

# Physique : DS3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## À propos de l'environnement marin

Le problème comporte deux parties indépendantes. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

### Partie A – L'énergie thermique des mers

En 1869, dans son livre, *Vingt mille lieues sous les mers*, Jules Verne fait référence aux « eaux de surface et les eaux profondes des océans pour produire de l'électricité ». Cette idée d'utiliser la différence de température entre les eaux de surface et les eaux profondes afin de produire de l'électricité est appelée ETM (énergie thermique des mers) en français et OTEC (*Ocean Thermal Energy Conversion*) en anglais.

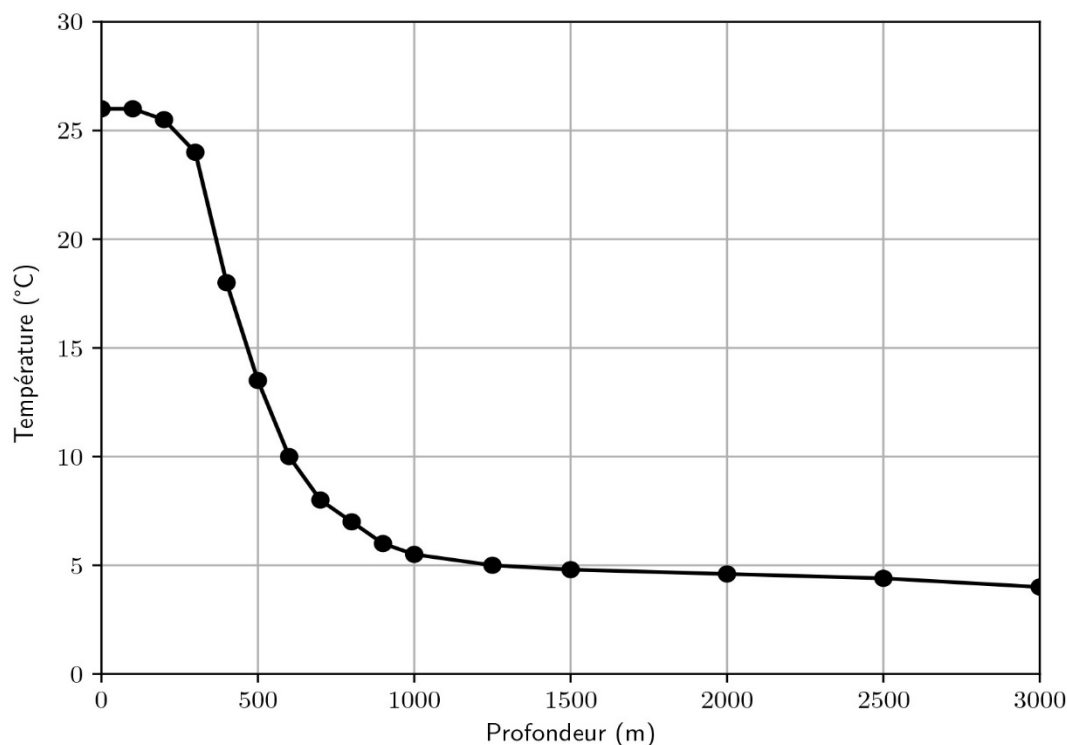
L'IFREMER considère que le coût du pompage des eaux profondes n'est rentable que pour une différence de température d'au moins  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  entre l'eau de mer chaude prélevée à la surface et l'eau de mer froide prélevée en profondeur.

#### I Généralités

**Q 1.** Représenter le diagramme synoptique d'une machine ditherme produisant du travail en précisant les signes des différents échanges énergétiques.

**Q 2.** Exprimer et calculer le rendement de Carnot de cette machine fonctionnant entre des sources de températures  $T_c = 26\text{ }^{\circ}\text{C}$  et  $T_f = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Commenter le résultat.

On envisage l'installation d'une centrale ETM à La Réunion. Le profil de température de l'eau de l'océan autour de cette île est donné sur la figure 1.



