

PROPAGATION D'ONDES LE  
LONG D'UNE CHAÎNE DE  
PENDULES COUPLÉS

- ① Il faut pouvoir négliger les frottements de l'air.  
 → Si modèle de frottement fluide,  $|C_{\text{frott.}}| = K|\dot{\theta}|$   
 il faut, par exemple, que  $K|\dot{\theta}| \ll C|\Delta\theta|$   
 ou/et  $K|\dot{\theta}| \ll mgl|\sin\theta|$ .

- ② \* TMC sur pendule ① / axe (Ox):

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 + C(\theta_2 - \theta_1) - mgl \underbrace{\sin\theta_1}_{\approx \theta_1}$$

$$\text{soit } \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{2C}{ml^2} + \frac{g}{l}\right)\theta_1 = \frac{C}{ml^2}\theta_2$$

$$\text{ou } \ddot{\theta}_1 + (2\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_1 = \omega_c^2\theta_2$$

$$\text{* De même : } \ddot{\theta}_2 + (2\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_2 = \omega_c^2\theta_1$$

→  $\omega_c =$  pulsation caractéristique d'un pendule de torsion, sans pesanteur.

→  $\omega_c =$  pulsation propre d'un pendule sans torsion, de la chaine de pesanteur.

$$\text{③ } \textcircled{a} \begin{cases} \theta_+ = \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_- = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \ddot{\theta}_+ + (\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_+ = 0 & (1) \\ \ddot{\theta}_- + (3\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_- = 0 & (2) \end{cases}$$

⑥ On a obtenu un découplage des équos. diff.

$$\text{④ } \textcircled{a} \text{* } \theta_-(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_1(t) = \theta_2(t) \quad \forall t}$$

⇒ Mode SYMETRIQUE: les 2 pendules oscillent en phase.

$$(*) \theta_+(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_1(t) = -\theta_2(t) \quad \forall t} \quad (3)$$

$\Rightarrow$  Mode ANTISYMETRIQUE: les 2 pendules oscillent en opposition de phase.

$$(b) (*) \text{ Mode Symétrique: } \theta_1 = \theta_2 = \theta_{+1/2}$$

$\Rightarrow$  les 2 pendules sont régies par l'éq. (1)

donc  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des fonctions sinusoïdales

(identiques), de pulsation  $\boxed{\omega_{1,1} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_g^2}}$

$$(*) \text{ Mode Antisymétrique: } \theta_1 = -\theta_2 = \theta_{-1/2}$$

$\Rightarrow$  les 2 pendules sont régies par (2)

$\Rightarrow$   $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des fonctions sinus. (opposées)

de pulsation  $\boxed{\omega_{1,-1} = \sqrt{3\omega_c^2 + \omega_g^2}}$

(c) Dans un mode propre,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont régies par la même éq. diff

$\Rightarrow$  les 2 pendules oscillent à la même pulsation.

(d) (\*) Mode Symétrique: le câble central n'est pas tendu (car  $\theta_1 = \theta_2$ ).

$\rightarrow$  seul un câble relié à un pendule est tendu  $\Rightarrow$  une seule contribution de  $\omega_c^2$ . Donc  $\omega_{1,1} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_g^2}$

(\*) Mode Antisymétrique: le câble central est ici 2 fois plus tendu que les câbles latéraux (car  $\theta_1 = -\theta_2$ )

$\Rightarrow$  le câble central a donc une contribution double de celle d'un câble

latéral  $\Rightarrow$  3 contributions de  $\omega_c^2$

Donc  $\omega_{1,-1} = \sqrt{3\omega_c^2 + \omega_g^2} \quad (2+1)$

⑤ ⊗ C s'exprime en N.m tandis que G s'exprime en N.m<sup>-2</sup> ⑤

→ les 2 autres paramètres étant des longueurs, on en déduit que  $C \propto G$

⊗ Donc  $C = \text{cste} \times G \times (\text{longueur})^3$

→ de plus, la raideur augmente avec le rayon du câble et diminue avec sa longueur.

donc  $C = \text{cste} \times G \times \frac{R^p}{a^q}$  où  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

→ il faut donc résoudre ds  $\mathbb{N}^2$ :  $p - q = 3$ .

