Physique : DS9 – Savoir Faire

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Les schémas (donnés ou non) devront être (re)tracés sur vos copies avec soin. Les schémas auront des points attitrés pour chaque question. Il faut savoir être **rapide, précis et propre**.

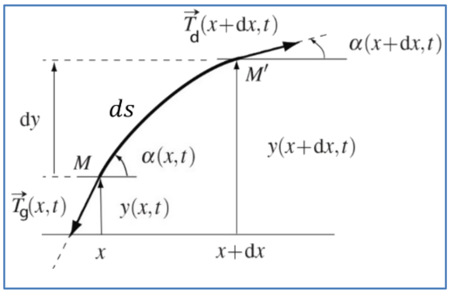
I) Corde vibrante (/6)

Montrer que l'énergie mécanique linéique d'une corde vibrante est de la forme : $e_m = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$*, puis établir l'équation de conservation de l'énergie mécanique dans une corde :* $\frac{\partial e_m}{\partial t} + div(\vec{R}) = 0$ *où* $\vec{R}$ *est une grandeur que l'on nommera et dont on donnera l'expression.*

- Densité linéique d'énergie cinétique :

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu_l dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \Rightarrow e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

- Densité linéique d'énergie potentielle :



Calculons le travail élémentaire d'un opérateur pour allonger la corde au repos de dx à ds tel que $dl = ds - dx$.

$$dE_p = \delta W_{op} = +T_0 dl = +T_0\left(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} - dx\right)$$

$$= +T_0 dx\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right) \overset{D.L}{\simeq} + T_0 \times \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- Densité linéique d'énergie mécanique :

$$\Rightarrow e_m = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} = \mu_l \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$$

D'après l'équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \mu_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial e_m}{\partial t} = T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\right) = T_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

On introduit l'opérateur divergence :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + div\left(-T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x}\right) = 0 \Rightarrow \vec{R} = -T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x}$$

Or : $T_0\frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \tan(\alpha) \sim T_0 \sin(\alpha)$

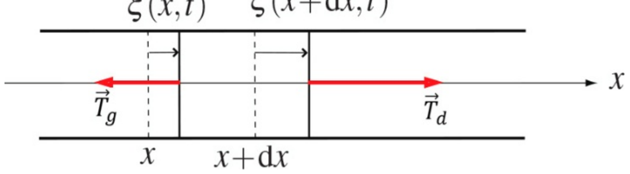
$$\Rightarrow \vec{R} = -T_0 \sin(\alpha)\, v_y \overrightarrow{u_x} = -\vec{T}_0.\vec{v}\,\overrightarrow{u_x}\ (Poynting\ mécanique)$$

II) Lame solide (/4)

Établir l'équation d'Alembert dans le cas d'une lame solide.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la force de traction T permettant à la lame de section S et de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E\,\varepsilon \Rightarrow T = ES\frac{\Delta L}{L}$$



On envisage le cas où l'allongement est positif : $\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0$ ainsi :

- La force de traction $\vec{T}_d$ sera dirigée dans le sens positif de l'axe (Ox).
- La force de traction $\vec{T}_g$ sera dirigée dans le sens négatif de l'axe (Ox).

La tranche qui se trouve au repos entre les plans d'abscisses x et x+dx s'est allongée de :

$$d\xi = \xi(x+dx,t) - \xi(x,t)$$

Par conséquent la force de traction exercée par la partie gauche de la lame sur le système s'écrit :

$$\vec{T}_g = -T(x,t)\overrightarrow{u_x} = -ES\frac{\xi(x+dx,t)-\xi(x,t)}{dx}\overrightarrow{u_x} = -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\overrightarrow{u_x}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à cette tranche de lame dx s'écrit, en négligeant la pesanteur :

$$\delta m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{u_x} = -T(x,t)\overrightarrow{u_x} + T(x+dx,t)\overrightarrow{u_x}$$

$$\Leftrightarrow \delta m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}dx \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}{\partial x}dx \Leftrightarrow \mu S dx\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow \mu\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