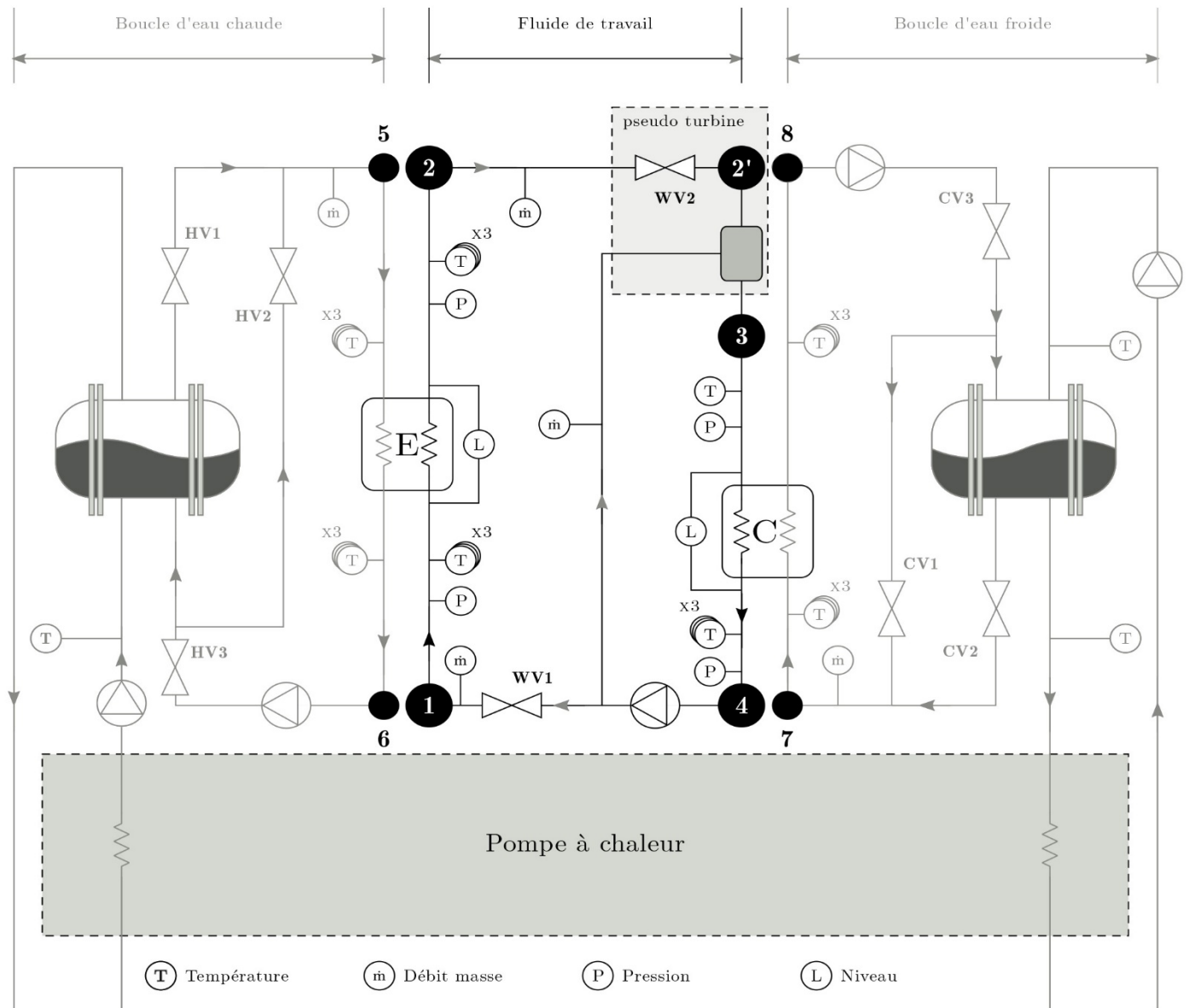
**Figure 1** Température de l'eau de l'océan en fonction de la profondeur à La Réunion.

**Q 3.** Déterminer la profondeur à laquelle on devra prélever l'eau profonde pour qu'une installation à La Réunion soit rentable.

- Q 4. Estimer la pression  $P$  à cette profondeur en explicitant la démarche suivie et toute hypothèse effectuée.
- Q 5. Indiquer quelques avantages et quelques inconvénients d'une installation ETM.

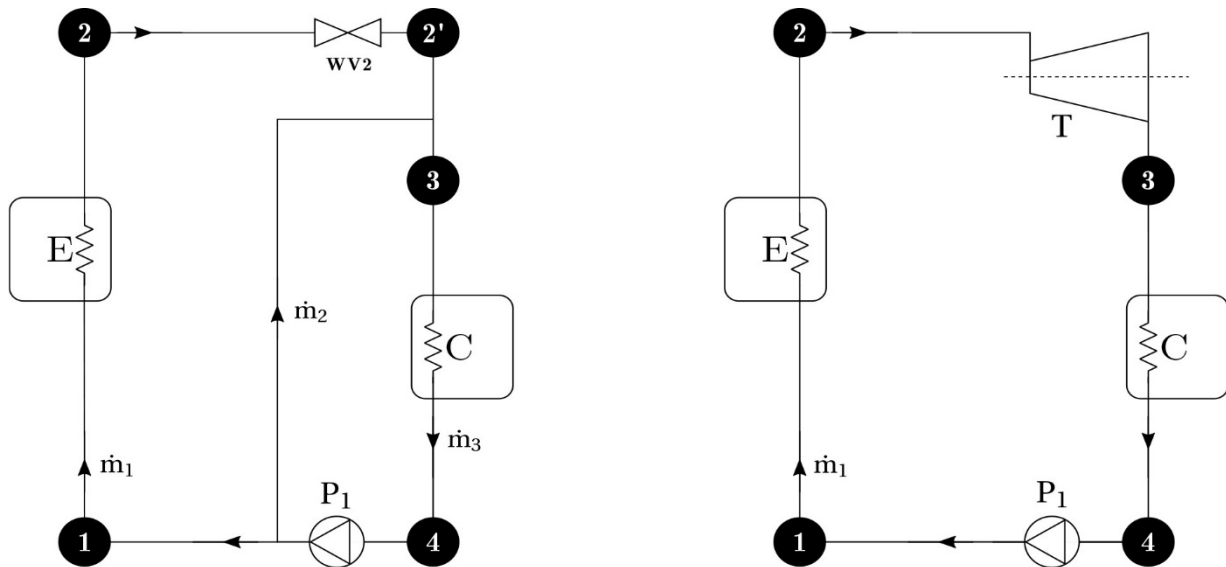
## II Centrale ETM en cycle fermé

Un prototype de centrale ETM est installé à La Réunion. Il n'est pas raccordé à l'océan et une pompe à chaleur simule les sources d'eau chaude et d'eau froide. L'ammoniac est le fluide de travail et son évolution est représentée sur la partie centrale de la figure 2. Le cycle réel de l'ammoniac est également représenté figure 3(a), ainsi qu'un cycle virtuel figure 3(b) expliqué ensuite.