La solution la plus "simple" est  $\begin{cases} p=4 \\ q=1 \end{cases}$  (plus petites valeurs)

donc, on peut penser que :

$$C = \text{cste} \times G \times \frac{R^4}{L}$$

⑥ Même démarche que ci-dessus :

$$m \ddot{\theta}_n = -C(\theta_n - \theta_{n-1}) + C(\theta_{n+1} - \theta_n) - mg \theta_n$$

$$\text{d'où : } \ddot{\theta}_n + \left( \frac{2C}{m} + g \right) \theta_n = \frac{C}{m} (\theta_{n-1} + \theta_{n+1})$$

$$\text{i.e. : } \ddot{\theta}_n + (2\omega_c^2 + \omega_g^2) \theta_n = \omega_c^2 (\theta_{n-1} + \theta_{n+1})$$

$$\text{⑦ } \theta_{n+1}(t) = \theta(x_{n+1}, t) = \underbrace{\theta_n(t)}_{\theta(x_n, t)} + a \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$$

$$\text{d'où } \theta_{n-1} + \theta_{n+1} = 2\theta_n + a^2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$$

$$\text{soit : } \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \underbrace{a^2 \omega_c^2}_{\frac{c_0^2}{a^2}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \underbrace{\omega_g^2}_{\omega_0^2} \theta = 0 \quad \begin{cases} c_0 = a \omega_c \\ \omega_0 = \omega_g \end{cases}$$

→  $c_0$  = célérité des ondes de torsion le long de la chaîne ④

→  $\omega_0$  = pulsation propre des oscillateurs de  $\vec{g}$  uniforme, sans torsion.

⑧ Il faut que la fonction  $\theta(x, t)$  varie peu à l'échelle du pas  $a$ .

→ il faut donc que  $\frac{a^2}{2} \left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right| \ll a \left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|$

i.e.:  $a \ll \lambda$  si on considère une perturbation sinusoïdale de longueur d'onde  $\lambda$ .

⑨  $c_0 = a \sqrt{\frac{C}{m a^2}} = \sqrt{\frac{C a}{m a} \cdot \frac{1}{a^2}}$  soit  $c_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{C}{\mu}}$

⑩ Erreur d'énoncé → il faut maintenir le rapport  $\frac{C}{\mu}$  constant !! (intérêt de la question?)

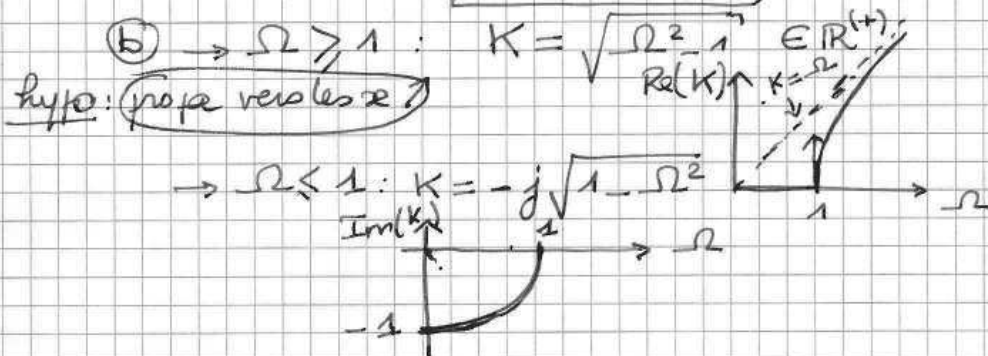
⑪  $c_0 \approx 3 \text{ m.s}^{-1}$

⑫  $a \ll \left( \frac{|\partial^2 \theta / \partial x^2|}{|\partial \theta / \partial x|} \right) \Rightarrow a \ll \frac{1}{k}$  soit  $a \ll \lambda$

⑬ a) Relation de dispersion:

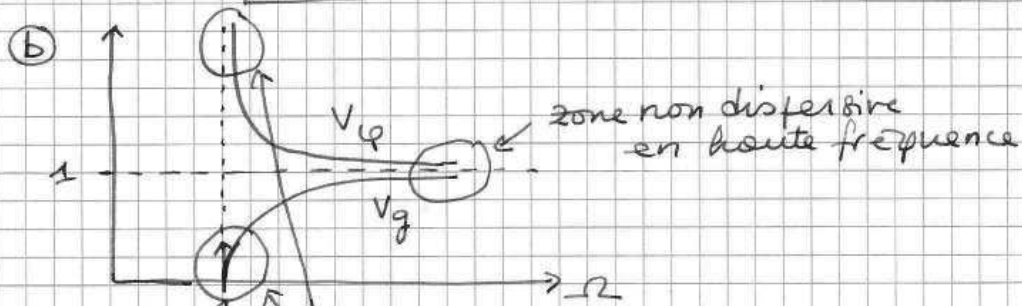
$$-\omega^2 + k^2 c_0^2 + \omega_0^2 = 0$$

soit  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2}$  ou  $K^2 = \Omega^2 - 1$



14 a) 
$$V_{\varphi} = \frac{\Omega}{K} = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\Omega^2}} \geq 1 \quad (5)$$

$$K^2 = \Omega^2 - 1 \text{ donne : } 2K dK = 2\Omega d\Omega$$
  
 donc 
$$V_g = \frac{d\Omega}{dK} = \frac{K}{\Omega} = \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega} = \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}$$



zone de très forte dispersion  
 → avec  $V_g \rightarrow 0$  quand  $\Omega \rightarrow 1^+$ :  
 la propagation n'est possible que  
 par  $\Omega > 1$ .  
 → avec  $V_{\varphi} \rightarrow +\infty$ : pas gênant car  $V_{\varphi}$   
 caractérise la propagation d'une  
 OPPH: non physique.

15)  $\ast$  si  $\Omega > 1$ : il apparaît une onde progressive  
 sinusoïdale se propageant vers les  
 $x > 0$ , le long de la chaîne.

→ l'excitateur fournit de l'énergie  
 qui se propage ds le milieu

$\ast$  si  $\Omega \leq 1$ : aucune propagation n'est  
 possible. De plus, on n'a envisagé  
 aucun phénomène dissipatif.

⇒ l'énergie fournie est donc intégrale-  
 ment réfléchi sur l'excitateur.

16) L'élément (C, a) est sans masse. Le TMC

donne donc:  $0 = M - C\theta$

donc  $\frac{M}{\theta} = C$

→ en RSF,  $\underline{\dot{\theta}} = j\omega \underline{\theta}$  (6)

$$\text{donc } \boxed{Z_{\text{c\^a}ble} = \frac{M}{\underline{\dot{\theta}}} = \frac{M}{j\omega \underline{\theta}} = -j \frac{C}{\omega}}$$

(17) Le TMC donne, pour un pendule seul (sans torsion):

$$ml^2 \underline{\ddot{\theta}} = \underline{M} - mgl \underline{\theta}$$

||  
-  $ml^2 \omega^2 \underline{\theta}$

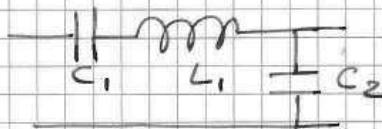
$$\text{donc } \frac{M}{\underline{\theta}} = ml^2 [\omega_g^2 - \omega^2] = ml^2 (\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$\text{soit } \boxed{Z_{\text{pendule}} = -j \frac{ml^2 \omega_0^2}{\omega} + j ml^2 \omega}$$

(18) (a)  $Z_{\text{c\^a}ble} = \frac{C}{j\omega} \leftrightarrow$  capacit\^e (seule!)

(b)  $Z_{\text{pendule}} = \frac{ml^2 \omega_0^2}{j\omega} + j(ml^2)\omega \leftrightarrow$  capacit\^e + bobine, en s\^erie.

⇒ la seule structure susceptible de convenir est donc la (a):



(b) → C\^able:  $C_2 \leftrightarrow \frac{1}{C}$  ← torsion

→ pendule:  $\left\{ \begin{array}{l} C_1 \leftrightarrow \frac{1}{ml^2 \omega_0^2} = \frac{1}{mgl} \\ L_1 \leftrightarrow ml^2 \end{array} \right.$