Les ondes longitudinales progressant le long de la lame solide vérifient l'équation d'Alembert :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \text{ où } c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

III) Ondes sonores (/4)

Démontrez l'équation de propagation des ondes sonores

- *Euler linéarisé*

Vu que le fluide est parfait et qu'on néglige la pesanteur on a : $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\,p$

$$\Rightarrow \left(\mu_0 + \underbrace{\mu_1}_{\ll \mu_0}\right)\left(\underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t}}_{\substack{ordre\ 1\\ en\ v_1}} + \underbrace{(\vec{v}_1.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v_1}}_{ordre\ 2\ en\ v_1}\right) = -\overrightarrow{grad}\left(\underbrace{p_0}_{cste} + p_1\right)$$

On se limite aux termes du premier ordre donc tout produit de deux termes du premier ordre est un deuxième ordre et sera négligé d'où :

$$\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,p_1 \Rightarrow \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

- *Conservation de la masse linéarisée*

Soit : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + div(\mu\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mu_0+\mu_1)}{\partial t} + div\left((\mu_0+\mu_1)\vec{v}_1\right) = 0$

En se limitant aux termes du premier ordre on a donc :

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\,\vec{v}_1 = 0$$

- *Transformation thermodynamique isentropique*

$$\chi_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\mu_0+\mu_1}\left(\frac{\mu-\mu_0}{p-p_0}\right)_s \Rightarrow \chi_s \sim \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{p_1}\ car\ \mu_0 \gg \mu_1$$

D'où :

$$\mu_1 = \mu_0 p_1 \chi_s$$

Les équations de couplage à une dimension donnent :

$$\begin{cases} \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2) \\ \mu_1 = \mu_0\, p_1\, \chi_s \quad (3) \end{cases}$$

Afin de découpler les équations on va calculer : $\mu_0\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$ de deux façons :

$$(1) \Rightarrow \mu_0\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

$$(2) \Rightarrow \mu_0\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

Le théorème de Schwarz affirme que :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\mu_0\, p_1\, \chi_s)}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

La surpression p_1 obéit donc à l'équation de d'Alembert, unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

(La masse volumique μ_1 et la vitesse v_1 vérifient la même équation.)

IV) *Relations de structure (/4)*

Retrouvez les relations de structure d'une OPPH dans le vide entre $\vec{E}, \vec{B}$ et $\vec{k}$.

Les équations de Maxwell en complexe donnent :

$$\begin{cases} MG : -i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \\ M\phi : -i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \\ MF : -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\, \underline{\vec{B}} \\ MA : -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \dfrac{i\omega}{c^2}\, \underline{\vec{E}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MG : \vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \\ M\phi : \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \\ MF : \vec{B} = \dfrac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} \\ MA : \underline{\vec{E}} = -c^2 \dfrac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{B}} \end{cases}$$

Par conséquent :

- Les vecteurs $(\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}, \vec{k})$ forment un trièdre direct.
- $\omega = kc$ car $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} = \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \left(-c^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{B}}\right) = \frac{k^2\omega^2}{c^2}\underline{\vec{B}}$

Et les relations de structure s'écrivent : $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ *ou* $\underline{\vec{E}} = -c\, \vec{u} \wedge \underline{\vec{B}}$

V) *Conducteur (/4)*

Retrouvez l'équation de dispersion pour une onde électromagnétique à basse fréquence se propageant dans un conducteur : $\underline{k} = \underline{k}(\omega)$. On introduira l'épaisseur de peau que l'on exprimera en fonction de ω, μ_0 et γ_0.