**Figure 2** Schéma global du prototype ETM. Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

- L'ammoniac passe dans un évaporateur E adiabatique et isobare à double flux sous la pression de 9 bar où l'eau chaude le fait s'évaporer en vapeur juste saturante (point 1 à point 2).
- La vapeur produite est détendue de manière isenthalpique dans la vanne WV2 jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 à point 2'). Une petite quantité de liquide froid, prélevée avant la vanne WV1, est injectée dans la vapeur chaude de façon à diminuer sa température (désurchauffe isobare) (point 2' à point 3). Ces transformations (détente et désurchauffe) sont contrôlées de telle sorte qu'elles donnent les mêmes propriétés au fluide que s'il avait été soumis à une détente isentropique dans une turbine jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 au point 3 figure 3(b)).
- Le fluide de travail est ensuite condensé en liquide juste saturant par un condenseur C adiabatique et isobare à double flux grâce à l'eau froide (point 3 à point 4) puis ramené vers l'évaporateur avec une pompe à la pression de 9 bar (point 4 à point 1) en fonctionnement isentropique (la pompe est notée  $P_1$  sur la figure 3).



**Figure 3** Cycle réel (a) à gauche et cycle virtuel (b) à droite de l'ammoniac.  
Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

La centrale fonctionne en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique. Les liquides sont considérés comme incompressibles. Eau chaude et eau froide ont même débit massique. Les transformations isentropiques sont supposées adiabatiques et réversibles.

Données	Débit massique	Température d'entrée (en °C)	Température de sortie (en °C)
Eau chaude	$\dot{m}_e$	$T_5 = 26$	$T_6 = 24,5$
Eau froide	$\dot{m}_e$	$T_7 = 5$	$T_8$

**Tableau 1** Données et notations relatives aux circuits d'eau.

On note  $x$  la fraction massique en vapeur de l'ammoniac. On donne le tableau suivant :

Point $i$	$T_i$ (°C)	$P_i$ (bar)	$x_i$	$h_i$ (kJ·kg <sup>-1</sup> )	$s_i$ (kJ·K <sup>-1</sup> ·kg <sup>-1</sup> )
1	12	9		240	1,15
2'		6			

**Tableau 2** Quelques paramètres pour deux points du cycle.

Les diagrammes d'état de l'ammoniac, nommé R717 en tant que fluide frigorigène, sont fournis dans les documents réponses 1 et 2, respectivement dans les systèmes de coordonnées  $(P, h)$  et  $(T, s)$ .

**Q 6.** Sur les diagrammes  $(P, h)$  et  $(T, s)$  des documents réponses 1 et 2, mentionner les noms des courbes de saturation, puis indiquer la phase stable associée à chaque domaine. Faire apparaître le point critique que l'on définira et donner sa température et sa pression.

On utilise désormais les diagrammes des documents réponses 3 et 4 qui présentent des agrandissements de parties des diagrammes des documents réponses 1 et 2 sans les courbes isochores pour plus de lisibilité :

- le document réponse 3 contient le diagramme  $(P, h)$  sur lequel figurent en tirets et points alternés les isothermes graduées en degrés Celsius et en tirets les isentropes graduées en kJ·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup> ;
- le document réponse 4 contient le diagramme  $(T, s)$  sur lequel figurent en en tirets et points alternés les isobares graduées en bars et en tirets les isenthalpes graduées en kJ·kg<sup>-1</sup>.

**Q 7.** Déterminer  $T_{\text{vap,HP}}$  et  $T_{\text{vap,BP}}$ , les températures de vaporisation aux pressions respectives de 9 bar et 6 bar.

**Q 8.** Déterminer les valeurs numériques des enthalpies massiques de vaporisation  $\Delta h_{\text{vap,HP}} = \Delta h_{\text{vap}}(9 \text{ bar})$  et  $\Delta h_{\text{vap,BP}} = \Delta h_{\text{vap}}(6 \text{ bar})$ .

**Q 9.** La compression isentrope entre les points 4 et 1 est représentée sur le diagramme  $(P, h)$  du document réponse 3. Justifier sa forme.

**Q 10.** La détente isenthalpe entre les points 2 et 2' est représentée sur le diagramme  $(T, s)$  du document réponse 4. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température  $T_2$ , l'enthalpie massique  $h_2$  et l'entropie massique  $s_2$ . Préciser sous quelle(s) phase(s) se trouve l'ammoniac au point 2'.

- Q 11.** La détente isentrope entre les points 2 et 3 est représentée sur le diagramme  $(P, h)$  du document réponse 3. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température  $T_3$ , l'enthalpie massique  $h_3$  et l'entropie massique  $s_3$ .
- Q 12.** Représenter sur les diagrammes  $(P, h)$  et  $(T, s)$  des documents réponses 3 et 4 le cycle effectué par l'ammoniac dans le dispositif ETM. On fera apparaître en particulier les points 1, 2, 2', 3, 4 et 1' (liquide juste saturant à 9 bar).
- Q 13.** Compléter le tableau du document réponse 5.
- Q 14.** En déduire la valeur de  $c_a$ , capacité thermique massique de l'ammoniac liquide.
- Q 15.** Expliquer pourquoi on utilise l'ammoniac comme fluide de travail et non de l'eau. Donner néanmoins un inconvénient de l'utilisation de l'ammoniac.
- Q 16.** Établir l'expression suivante du premier principe industriel dans le cas d'un système ouvert à une entrée et une sortie, en écoulement permanent avec un débit massique  $D_m$ , en explicitant bien toutes les hypothèses :

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où  $h_s$  désigne l'enthalpie massique de sortie,  $h_e$  l'enthalpie massique d'entrée,  $\mathcal{P}_u$  la puissance utile reçue par le système due aux pièces mobiles et  $\mathcal{P}_{th}$  la puissance thermique reçue par le système.