(19) Un c\^a

$$\textcircled{20} \quad M = C(\theta_{n-1} - \theta_n) \approx -aC \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} \quad \text{prop. vers les } x \uparrow \quad \textcircled{7}$$

$$\text{donc } Z_{\text{méca}} = \frac{M}{\dot{\theta}} = \frac{-aC \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na}}{j\omega \theta} = \frac{+aC k}{\omega}$$

$$\textcircled{21} \quad \Omega \hat{=} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad K \hat{=} k \cdot \frac{c_0}{\omega_0}$$

$$\text{donc } Z_{\text{méca}} = \pm \frac{aC}{c_0} \frac{K(\Omega)}{\Omega} \quad ; \quad \text{or (cf. ③)}, \quad aC = \mu l^2 c_0^2$$

$$\text{d'où } Z_{\text{méca}} = \pm \mu l^2 c_0 \frac{K(\Omega)}{\Omega}$$

$$\textcircled{22} \quad \Gamma(\Omega) \text{ s'exprime en s.m}^{-1} \Gamma'(\Omega)$$

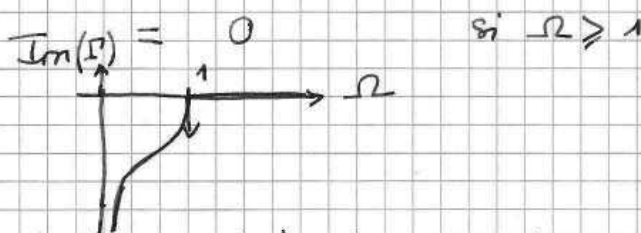
→ c'est l'inverse d'une vitesse :

$$\textcircled{23} \quad \otimes \text{ D'après (13) (b), } \text{Re}(\Gamma'(\Omega)) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}} & \text{si } \Omega \gg 1 \\ 0 & \text{si } \Omega \leq 1 \end{cases}$$

N.B. :  $\text{Re}(\Gamma'(\Omega))$  n'est autre que  $V_g$  pour  $\Omega \gg 1$



$$\otimes \text{Im}(\Gamma'(\Omega)) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - 1} & \text{si } \Omega \leq 1 \\ 0 & \text{si } \Omega \geq 1 \end{cases}$$



$\textcircled{24} \quad \otimes$  en BF ( $\Omega \ll 1$ ) : l'impédance est imaginaire pure et  $|Z_{\text{méca}}| \rightarrow +\infty$  quand  $\Omega \rightarrow 0$ .

$\otimes$  en HF ( $\Omega \gg 1$ ) : l'impédance est réelle et  $|Z_{\text{méca}}| \rightarrow \mu l^2 c_0$  quand  $\Omega \rightarrow +\infty$

Pour  $\Omega \gg 1$ ,  $Z_{\text{mecc}}$  est indépendante de  $\Omega$ . (8)

\* Pour  $\Omega = 1$ :  $\Gamma = 0$  et  $Z_{\text{mecc}} = 0$

\* D'autre part, on a vu ci-dessus que si  $\Omega \gg 1$ :

$$\boxed{V_g(\Omega \gg 1) = \Gamma(\Omega \gg 1)}$$

(25) Pour  $\Omega \gg 1$ ,  $Z_{\text{mecc}}$  est réelle

donc  $M = Z_{\text{mecc}} \dot{\theta}$  (en réels)

→ la puissance fournie par la partie gauche de la chaîne à la partie droite vaut donc:

$$P(x,t) \hat{=} M(x,t) \times \dot{\theta}(x,t) = Z_{\text{mecc}} \times \dot{\theta}^2(x,t)$$

$$\text{donc } \langle P \rangle = \frac{1}{2} Z_{\text{mecc}} \omega^2 \theta_0^2 > 0 \quad (\text{par une propagation selon les})$$

→ la puissance fournie par l'opérateur  $x \uparrow$  est propagée le long de la chaîne, sans dissipation.

(26) Pour  $\Omega \leq 1$ ,  $Z_{\text{mecc}}$  est imaginaire pure.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [ \underline{M} \times \dot{\theta}^* ] = \frac{1}{2} \omega^2 \theta_0^2 \text{Re} [ Z_{\text{mecc}} ]$$

donc  $\langle P \rangle = 0$ : aucune puissance ne se propage le long de la chaîne.

