Physique : DS4 – Savoir Faire

I) Atmosphère isotherme (/3)

Démontrer que la pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme peut s'écrire à l'aide d'un facteur de Boltzmann $p(z) = p_0 e^{-z/H}$ *(z représente l'altitude) où l'on précisera les hypothèses du modèle, le sens physique de* p_0 *et* H.

On fait l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz parfait et qu'il est en équilibre isotherme, c'est-à-dire que la température T est la même en tout point : T = constante. La masse volumique ρ n'est pas une constante et il faut en tenir compte pour intégrer la relation.

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \Rightarrow pM = \frac{m}{V}RT \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

En reportant cette expression dans l'équation de statique des fluides :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pM}{RT}g$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution est de la forme :

$$p(z) = Ae^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

où A est une constante. On note p_0 la pression à l'altitude z = 0. Finalement :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

On définit la hauteur d'échelle H par l'altitude à laquelle p_0 est divisée par e (base du logarithme népérien). Alors :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}} \text{ où } H = \frac{RT}{Mg}$$

Avec $M = 29\ g.mol^{-1}$ et $T = 273\ K$, on trouve : $H = 8{,}5\ km$ qui est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère terrestre.

II) Atmosphère polytropique (/3)

Retrouver l'expression de la pression dans l'atmosphère dans le cas d'un modèle polytropique où $T(z) = T_0(1 - \lambda z)$. *Représentez les deux modèles sur un graphique* $p = f(z)$.

L'équation de statique des fluides peut s'écrire

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{p(z)M}{RT_0(1-\lambda z)}g$$

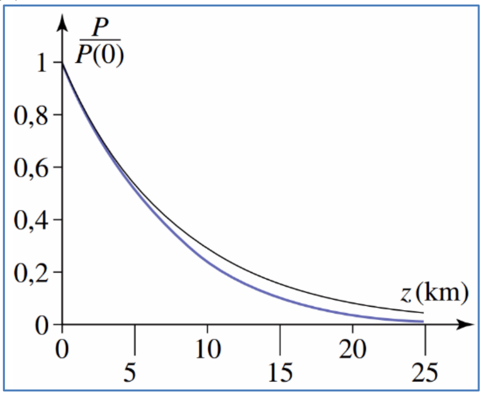
On sépare les variables puis on intègre entre 0 et z et les bornes assorties sur p(z).

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0}\frac{dz}{(1-\lambda z)} \Rightarrow \int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0}\int_0^z \frac{dz}{1-\lambda z}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{p(z)}{p_0}\right) = +\frac{Mg}{\lambda RT_0}\ln\left(\frac{1-\lambda z}{1}\right)$$

On pose : $\beta = \frac{Mg}{\lambda RT_0}$ d'où :

$$p(z) = p_0(1-\lambda z)^{\beta}$$



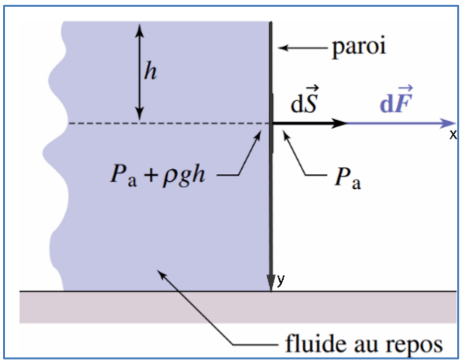
Ce modèle est plus compliqué que le précédent mais les représentations graphiques de p(z) sont très proches, d'où l'utilisation plus courant de l'atmosphère isotherme comme modèle. Cette fois on obtient $\frac{p(H')}{p_0} = \frac{1}{e}$ pour $H' = 7{,}9\ km$.

III) Force et centre de poussée (/5)

Calculer la force exercée par un fluide sur une paroi plane dans le cas d'une séparation eau/air. En déduire le centre de poussée. (On placera l'origine au sommet de la paroi).

La définition de la force de pression nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{F}_{eau\to air} = \iint_{M\in S} (P_a + \rho g h) dS\, \overrightarrow{u_x} \\ \vec{F}_{air\to eau} = \iint_{M\in S} -P_a dS\, \overrightarrow{u_x} \end{cases}$$



D'où la force totale subie par la paroi plane :

$$\vec{F} = \iint_{M\in S} \rho g h \, dS\, \overrightarrow{u_x} = \int_0^H \rho g h\, L dh\, \overrightarrow{u_x}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\rho g L H^2\, \overrightarrow{u_x} \text{ où } \begin{cases} L = largeur\ de\ la\ paroi \\ H = hauteur\ de\ la\ paroi \end{cases}$$

Le centre de poussée C est le point d'application de la force que l'on peut définir ainsi :