En raison de la taille réduite du prototype, une véritable turbine capable de produire la puissance nécessaire n'était pas disponible. Néanmoins, en considérant le cycle virtuel représenté sur la figure 3(b), où la détente isentropique du point 2 au point 3 est attribuée à une turbine virtuelle, on peut calculer le rendement du cycle.

- Q 17.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{th,E,R}$  et  $\mathcal{P}_{th,E,V}$ , les puissances thermiques reçues par l'ammoniac au niveau de l'évaporateur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.
- Q 18.** Exprimer, en fonction des températures,  $\mathcal{P}_{th,ec}$ , la puissance reçue par l'eau chaude au niveau de l'évaporateur (cf. figure 2).
- Q 19.** En déduire l'expression et la valeur numérique de  $\dot{m}_e$ .
- Q 20.** Justifier que l'évolution de l'ammoniac traversant la vanne WV2 est isenthalpique.
- Q 21.** Au niveau du surchauffeur, situé entre les points 2' et 3, donner une relation entre  $\dot{m}_1$ ,  $\dot{m}_2$  et  $\dot{m}_3$ . Calculer  $\dot{m}_3$ .
- Q 22.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{C,R}$  et  $\mathcal{P}_{C,V}$ , puissances reçues par l'ammoniac au niveau du condenseur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.
- Q 23.** Exprimer dans le cas réel  $\mathcal{P}_{ef}$ , la puissance reçue par l'eau froide au niveau du condenseur, puis en déduire la valeur de  $T_g$ .
- Q 24.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{T,V}$ , puissance utile reçue par l'ammoniac dans la turbine T entre les points 2 et 3 du cycle virtuel. Commenter son signe.
- Q 25.** Exprimer et calculer  $\mathcal{P}_{P_1,R}$  et  $\mathcal{P}_{P_1,V}$ , puissances utiles reçues par l'ammoniac au niveau de la pompe P<sub>1</sub> lors des cycles respectivement réel et virtuel.
- Q 26.** Déduire de l'étude précédente le rendement  $\eta_V$  du cycle virtuel.
- Q 27.** Le rendement obtenu est surestimé. Proposer des justifications.

## Données et formulaire

### Données numériques partie A

Pression atmosphérique	$P^0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau de mer	$\rho_1 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_e = 4,0 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Débits massiques de l'ammoniac	$\dot{m}_1 = 4,0 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\dot{m}_2 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$

### Données numériques partie B

Masse volumique de l'air       $\rho_2 = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

### Formulaire

— Pour  $\varphi$  un champ scalaire,  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = \Delta\varphi$ .

— Pour  $\vec{v}$  un champ vectoriel,  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v}) \wedge \vec{v}$ .

— Dérivée particulaire d'une grandeur intensive scalaire  $f(x, y, z, t)$  :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

où  $(v_x, v_y, v_z)$  sont les coordonnées du champ des vitesses eulérien.

— Dérivée particulaire d'une grandeur intensive vectorielle  $\vec{f}(x, y, z, t)$  :

$$\frac{D\vec{f}}{Dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} \right),$$

où  $(v_x, v_y, v_z)$  sont les coordonnées du champ des vitesses eulérien.

---

• • • FIN • • •

---

## PARTIE B – Statique des fluides et diffusion de particules

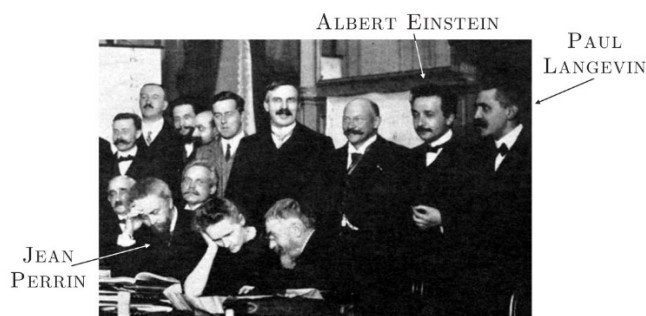
### JEAN PERRIN et l'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par ALBERT EINSTEIN en 1905 et complétées par celles de PAUL LANGEVIN en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par JEAN PERRIN dont nous fêtons le 150<sup>e</sup> anniversaire de naissance. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la « controverse atomiste » ouverte par les Grecs 6 siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de PERRIN, en 1908, l'un des derniers farouches anti-atomistes, WILHELM OSTWALD, déclare « *Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires* ».

Les expériences de PERRIN et le modèle de LANGEVIN reposent entièrement sur les modèles microscopiques de LUDWIG BOLTZMANN, fondateur dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle de la physique statistique. Les travaux expérimentaux de PERRIN lui permirent notamment de mesurer la constante de BOLTZMANN  $k_B$ . En 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, BOLTZMANN se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'OSTWALD...

En 1926, PERRIN obtint le prix NOBEL pour ses expériences !



Dans ce sujet, nous proposons de revenir sur quelques points de ce moment fameux de l'histoire de la physique en étudiant quelques aspects de la théorie de LANGEVIN et de certaines des expériences réalisées par PERRIN. Sur la photo ci-contre, prise lors du Congrès SOLVAY de 1911, on retrouve les trois acteurs de cette histoire, entourés de prestigieux collègues. Pour réaliser ses expériences, JEAN PERRIN utilise des grains de gomme-gutte. Écoutez

le décrire son procédé d'obtention de ses grains : « *La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergique.* »

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon  $R_b = 0,2 \mu\text{m}$ , de volume  $V_b = 3,4 \times 10^{-20} \text{ m}^3$  et de masse volumique  $\mu_b = 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On note  $m_b = 4,1 \times 10^{-17} \text{ kg}$  la masse d'un grain. Dans ses expériences, JEAN PERRIN fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure  $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement lent deux forces :