Comme il n'y a pas non plus dissipation, la puissance fournie par l'opérateur est donc REFLECTÉE TOTALEMENT sur lui.

$$(27) * \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x} \times F'(z) = F'(z).$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = F''(z)$$

$$* \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \times F'(z) = -v F'(z)$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 F''(z)$$



donc  $(v^2 - c_0^2) F''(z) + \omega_0^2 \sin F(z) = 0$  (9)

⊗ Multiplions cette équation par  $F'(z)$ :

$$\underbrace{F''(z) \cdot F'(z)}_{\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} (F'(z))^2 \right)} + \frac{\omega_0^2}{v^2 - c_0^2} F'(z) \sin F(z) = 0 \quad (\text{si } \underline{v \neq c_0}).$$

donc, en intégrant, on obtient:

$$\boxed{\frac{1}{2} \left( \frac{dF}{dz} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} \cos F = B}$$

(28) a) Pour un point matériel  $\overset{\text{à 1D}}{V}$ , son énergie mécanique s'écrit:  $\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x)$

→ si  $m = 1$ , on a bien:  $\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x)$

Formellement, c'est le même problème.

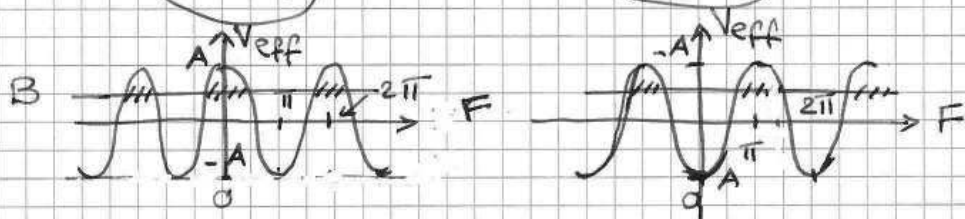
$$\frac{1}{2} \left( \frac{dF}{dz} \right)^2 + V_{\text{eff}}(z)$$

b) B est l'équivalent de l'énergie mécanique (constante) du point matériel (si il n'y a pas dissipation).

(29) a)

$v < c_0 : A > 0$

$v > c_0 : A < 0$



b) L'équation (7) impose que  $B - V_{\text{eff}} \geq 0$

→ si  $B > |A|$ : toutes les valeurs de F sont permises

→ si  $B < -|A|$ : il n'y a pas de solution.

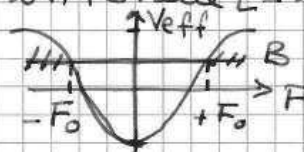
→ si  $-|A| \leq B \leq |A|$  : seuls certains intervalles de  $F$  (définis modulo  $2\pi$ ) sont accessibles. (13)

(30) (a) Pour  $v < c_0$ ,  $A > 0$ . Si  $B \rightarrow A^-$ , on tend vers une situation où toutes les valeurs de  $F$  sont fermées, avec  $V_{\text{eff}}(F) = B$  pour  $F \equiv 0 [2\pi]$ .

(évolution monotone de  $x$ ) → il s'agit d'un mouvement de révolution (cas d'un pendule simple) avec annulation de l'énergie cinétique à chaque passage par les positions  $x \equiv 0 [2\pi]$

(b) Pour  $v > c_0$ ,  $A < 0$ .

Si  $A < B < -A$ , le point matériel aura un mouvement périodique (non sinusoïdal) compris dans l'intervalle  $[-x_0, +x_0]$  centré sur 0.



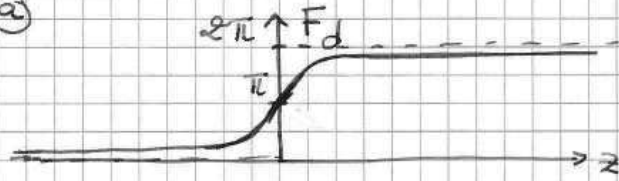
→  $F(x)$  est donc une fonction périodique de  $x$ , d'amplitude  $F_0$  définie par  $A \cos F_0 = B$ .

→ à  $t$  fixé :  $\theta(x, t)$  est donc une fonction périodique de  $x$

→ à  $x$  fixé,  $\theta(x, t)$  est aussi une fonction périodique de  $t$ .

(c) Pour  $v > c_0$  et  $B \rightarrow A^+$ , on retrouve le cas du (a) ( $v < c_0$  et  $B \rightarrow A^-$ ) (sauf que les positions  $2k\pi$  et  $(2k+1)\pi$  sont fermées).