Les équations de Maxwell dans un milieu localement neutre (conducteur) sont :

$$\begin{cases} MG : div\, \vec{E} = 0 \\ M\phi : div\, \vec{B} = 0 \\ MF : \overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA : \overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Comparons les deux termes de Maxwell-Ampère :

$$\frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{j}\|} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma_0 E} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma_0}$$

Or : $\frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{j}\|} \overset{ODG}{\approx} \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma_0} = \frac{8{,}85\ 10^{-12}}{6{,}0\ 10^{7}} \times 2\pi f = 9{,}2\ 10^{-19}\, f$

Par conséquent si $f < 10^{14} Hz$ les équations de Maxwell peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} MG : div\, \vec{E} = 0 \\ M\phi : div\, \vec{B} = 0 \\ MF : \overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA : \overrightarrow{rot}\, \vec{B} \sim \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

D'où :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{E}\right) = -\frac{\partial\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{grad}\left(div\, \vec{E}\right) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial\left(\mu_0 \vec{j}\right)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On cherche des solutions de l'équation différentielle sous forme d'ondes électromagnétiques progressives généralisées :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}} e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})}$$

$$\Rightarrow -\underline{\vec{k}}^2\underline{\vec{E}} = j\omega\mu_0\gamma_0\underline{\vec{E}}$$
$$\Rightarrow \underline{k}^2 = -j\omega\mu_0\gamma_0 = e^{-j\frac{\pi}{2}}\omega\mu_0\gamma_0$$
$$\Rightarrow \underline{k} = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma_0}$$
$$\Rightarrow \underline{k} = \pm\frac{1-j}{\sqrt{2}} * \sqrt{\omega\mu_0\gamma_0}$$
$$\Rightarrow \underline{k} = \pm\frac{1-j}{\delta} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma_0}}$$

VI) Réflexion et transmission (/4)

Retrouvez les équations de continuité en surpression et vitesse pour une onde sonore puis en déduire les différents coefficients de réflexion et de transmission pour une onde sonore.

On applique le principe fondamental de la dynamique à une surface S de l'interface. Comme son nom l'indique, l'interface sépare les deux fluides ; ce ne sont plus les molécules du fluides 1, mais pas encore celle de 2 : l'interface n'a pas de masse. Alors : $m\vec{a} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(P_0 + \underline{P_i}(0,t) + \underline{P_r}(0,t)\right) S\,\overrightarrow{u_x} - \left(P_0 + \underline{P_t}(0,t)\right) S\overrightarrow{u_x} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\underline{P_i}(0,t) + \underline{P_r}(0,t) = \underline{P_t}(0,t)$$
$$\Rightarrow Z_1 v_{0i} e^{j\omega_i t} - Z_1 v_{0r} e^{j\omega_r t} = Z_2 v_{0t} e^{j\omega_t t}$$

Cette équation est vraie pour tout t, ainsi les pulsations des trois ondes sont identiques :

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \text{ notée } \omega \text{ ainsi : } Z_1 v_{0i} - Z_1 v_{0r} = Z_2 v_{0t}$$

Les fluides ne sont pas miscibles, ils ne se mélangent pas. Si les molécules du fluide 1 bougent à une certaine vitesse, ils poussent les molécules du fluide 2 à la même vitesse. Les champs des vitesses sont donc continus :

$$\underline{v_i}(0,t) + \underline{v_r}(0,t) = \underline{v_t}(0,t) \Leftrightarrow v_{0i} + v_{0r} = v_{0t}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1(v_{0i} - v_{0r}) = Z_2 v_{0t} \\ v_{0i} + v_{0r} = v_{0t} \end{cases}$$

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour les champs des vitesses par :

$$r_v = \frac{v_{0r}}{v_{0i}} \text{ et } t_v = \frac{v_{0t}}{v_{0i}}$$

Or :

$$\begin{cases} Z_1(v_{0i} - v_{0r}) = Z_2 v_{0t} \\ v_{0i} + v_{0r} = v_{0t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1(1 - r_v) = Z_2 t_v \\ 1 + r_v = t_v \end{cases}$$
$$\Rightarrow 1 + r_v = \frac{Z_1(1-r_v)}{Z_2} \Rightarrow r_v\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{Z_1}{Z_2} - 1$$
$$\Rightarrow r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_v = 1 + r_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