- la résultante des forces de pression, peu modifiée par rapport à une situation d'équilibre, est donnée par la loi d'ARCHIMÈDE : cette force  $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$  est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
- la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\alpha > 0$  et  $\vec{v}$  désigne la vitesse des grains. La formule de STOKES précise que, pour un grain sphérique,  $\alpha = 6\pi\eta R_b$  dans laquelle  $\eta = 1,2 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici  $\alpha = 4,5 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

En dehors de ces données, aucune connaissance relative à la viscosité n'est nécessaire à cette étude. Ce problème est décomposé en 4 parties relativement indépendantes : la partie **I** est consacrée au modèle du gaz parfait ; la partie **II** est dédiée aux expériences de sédimentation pratiquées sur les émulsions ; la partie **III** présente le modèle théorique du mouvement brownien de LANGEVIN complété par les expériences de diffusion de PERRIN ; la partie **IV** étudie les moyens optiques mis en œuvre par JEAN PERRIN pour réaliser ses mesures.

Dans ce qui suit on utilisera la fonction  $A(z) = \exp(-z/H)$ . Les vecteurs sont surmontés d'une flèche  $\vec{f}$ , sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ( $\|\hat{e}_x\| = 1$ ). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction  $\varphi(t)$  sera notée  $\langle \varphi \rangle$ . Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. **Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte.**

## I Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire  $M = 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , en équilibre thermique à la température ambiante  $T_0$ . Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans un récipient de volume  $V$ , de hauteur  $h$  de l'ordre de quelques mètres, et de section  $S = 1 \text{ m}^2$ . L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon  $R_m$  de l'ordre de la centaine de picomètres.

On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , de la constante de BOLTZMANN,  $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , de la constante d'AVOGADRO,  $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et éventuellement de leur produit  $R = k_B N_A = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- – 1. En précisant les valeurs choisies de température  $T_0$  et de pression (supposée provisoirement uniforme)  $P_0$ , estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.
- – 2. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
- – 3. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_{cm}$  et de l'énergie potentielle  $E_{pm}$  d'une particule de masse  $m_m$  de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

La loi de la statique des fluides montre que, sous l'action de la pesanteur, la pression  $P(z)$  n'est pas uniforme verticalement et dépend de l'altitude  $z$ .

- – 4. En déduire que la masse volumique  $\rho$  du gaz dépend aussi de  $z$  et l'exprimer en fonction de  $P(z)$ . Ecrire la condition d'équilibre mécanique pour une tranche de gaz comprise entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$  pour laquelle on supposera l'équilibre thermodynamique local réalisé. En déduire une équation différentielle vérifiée par  $P(z)$ .
- – 5. En notant  $P_0 = P(z = 0)$ , montrer que  $\frac{P(z)}{P_0}$  s'exprime simplement grâce à la fonction  $A(z)$ . Exprimer la distance caractéristique  $H$  en fonction de  $k_B$ ,  $g$ ,  $T_0$  et  $m_m$ . Calculer la valeur numérique de  $H$ . La variation de pression est-elle détectable, avec un manomètre usuel, dans le récipient considéré ? En serait-il de même si le récipient était rempli d'eau liquide ?
- – 6. Préciser la fonction  $E(z)$  telle que  $A(z) = \exp\left[-\frac{E(z)}{k_B T_0}\right]$ . Que représente la fonction  $E(z)$  ? Interpréter physiquement cette expression dont la généralisation est due à BOLTZMANN.
- – 7. Montrer que la concentration  $c_g(z)$  du gaz, rapport du nombre de moles sur le volume, suit une loi du même type, et qu'on peut écrire  $c_g(z) = c_{g0} A(z)$ , où  $c_{g0}$  représente la concentration au niveau du sol ( $z = 0$ ) dont on précisera l'expression.

## II Étude d'un équilibre de sédimentation

Dans une première expérience, JEAN PERRIN lâche, sans vitesse initiale, à la surface d'un récipient, un grand nombre ( $N = 13000$ ) de grains dans de l'eau légèrement sucrée. Le récipient a une section  $S$  et une hauteur  $h_1$  suffisante pour être considérée comme infinie.

- – 8. Faire le bilan des forces exercées sur un des grains lors de sa chute dans l'eau sucrée.

- – 9. On note  $\vec{v}(t) = -v(t)\hat{e}_z$  la vitesse de chute du grain,  $\hat{e}_z$  étant l'axe vertical ascendant, et  $v(t) > 0$ . Établir l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$  puis donner sa solution.

Montrer qu'une fois le régime permanent établi, les grains possèdent une vitesse limite  $v_\ell = m^*g/\alpha$ .

Exprimer le paramètre  $m^*$  en fonction de  $V_b$  et des masses volumiques  $\mu_b$  et  $\mu_e$ . Justifier qu'on nomme cette quantité « masse apparente ».

Exprimer la durée caractéristique  $\tau$  du régime transitoire en fonction de  $m_b$  et  $\alpha$ . Evaluer un ordre de grandeur de  $v_\ell$  et de  $\tau$ .

Même au bout d'une longue durée, les grains ne se tassent pas au fond du récipient. On observe un phénomène de sédimentation : les grains se répartissent sur l'ensemble de la hauteur et la densité de grains, notée  $c(z)$  et exprimée en  $m^{-3}$ , n'est pas uniforme.