(31) a



(11)

$$F_d(-\infty) = 0$$

$$F_d(0) = \pi$$

$$F_d(+\infty) = 2\pi$$

NB:  $F_d$  est bien monotone

$$(b) \otimes \frac{\partial \theta}{\partial x} = F'_d(z) = 4 \cdot \frac{1}{\lambda} e^{z/\lambda} \cdot \frac{1}{1 + e^{2z/\lambda}}$$

$$\otimes z = x - vt ; \text{ donc } \lim_{+\infty} z = \lim_{+\infty} x$$

$$\rightarrow \text{ en } +\infty : \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{4}{\lambda} e^{-z/\lambda} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \text{ en } -\infty : \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{4}{\lambda} e^{+z/\lambda} \rightarrow 0$$

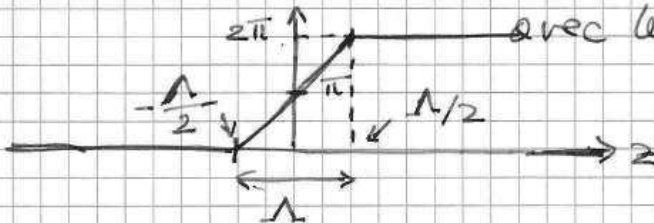
$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0}$$

ça se voyait  
directement sur  
la courbe...

$$(c) F'_d(0) = \frac{2}{\lambda} \rightarrow \text{ au voisinage de } 0, \text{ on approche}$$

$$F_d(z) \text{ par : } F_d(z) \approx \pi + \frac{2z}{\lambda}$$

$\rightarrow$  on raccorde par morceaux  
avec les asymptotes:



$$\rightarrow \Lambda \text{ est définie par : } \frac{2}{\lambda} \cdot \Lambda = 2\pi$$

$$\text{soit } \boxed{\Lambda = \pi \lambda}$$

$$(d) \boxed{\lambda_0 = \frac{c_0}{\omega_0} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ m}} \text{ (et } \Lambda \approx 1 \text{ m)}$$

32

a

• à  $t$  fixé ( $t = t_1$ , par exemple),

12

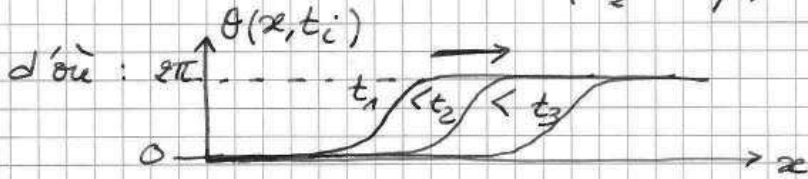
$$\theta(x, t_1) = F(\underbrace{x - vt_1}_z) \text{ donc } \theta(x, t_1) \text{ a}$$

la même allure que  $F(z)$

$$\bullet \theta(x', t_2) = \theta(x, t_1) \Leftrightarrow \begin{matrix} F(x' - vt_2) \\ F(x - vt_1) \end{matrix}$$

i.e.:  $x' - vt_2 = x - vt_1$  ( $F$  est bijective)

$$\text{soit } x' - x = v(t_2 - t_1) > 0$$



b) • à  $x$  fixé ( $x = x_1$ , par exemple),

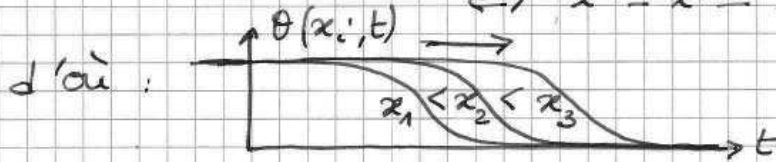
$$\theta(x_1, t) = F(\underbrace{x_1 - vt}_z)$$

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $z \rightarrow -\infty$  et inversement. La courbe est donc "retournée".

• de même,  $\theta(x_2, t') = \theta(x_1, t)$

$$\Leftrightarrow x_2 - vt' = x_1 - vt$$

$$\Leftrightarrow t' - t = \frac{x_2 - x_1}{v} > 0$$



33

portion au repos

34 a) la torsion s'effectue

dans le sens direct (et donc "vers la droite")

→ d'où le nom "dextre"

portion au repos

b) Une solution "gauche" aurait les mêmes propriétés de propagation, mais la

torsion doit s'effectuer "vers la gauche":  $\theta$  doit 13  
 donc passer de 0 à  $\ominus 2\pi$ .

