valeurs obtenues afin de limiter l'incertitude sur l'exploitation du modèle) :

MESURE DE VISCOSITE			
Expérience dans l'eau		Expérience dans le mélange pour 200g de glycérine mélangé à 1300g d'eau	
CALCUL DE Re		CALCUL DE Re	
R (boule) en m	0,0275	R (boule) en m	0,0275
l (longueur) en m	0,450	l (longueur) en m	0,450
Viscosité de l'eau (en Pa.s)	0,001	Viscosité du mélange (en Pa.s)	0,201
Amplitude max (en dégré)	3,254	Amplitude max (en dégré)	4,190
fréquence des oscillations (Hz)	0,525	fréquence des oscillations (Hz)	0,521
		Masse eau (en g)	1300,000
		Masse Glycérol (en g)	200,000
		titre massique	0,133
Masse volumique de l'eau (en kg/m3)	1000,000	Masse volumique glycérol (en kg/m3)	1260,000
		Masse volumique mélange en kg/m3	1034,667
Valeur de Re	4632,003	Valeur de Re	30,489
CALCUL DES GRANDEURS MECANIQUES		CALCUL DES GRANDEURS MECANIQUES	
Masse de l'ensemble (en kg)	0,322	Masse de l'ensemble (en kg)	0,322
Pesanteur (en m/s2)	9,810	Pesanteur (en m/s2)	9,810
Moment d'inertie (kg.m²)	0,131	Moment d'inertie (kg.m²)	0,133
Valeur de m (Latis-Pro)	0,046	Valeur de m (Latis-Pro)	0,038
Valeur de Q	10,966	Valeur de Q	13,228
CALCUL DES GRANDEURS MECANIQUES		CALCUL DES GRANDEURS MECANIQUES	
Valeur de la viscosité (en Pa.s)	0,375	Valeur de la viscosité du mélange (en Pa.s)	0,313
		Valeur de la viscosité du glycérol exp (en Pa.s)	2,348
Erreur relative (en pourcentage)	37375,384	Erreur relative (en pourcentage)	56,528

On obtient un $\eta_{m,exp} = 0{,}313\ Pa \cdot s$ ce qui est le double de ce qui est attendue et un $\eta_{gly,exp} = 2{,}35\ Pa \cdot s$.
Cette fois-ci on a l'ordre de grandeur mais une valeur tout de même éloigné de celle attendue. On peut donner des causes à cette différence :

- Si on suppose le barycentre vers $l' = 40\ cm$ (principe du fléau) et le point d'application de la force visqueuse vers $l'' = 50cm$ on obtient :

$$\begin{cases} J = \dfrac{\mathrm{mgl}}{\omega_0^2} = \dfrac{0{,}322 \times 9{,}8 \times 0{,}40}{3{,}30^2} = 0{,}119\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \\ \eta_{gly,exp} = \dfrac{J\omega_0}{6\pi Q R l''^2} = \dfrac{0{,}119 \times 2 \times \pi \times 0{,}521}{6 \times 3{,}14 \times 11{,}0 \times 2{,}75 \cdot 10^{-2} \times (0{,}5)^2} = 0{,}191\ Pa \cdot s \end{cases} \Rightarrow E.R = 5{,}0\ \%$$

- Les frottements de l'air ont été totalement négligé. Or on remarque que notre viscosité est surestimée. Cependant le rapport des viscosités semble donner raison à cette hypothèse (rapport de 1000).
- Le frottement solide intervient au niveau du pendule. Vous avez p-e même du faire les acquisitions sur les premières oscillations car ce frottement solide est bien présent, d'autant plus à faible vitesse.
- L'eau change la nature de la glycérine ainsi la viscosité est plus abaissée que prévue lors du mélange.
- 😊