Afin d'interpréter ce phénomène, on introduit deux vecteurs, appelés « densité de flux de particules » et qui s'expriment dans les mêmes unités mais par des lois distinctes :

- Un premier vecteur densité de flux,  $\vec{j}_c$ , est associé au mouvement de chute des grains. Il est à l'origine d'un phénomène de convection et défini par la relation  $\vec{j}_c(z) = -c(z)v_\ell\hat{e}_z$  ;
- Un deuxième vecteur densité de flux est associé au gradient de densité, ici sur l'axe  $z$ . L'inhomogénéité crée un courant de particules dont l'expression est donnée par la loi de FICK qui s'écrit ici  $\vec{j}_n(z) = -\frac{dc}{dz}D\hat{e}_z$ . Le coefficient  $D$  se nomme coefficient de diffusion. Il dépend de la nature du milieu et des particules étudiées. Aucune connaissance relative à la loi de FICK n'est nécessaire à l'étude du problème.

- – 10. Donner les unités (ou dimensions) communes aux vecteurs  $\vec{j}_c$  et  $\vec{j}_n$ , ainsi que l'unité de  $D$ . À l'état d'équilibre macroscopique, caractérisé par une température uniforme  $T_0$  et une répartition de concentration  $c(z)$  indépendante du temps, quelle est la relation entre  $\vec{j}_c$  et  $\vec{j}_n$  ? En déduire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $c(z)$ .

En posant  $c(z=0) = c_0$ , exprimer  $c(z)$  en fonction de  $A(z)$ , on déterminera la distance caractéristique  $H_b$  apparaissant dans  $A(z)$  en fonction de  $R_b$ ,  $D$ ,  $\eta$ ,  $m^*$ , et  $g$ .

- – 11. Compte tenu des forces conservatives s'exerçant sur un grain, quelle est l'expression de l'énergie potentielle  $E_p^*(z)$  correspondant au poids de la masse apparente  $m^*$  du grain à l'altitude  $z$  ? En déduire l'expression de  $D$  en fonction de  $k_B$ ,  $T_0$ ,  $\eta$  et  $R_b$  permettant d'écrire  $A(z) = \exp\left[-\frac{E_p^*(z)}{k_B T_0}\right]$ .

- – 12. Sachant que le nombre  $N$  de grains est conservé sur la hauteur  $h_1$  du récipient, suffisamment grande pour être supposée infinie, exprimer la concentration  $c_0$  en fonction de  $N$ , de la section  $S$ , et de la distance caractéristique  $H_b$ .

Une fois la température de l'émulsion stabilisée à une valeur uniforme  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , JEAN PERRIN a compté le nombre moyen  $n(z)$  de grains dans des petites tranches régulièrement réparties en hauteur et d'épaisseur  $e$  constante. Il publie les résultats que nous avons synthétisés sur la figure 1 (Annales de Chimie et de Physique, Mouvement brownien et réalité moléculaire, 8<sup>e</sup> série, sept. 1909).

- – 13. En exprimant  $c(z)$  en fonction de  $n(z)$ , déduire de ces données une estimation de la hauteur caractéristique  $H_b$  associée ici au phénomène. La hauteur du récipient utilisé par JEAN PERRIN,  $h_1 = 100\ \mu\text{m}$ , était-elle suffisante au regard des hypothèses faites ici ?

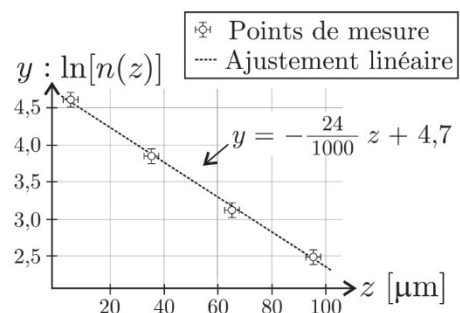


FIGURE 1 – Sédimentation de grains

- – 14. Estimer la valeur de  $k_B$  qu'a pu déduire JEAN PERRIN de cette expérience. Identifier des causes d'erreurs expérimentales.



# Partie C : Les marées

## Données :

- distance Terre Lune :  $d_L = 3,8.10^8 \text{ m}$
- distance Terre Soleil :  $d_S = 1.5.10^{11} \text{ m}$
- rayon de la Terre :  $R_T = 6,4.10^6 \text{ m}$
- masse du Soleil :  $m_S = 2.10^{30} \text{ kg}$
- masse de la Terre :  $m_T = 6.10^{24} \text{ kg}$
- masse de la Lune :  $m_L = 7,3.10^{22} \text{ kg}$
- constante de gravitation universelle :  $G = 6,7.10^{-11} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$

## Lexique :

- pleine mer : hauteur maximale de la marée
- basse mer : hauteur minimale de la marée
- marnage : différence de hauteurs entre une pleine mer et une basse mer consécutives
- vive-eau : marée pendant laquelle le marnage est maximal
- phase de la pleine mer : heure à laquelle la pleine mer est atteinte

## PREMIERE PARTIE LE PHENOMENE DE MAREES

### A / NOTIONS QUALITATIVES SUR LES MAREES

*La carte reproduite dans la figure 1 représente l'évolution de la marée réelle dans la Manche. Les nombres indiqués sous certains ports sont la phase de la pleine mer et le marnage par vive-eau. On trouve deux types de courbes :*

- *Les lignes cotidiales (avec une indication en heures) représentent les points dans le même «état de marée» (pleine mer) à un instant donné (les valeurs données correspondent à la date de la pleine mer par rapport à une référence arbitraire).*
- *Les lignes iso-marnage (avec une indication en mètres) représentent les points avec un même marnage (le marnage est la différence de hauteur entre la pleine mer et la basse mer).*