$\Rightarrow$  il suffit de changer le signe de  $F_1$ :

$$F_3(z) = \ominus 4 \arctan(\exp(z/\lambda))$$

35 (a) Il s'agit clairement de solitons seules, puisque le saut de  $\theta$  est de  $\ominus 2\pi$ .

(b)  $\rightarrow$  Cas (a): distance parcourue par le front d'onde entre  $t_0$  et  $t_+$ :  $\Delta x \approx \frac{5,6}{12} \times 5 \approx 2,3 \text{ m}$

$$\text{donc } \boxed{v_a \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2,3}{7 \times 0,12} \approx 2,8 \text{ m.s}^{-1}}$$

$\rightarrow$  Cas (b): de même:  $\boxed{v_b \approx \frac{1}{7 \times 0,12} = 1,2 \text{ m.s}^{-1}}$

(c)  $\rightarrow$  Cas (a):  $\Lambda_a \approx 0,4 \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_a = \frac{\Lambda}{\pi} \approx 0,1 \text{ m}}$

$\rightarrow$  Cas (b):  $\Lambda_b \approx 1,7 \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_b \approx 0,5 \text{ m}}$

36 (a) L'énergie injectée dans la chaîne par l'opérateur en  $x=0$  va se propager (à parité) vers les  $x > 0$  et vers les  $x < 0$ .

\* Les deux solutions doivent se raccorder avec la C.L. en  $x=0$ ,  $\forall t$ :  $\theta(x=0, t) = \theta_0(t)$ .

\* Solution se propageant vers les  $x > 0$ :

$$\theta(x \geq 0, t) = 4 \arctan[\exp \Omega_0 (t - \frac{x}{v})]$$

$\Delta$  Cela suppose

$$v < c_0$$

$$\text{avec } \Omega_0 = \frac{v}{\lambda}$$

\* Solution se propageant vers les  $x < 0$ :

$$\theta(x \leq 0, t) = 4 \arctan[\exp \Omega_0 (t + \frac{x}{v})]$$

$$\text{avec } \Omega_0 = \frac{v}{\lambda}$$

⑤ \* Solution  $\theta(x > 0, t) = 4 \arctan\left[\exp\left(\Omega_0\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)\right]$  (14)

→ propagation vers les  $x > 0$ .

→ chiralité: A  $t$  fixé,  $\theta$  est une fonction décroissante de  $x$ .

⇒ les pendules tournent donc de le sens horaire (lorsqu'on les observe depuis la droite : sens de propagation pointant vers l'observateur).

⇒ il s'agit donc d'une solution gauche

\* Solution  $\theta(x \leq 0, t) = 4 \arctan\left[\exp\left(\Omega_0\left(t + \frac{x}{v}\right)\right)\right]$

→ propagation vers les  $x < 0$

→ chiralité: A  $t$  fixé,  $\theta$  est ici une fonction croissante de  $x$

⇒ quand  $x \downarrow$ ,  $\theta \downarrow$ .

Donc, observés depuis la source (en  $x=0$ ), les pendules tournent dans le sens horaire.

MAIS, en adoptant la convention (non précisée par l'énoncé) que l'observateur voit l'onde arriver sur lui, celui-ci voit donc les pendules tourner de le sens trigonométrique.

⇒ cette solution est donc DEXTRE

③⑦③ D'après ③⑥③, on sait que  $v = \lambda \Omega_0$

$$\text{donc } \frac{v}{c_0} = \frac{\lambda}{c_0} \Omega_0 = \frac{\Omega_0}{\omega_0}$$

⑥  $v = 0,5 c_0 = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$

(38) → Dans le cas d'une chaîne occupant un demi- (15)  
espace, il y aura réflexion en bout de chaîne.

→ La relation (10) n'a de sens que si les solitons  
incident et réfléchi sont bien séparés (presque  
à chaque instant).

→ Cela n'est possible que si la taille  $\lambda$  du  
soliton est très inférieure à la longueur  
de la chaîne:  $\lambda \ll L$

(39) \* Cas (c) (soliton basse vitesse): le soliton est  
REFLECHI TOTALEMENT sur la discontinuité  
et repart vers la source, à la même vitesse.