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = \int_0^H d\overrightarrow{M_0}(M)$$

$$\Rightarrow h_c \overrightarrow{u_y} \wedge \frac{1}{2}\rho g L H^2\, \overrightarrow{u_x} = \int_0^H \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} = \int_0^H h \overrightarrow{u_y} \wedge \rho g h\, L dh\, \overrightarrow{u_x} = \int_0^H \rho g h^2\, L dh (-\overrightarrow{u_z})$$

$$\Rightarrow h_c \cdot \frac{1}{2}\rho g L H^2 = \frac{1}{3}\rho g H^3 L$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{2}{3} H$$

Le point d'application de la force de poussée se situe au $\frac{2}{3}$ de la hauteur ($\frac{1}{3}$ en partant du sol). En effet la force élémentaire augmente avec la profondeur, il est donc normal d'avoir le centre de poussée en dessous de $\frac{H}{2}$.

IV) Diffusion de quantité de mouvement (/3)

Démontrez que le phénomène de viscosité correspond à une diffusion de quantité de mouvement. On pourra illustrer ce fait en supposant les seules forces de viscosité présentes et un champ des vitesses de la forme $\vec{v} = v_x(y,t)\, \overrightarrow{u_x}$.

En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la particule de fluide, en tenant compte seulement des forces de viscosité, on obtient :

$$\delta m \frac{D\vec{v}}{\partial t} = \overrightarrow{dF_t} + \underbrace{\overrightarrow{dF_p}}_{=\vec{0}}$$

Illustrons ce principe sur l'écoulement de cisaillement décrit par le champ de vitesse : $\vec{v} = v_x(y,t)\, \overrightarrow{u_x}$. Ainsi en projection sur $\overrightarrow{u_x}$:

$$\mu d\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{=0} \right) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

ce qui correspond à une équation de diffusion de coefficient $\nu = \frac{\eta}{\mu}$.

Posons la quantité de mouvement volumique : $p_{x,v} = \mu v_x$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_{x,v}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 p_{x,v}}{\partial y^2}$$

La viscosité peut s'interpréter comme un transfert interne de quantité de mouvement dans la direction transverse à l'écoulement, selon un phénomène de diffusion.

V) Nombre de Reynolds (/2)

Retrouver l'expression du nombre de Reynolds à partir de l'équation de NS.

L'équation de NS s'écrit :

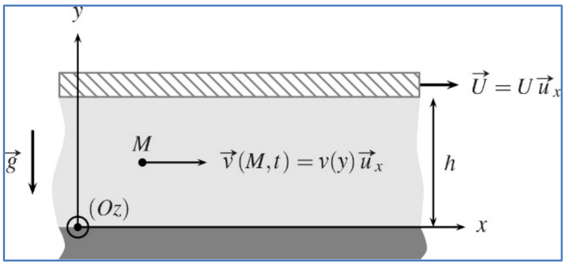
$$\mu\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\underbrace{\mu(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}}_{convectif} - \overrightarrow{grad}\,p + \vec{f_v} + \underbrace{\eta\overrightarrow{\Delta v}}_{diffusif}$$

On utilise l'analyse par ordre de grandeurs afin de comparer les termes diffusifs et convectifs.

$$\begin{cases} \eta\,\Delta v \to \eta U/L^2 \\ \mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \to \mu\dfrac{U^2}{L} \end{cases} \Rightarrow R_e = \frac{terme\ convectif}{terme\ diffusif} = \frac{\mu UL}{\eta}$$

VI) Couette plan (/5)

Après avoir rappelé les hypothèses d'un écoulement de Couette plan, retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Couette plan. Puis calculer la force surfacique exercée par la plaque supérieure sur le fluide.



Le système étudié est invariant par translation selon (Oz). Une plaque entraînée à la vitesse $\vec{U} = U\,\overrightarrow{u_x}$ entraîne une couche de fluide, d'épaisseur uniforme *h*. Aucune force n'est appliquée au fluide, qui est seulement soumis à l'action de la pesanteur et de la plaque. On se place en régime stationnaire. On cherche une solution de l'équation de Navier-Stokes sous la forme : $\vec{v} = v(x,y,t)\,\overrightarrow{u_x}$.

$$\begin{cases} Ecoulement\ incompressible : \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = v_x(y) \\ Ecoulement\ stationnaire : \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

L'équation de Navier-Stokes :

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = \vec{f_v} - \overrightarrow{grad}\,p + \eta\,\overrightarrow{\Delta v}$$

se simplifie en :

$$\Rightarrow \mu\,v_x.\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{=0}\overrightarrow{u_x} = -\mu g\,\overrightarrow{u_y} - \overrightarrow{grad}\,p + \eta\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\ (1) \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \mu g\ (2) \quad \Rightarrow \left.\dfrac{\partial p}{\partial y}\right|_x = -\mu g \Rightarrow p(x,y) = -\mu g y + f(x) \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p = p(x,y) \end{cases}$$