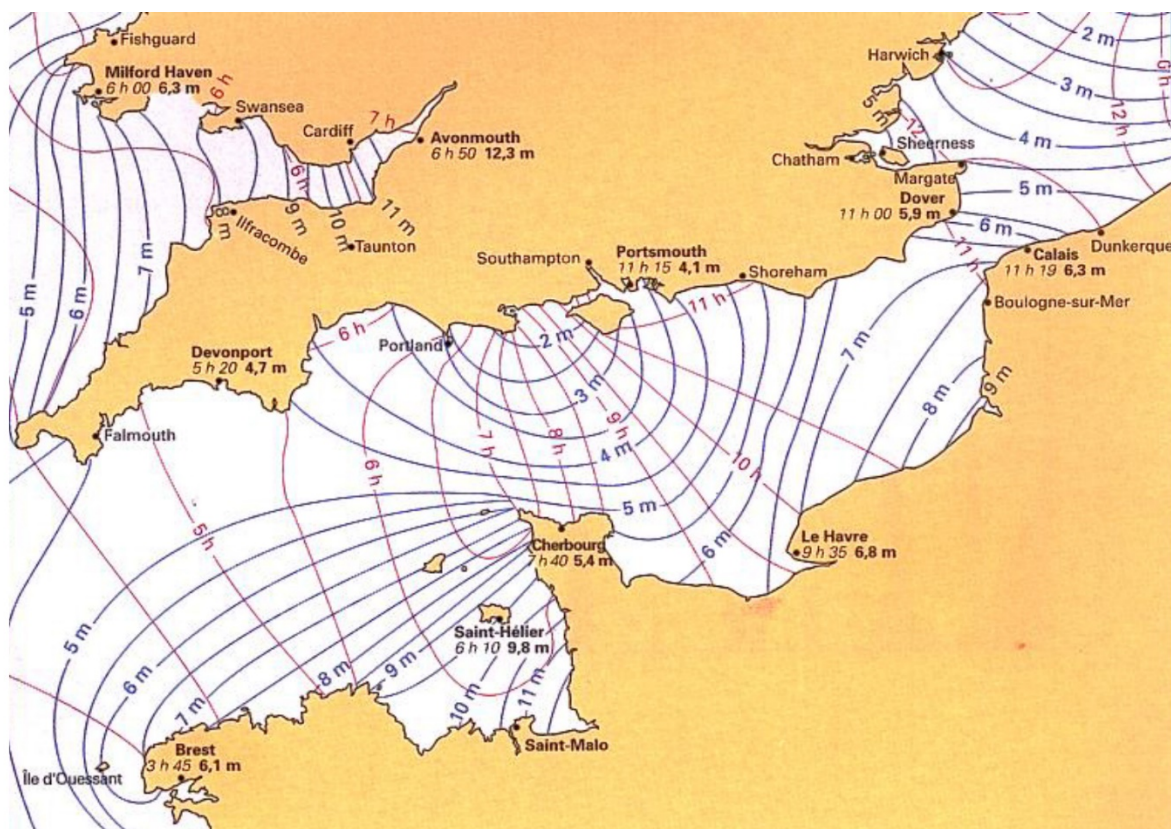


FIGURE 1

- A1.** A quels endroits de la carte les marées sont-elles les plus importantes ? Est-ce dû à une particularité géographique ? On attend une réponse brève.
- A2.** On peut envisager l'évolution spatiale et temporelle de la hauteur d'eau due aux marées comme résultant de la propagation d'une *onde de marée*. Dans quel sens se déplace cette onde de marée dans la Manche ? Une explication basée sur la rotation propre de la Terre est-elle satisfaisante ? Justifier.
- A3.** Donner (sans explication) un ordre de grandeur de la périodicité des marées océaniques. Donner un ordre de grandeur de la vitesse de déplacement de l'onde de marée dans la Manche (à titre de point de repère, la distance entre Saint-Malo et Brest est de l'ordre de 200km). En déduire un ordre de grandeur de la longueur d'onde associée.
- A4.** Dans la Manche la marée est déviée vers les côtes françaises, ce qui a pour conséquence des marnages plus importants que sur les côtes anglaises. Interpréter cette déviation (un schéma clair est attendu).
- A5.** A l'ouest de la ville de Saint-Malo, on distingue sur la carte l'estuaire de la Rance où est implantée une usine marémotrice. Justifier ce choix d'implantation ; pourquoi ne pas avoir fait de même sur l'estuaire de la Seine, au niveau du Havre (Normandie, Seine-Maritime) ?

- Les 3/2 ne feront pas les questions B2 et B3 qui portent sur une partie du programme qu'on n'a pas encore fait.
- Les schémas demandés sont à reporter sur sa copie.

## B / CHAMP DE MAREE

Les marées sont dues aux champs de gravitation au niveau de la Terre des différents astres du système solaire, principalement la Lune et le Soleil. On considérera que les astres ont une distribution de masse à symétrie sphérique.

**B1.** Donner sans justification l'expression du champ de gravitation  $\vec{g}_A(M)$  créé par l'astre A, de masse  $m_A$  et de centre  $O$ , en un point  $M$  en dehors de l'astre. On pourra noter  $r = OM$  la distance entre  $O$  et  $M$  et  $\vec{e}_r$  un vecteur unitaire dirigé de  $O$  vers  $M$ .

On cherche maintenant à établir cette expression.

**B2.** Montrer par des considérations de symétrie que  $\vec{g}_A(M) = g_A(r)\vec{e}_r$ .

**B3.** Énoncer le théorème de Gauss dans le cadre de l'électromagnétisme, puis le transposer au cas de la gravitation. Utiliser ce résultat pour retrouver l'expression donnée au B1. Préciser quelle est la simplification dans l'expression du champ de gravitation en dehors de l'astre apportée par la symétrie sphérique de la distribution de masses.