\* Cas (d) (soliton haute vitesse): le soliton ne  
subit pas de réflexion, mais est transmis  
intégralement dans le milieu à vol, où il  
se propage (à une vitesse plus faible).

(40) a) \* le soliton doit être mesuré de donner naissance  
à un soliton dans le milieu ( $x > 0$ ), d'énergie

$$E_+ = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - v_+^2 / (c_0^+)^2}}$$

→  $E_+$  est une fonction croissante de  $v_+$ ,  
donc l'énergie minimale d'un soliton  
dans le milieu ( $x > 0$ ) vaut:  $E_+^{\min} = E_0^+$

\* Or l'énergie doit être conservée.

Donc le soliton incident doit donc avoir  
l'énergie minimale:

$$E_{\min} = 8\sqrt{\mu_+ g \kappa L}$$

(b) On identifie :  $\frac{8\sqrt{\mu_- g \kappa_- L}}{\sqrt{1 - v_c^2 / c_0^-^2}} = 8\sqrt{\mu_+ g \kappa_+ L}$ , (16)

$(c_0^- = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{\kappa_-}{\mu_-}})$

ce qui donne :  $v_c = \frac{1}{\ell} \sqrt{\kappa \left( \frac{1}{\mu_-} - \frac{1}{\mu_+} \right)}$

(4) Il faut que  $E_+ = E_-$  avec la condition  $v_+ = v_-$  :

$$\frac{8\sqrt{\mu_- g \kappa_- \ell_-}}{\sqrt{1 - (v/c_0^-)^2}} = \frac{8\sqrt{\mu_+ g \kappa_+ \ell_+}}{\sqrt{1 - (v/c_0^+)^2}}$$

ce qui donne :  $\mu_- \kappa_- \ell_- (1 - v^2 \ell_+^2 \frac{\mu_+}{\kappa_+})$

$\mu_+ \kappa_+ \ell_+ (1 - v^2 \ell_-^2 \frac{\mu_-}{\kappa_-})$  
 $\forall v < c_0^-$   
 $\forall v < c_0^+$

→ en particulier :  $v \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\kappa_+ \ell_+}{\kappa_- \ell_-} = \frac{\mu_-}{\mu_+} = \frac{1}{8}$

• si  $v \rightarrow c_0^-$ , alors il faut aussi que  $v \rightarrow c_0^+$  (annulation simultanée des 2 membres)

donc :  $\frac{\ell_+^2 \mu_+}{\kappa_+} = \frac{\ell_-^2 \mu_-}{\kappa_-}$

soit  $\frac{\ell_+^2 \kappa_-}{\ell_-^2 \kappa_+} = \frac{\mu_-}{\mu_+} = \frac{1}{8}$

d'où  $\frac{\ell_+}{\ell_-} = \left( \frac{\mu_+}{\mu_-} \right)^{-2/3} = \frac{1}{4}$

et  $\frac{\kappa_+}{\kappa_-} = \left( \frac{\mu_+}{\mu_-} \right)^{-1/3} = \frac{1}{2}$



(42) → Le raisonnement LOCAL permettant d'aboutir à (5) reste valide (à condition que les paramètres mécaniques varient assez "doucement").

→ mais  $c_0 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  dépendront dorénavant de  $x$  si  $\mu, \kappa$  et  $l$  en dépendent.

① l'équation (5) devrait être modifiée en :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2(x) \sin \theta = 0$$

(43) ①  $E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}}$  et  $\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}$

sont à rapprocher de l'énergie et de la longueur d'onde de de Broglie d'une particule relativiste :

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2 E_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ p = \frac{hc}{\lambda} = \gamma mv \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{mv} \sqrt{1 - (v/c)^2} \\ \lambda_0 \end{cases}$$

(44) Propagation d'un paquet d'ondes planes dans un milieu non dispersif et non atténuant.

(45) ① Pour observer des solitons, il faut 2 ingrédients : non-linéarité et dispersion.

① Câble coax, utilisé dans les conditions des TP ( $f \leq 20$  MHz) : pas de dispersion / non linéarité ⇒ solitons non observables

② Fibre optique : oui c'est possible car c'est un milieu dispersif, et ss fort chp, il peut devenir non linéaire (effet Kerr).

nicolas.chirinet @ free.fr