De même :

$$r_p = \frac{p_{0r}}{p_{0i}} \text{ et } t_p = \frac{p_{ot}}{p_{oi}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r_p = \dfrac{p_{0r}}{p_{0i}} = \dfrac{Z_1 v_{or}}{-Z_1 v_{0i}} = -r_v \\ t_p = \dfrac{p_{ot}}{p_{oi}} = \dfrac{Z_2}{Z_1} t_v \end{cases} \Rightarrow r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance par :

$$R = \frac{\langle\|\overrightarrow{\pi_{0r}}\|\rangle}{\langle\|\overrightarrow{\pi_{0i}}\|\rangle} \text{ et } T = \frac{\langle\|\overrightarrow{\pi_{0t}}\|\rangle}{\langle\|\overrightarrow{\pi_{0i}}\|\rangle}$$

Le calcul des vecteurs de Poynting requiert la notation réelle :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\pi_i} = P_i\overrightarrow{v_i} = Z_1 v_i^2 \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{\pi_r} = P_r\overrightarrow{v_r} = -Z_1 v_r^2 \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{\pi_t} = P_t\overrightarrow{v_t} = Z_2 v_t^2 \overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

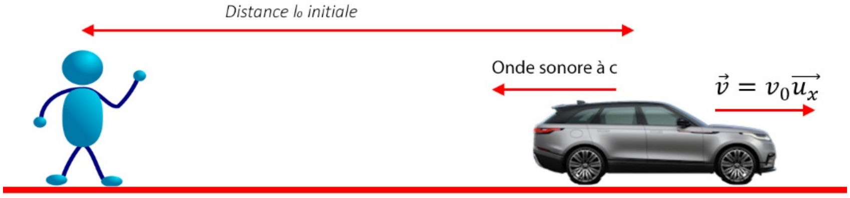
On en déduit : $R = |r_v r_p| \text{ et } T = |t_v t_p|$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = r_v^2 = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \\ T = \dfrac{Z_2}{Z_1} {t_v}^2 = \dfrac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases}$$

On remarque ainsi que : $R + T = 1$

VII) Effet Doppler (/4)

Effet Doppler. Dans le cas où l'émetteur se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ par rapport au récepteur. Démontrez le lien entre l'écart de fréquence, la fréquence de l'émetteur, v_0 et c la célérité de l'onde.



Formalisons cette situation : la distance initiale entre la personne et le haut-parleur est notée l_0.

- Le premier bip est émis en $t_0 = 0$. Il est reçu en $t'_0 = \frac{l_0}{c}$ et ainsi de suite…

N° du Bip	Instant d'émission	Distance	Instant de réception
Bip 0	$t_0 = 0$	l_0	$t'_0 = \frac{l_0}{c}$
Bip 1	$t_1 = T$	$l_1 = l_0 + v_0T$	$t'_1 = T + \frac{l_1}{c}$
…Bip n-1	$t_{n-1} = (n-1)T$	$l_{n-1} = l_0 + v_0(n-1)T$	$t'_{n-1} = (n-1)T + \frac{l_{n-1}}{c}$
Bip n	$t_{n-1} = nT$	$l_n = l_0 + v_0nT$	$t'_n = nT + \frac{l_n}{c}$

On déduit la période T' perçue par l'observateur :

$$T' = t'_{n+1} - t'_n = T + \frac{v_0T}{c} = T\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$$

ainsi que la fréquence mesurée par l'observateur :

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v_0}{c}} \Rightarrow f' - f = f\left(\frac{1}{1 + \frac{v_0}{c}} - 1\right)$$

Si $\frac{v_0}{c} \ll 1$ alors on peut écrire : $\Delta f \sim -\frac{v_0}{c} f$.