Or le système présente une invariance par translation selon (Ox) :

$$\Rightarrow p(y) = -\mu g y + cste \Rightarrow p(y) = -\mu g y + p(0)$$

Donc (1) se résout :

$$\eta\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v_x = Ay + B$$

Le fluide étant visqueux (réel) :

$$\begin{cases} v_x(0) = 0 = B \\ v_x(h) = Ah + B = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \dfrac{U}{h} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{U}{h}y\,\overrightarrow{u_x}$$

D'où la force exercée par le fluide sur la plaque :

$$\vec{F}_{fluide\to plaque} = -\eta S\frac{\partial v_x}{\partial y}\overrightarrow{u_x} = -\frac{\eta SU}{h}\,\overrightarrow{u_x}$$

VII) Poiseuille (/6)

Après avoir rappelé les hypothèses d'un écoulement de Poiseuille, retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Poiseuille cylindrique. En déduire la loi de Hagen-Poiseuille.

L'écoulement de Poiseuille correspond à l'écoulement d'un fluide réel à l'intérieur d'une conduite cylindrique de rayon R. L'axe de symétrie de révolution de la conduite est (Oz). Pour forcer le liquide à s'écouler, un opérateur impose :

$$\begin{cases} p_e = p(0) \\ p_s = p(L) < p_e \end{cases} avec\ \Delta p = p_e - p_s > 0$$

Hypothèses :

$$\begin{cases} Ecoulement\ incompressible \\ Ecoulement\ stationnaire \\ pesanteur\ négligée \\ \vec{v}(M,t) = v(r)\overrightarrow{u_x} \Rightarrow \Delta v_x = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_x}{\partial r}\right) \end{cases}$$

L'équation de NS se simplifie en :

$$\mu v_x \frac{\partial v(r)}{\partial x}\overrightarrow{u_x} = -\overrightarrow{grad}\,p + \eta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_x} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_x}{\partial r}\right) \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial r}\ et\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \end{cases}$$

Donc p ne dépend que de x et v dépend que de r donc :

$$\frac{dp}{dx} = \eta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dv_x}{dr}\right) \Leftrightarrow F(x) = G(r)$$

Comme x et r sont deux variables indépendantes, chacune de ces deux fonctions est nécessairement égale à une constante, indépendante de r et de x, que nous notons K :

$$\frac{dp}{dx} = K \Rightarrow p(x) = Kx + B$$

$$Or : \begin{cases} p(0) = p_e \\ p(L) = p_s \end{cases} \Rightarrow p(x) = \frac{p_s - p_e}{L}x + p_e$$

D'où :

$$\eta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dv_x}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{L} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dv_x}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta L}r$$

$$\Rightarrow r\frac{dv_x}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta L}\frac{r^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta L}\frac{r}{2} + \frac{C}{r}$$

$$\Leftrightarrow v_x = -\frac{\Delta p}{\eta L}\frac{r^2}{4} + C\,Ln(r) + D$$

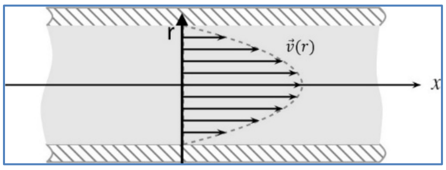
Or $Ln(r)$ diverge en r=0 donc C=0 d'où :

$$v_x = -\frac{\Delta p}{\eta L}\frac{r^2}{4} + D$$

Les parois étant immobiles :

$$v(R) = 0 \Rightarrow v_x = -\frac{\Delta p}{4\eta L}(r^2 - R^2) \Rightarrow \vec{v}(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)\overrightarrow{u_x}$$

Le profil des vitesses est le suivant :



Pour retrouver la loi de Hagen-Poiseuille, calculons le débit volumique du fluide dans l'écoulement de Poiseuille :

$$D_v = \iint_S \vec{v}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2).\ \underbrace{rdrd\theta}_{\substack{couronne \\ cylindrique}}$$

$$\Leftrightarrow D_v = \frac{\Delta p}{4\eta L}2\pi\left(R^2\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\Delta p}{2\eta L}\frac{\pi R^4}{4}$$

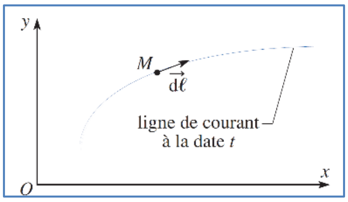
On fait l'analogie avec la loi d'ohm en électrocinétique :

$$I = \frac{U}{R} \leftrightarrow D_v = \frac{\Delta p}{R_h}\ \text{où}\ R_h = résistance\ hydraulique \Rightarrow D_v = \frac{\Delta p}{R_h} = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta p\ \text{où}\ R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

VIII) Bernoulli (/4)

Retrouver le théorème de Bernoulli dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, et tourbillonnaire. On rappelle que $\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{rot}\vec{v}\right) \wedge \vec{v} = \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$.

Considérons un écoulement parfait et tourbillonnaire on peut donc partir de l'équation d'Euler. Intégrons l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant. Pour ce faire multiplions par un élément de longueur $\overrightarrow{dl}$.



$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{rot}\vec{v}\right) \wedge \vec{v}\right).\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{f_v}.\overrightarrow{dl} - \overrightarrow{grad}\, p.\overrightarrow{dl}$$

Or : $\left(\left(\overrightarrow{rot}\vec{v}\right) \wedge \vec{v}\right).\overrightarrow{dl} = 0\ car\ \overrightarrow{dl} = \vec{v}dt$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.\overrightarrow{dl} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right).\overrightarrow{dl} = \frac{\overrightarrow{f_v}}{\mu}.\overrightarrow{dl} - \frac{\overrightarrow{grad}\, p}{\mu}.\overrightarrow{dl}$$

On suppose que les forces massiques dérivent d'une énergie potentielle d'où :

$$\frac{\overrightarrow{f_v}}{\mu} = \overrightarrow{f_m} = -\overrightarrow{grad}\, e_p = -\overrightarrow{grad}\,(gz)\ pour\ la\ pesanteur$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.\overrightarrow{dl} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2} + e_p\right).\overrightarrow{dl} = -\frac{\overrightarrow{grad}\, p}{\mu}.\overrightarrow{dl}$$

Or l'écoulement est du type :

$$\begin{cases} Stationnaire : \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}\ et\ \dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \\ Fluide\ homogène : \dfrac{\overrightarrow{grad}\, p}{\mu} = \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{p}{\mu}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{v^2}{2} + e_p + \frac{p}{\mu}\right) = 0$$

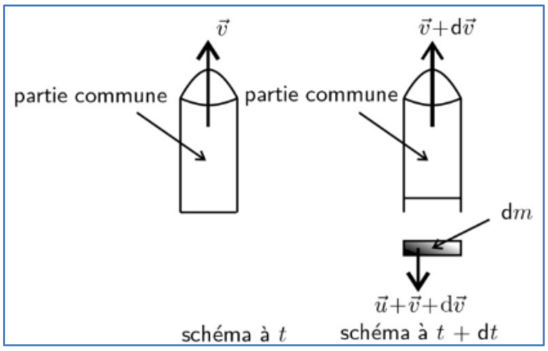
Dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, tourbillonnaire d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, on vérifie le théorème de Bernoulli, *le long d'une ligne de courant* :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\mu}$$

où A et B appartiennent à la même ligne de courant.

IX) Fusée (/6)

Dans le cas d'un système type fusée, démontrer que la force d'éjection des gaz peut s'écrire : $-D_m\vec{u}$ *où* $\vec{u}$ *est la vitesse des gaz par rapport à la fusée.*



On va effectuer un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé formé de la fusée (carénage) et de ses gaz. Cependant, ici le système est non stationnaire car il n'y a pas d'entrée de gaz. (Ici on simplifie le calcul en ne tenant pas compte dans le système des gaz échappés à t que l'on retrouvera à t+dt).

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_{\Sigma_f}}(t) = \left[m_f + m_g(t)\right]\vec{v}(t) \\ \overrightarrow{p_{\Sigma_f}}(t+dt) = \left[m_f + m_g(t+dt)\right]\vec{v}(t+dt) + dm\left(\vec{u} + \vec{v}(t+dt)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_{\Sigma_f}}(t+dt) - \overrightarrow{p_{\Sigma_f}}(t) = \left[m_f + m_g(t) - D_m dt\right](\vec{v} + d\vec{v}) + D_m dt(\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v}) - \left[m_f + m_g(t)\right]\vec{v}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_{\Sigma_f}}(t+dt) - \overrightarrow{p_{\Sigma_f}}(t) = \left(m_f + m_g(t)\right)d\vec{v} + D_m dt\,\vec{u}$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{p}}{Dt} = \left(m_f + m_g(t)\right)\frac{d\vec{v}}{dt} + D_m\,\vec{u} = \overrightarrow{F_{ext}} = \left[m_f + m_g(t)\right]\vec{g}$$

Que l'on réécrit sous la forme suivante :

$$\left(m_f + m_g(t)\right)\frac{d\vec{v}}{dt} = -D_m\,\vec{u} + \left[m_f + m_g(t)\right]\vec{g}$$

Ainsi on peut interpréter ce résultat au PFD appliqué au système fermé de masse $m_f + m_g(t)$ (ici variable) soumis aux forces de pesanteur et de poussée : $-D_m\,\vec{u}$