L'influence d'un astre sur les marées découle d'une petite différence entre la force de gravitation qu'il exerce et la force d'inertie dont il est responsable dans le référentiel géocentrique. On établit ici l'expression du champ de marée en prenant le Soleil comme exemple (dans les trois questions qui suivent, on ne considère que les forces de gravitation dues au soleil), mais le résultat est valable pour n'importe quel astre. Dans toute la suite, on considérera le référentiel héliocentrique ( $R_h$ ) comme galiléen.

**B4.** Décrire le mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique et en déduire l'expression de la force d'inertie d'entraînement sur un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans le référentiel géocentrique. On notera  $\vec{a}_{T/R_h}$  l'accélération de  $T$  (centre de la Terre) dans le référentiel héliocentrique.

**B5.** Établir que  $\vec{a}_{T/R_h} = \vec{g}_S(T)$ , où  $\vec{g}_S(T)$  est le champ de gravitation créé par le Soleil au centre de la terre  $T$ . La Terre sera supposée avoir une distribution de masse à symétrie sphérique, ce qui fait que la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre est assimilable au produit de la masse de la terre par le champ de gravitation du Soleil en son centre.

**B6.** En déduire que la résultante de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel géocentrique dues au Soleil sur un point matériel  $M$  de masse  $m$  s'écrit :

$$m\vec{C}_S(M) \quad \text{avec} \quad \vec{C}_S(M) = -Gm_S \left( \frac{\vec{SM}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3} \right)$$

où  $S$  désigne le centre du Soleil,  $m_S$  sa masse, et  $G$  la constante de gravitation universelle.  $\vec{C}_S(M)$  est appelé *champ de marée* du Soleil au point  $M$ .

Les marées sont essentiellement dues à l'influence de la Lune, celle du Soleil se traduisant par une plus ou moins grande amplitude (marées de vives eaux et de mortes eaux). Dans la suite on ne considère que l'influence de la Lune. Le résultat de la question B6 est transposable à n'importe quel astre, l'expression du champ de marée dû à la Lune est donc ( $L$  désignant le centre de la Lune) :

$$\vec{C}_L(M) = -Gm_L \left( \frac{\vec{LM}}{LM^3} - \frac{\vec{LT}}{LT^3} \right)$$

Sur le schéma de la figure 2 on indique quelques points particuliers à la surface de la Terre, relativement à la position de la Lune.

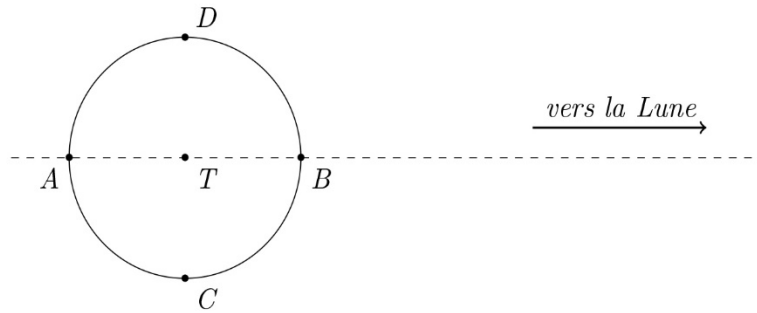


FIGURE 2

- B7.** Reprendre le dessin précédent et représenter en A, B, C et D la force gravitationnelle et la force d'inertie dues à la lune, ainsi que leur résultante (proportionnelle au champ de marée).
- B8.** Indiquer les points (parmi A, B, C et D) de marée haute et de marée basse. Dans quel plan sont situés tous les points de marée basse ?
- B9.** En utilisant la troisième loi de Kepler, donner un ordre de grandeur de la période de révolution de la Lune dans le référentiel géocentrique.
- B10.** Donner un ordre de grandeur de la période de rotation propre de la Terre. Conclure sur la périodicité (approximative) des marées.

On cherche à simplifier l'expression du champ de marée, en tenant compte du fait que, pour un point  $M$  à la surface de la terre,  $TM \ll TL$  et en effectuant un développement limité au premier ordre en  $\frac{TM}{TL}$ . On posera  $TM = r$  et  $TL = d_L$ , et on repérera la position de  $M$ , dans le plan contenant  $L$ ,  $T$  et  $M$ , en coordonnées polaires (voir la figure 3).

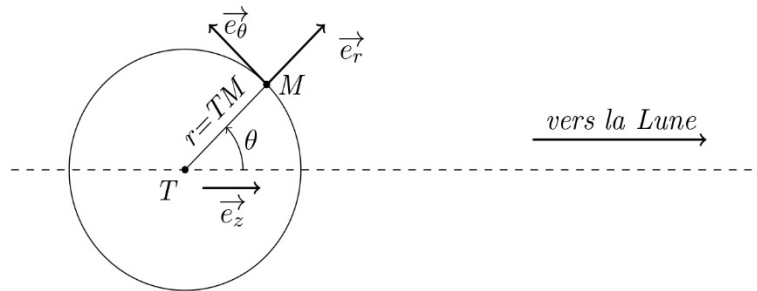


FIGURE 3

- B11.** Montrer que  $\overrightarrow{LM} = -d_L \vec{e}_z + r \vec{e}_r$ . En déduire que, au premier ordre en  $\frac{r}{d_L}$ , on a  $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{d_L^3} \left(1 + \frac{3r \cos(\theta)}{d_L}\right)$ .
- B12.** En déduire que, toujours au premier ordre en  $\frac{r}{d_L}$  :

$$\vec{C}_L(M) = \frac{G m_L r}{d_L^3} (3 \cos(\theta) \vec{e}_z - \vec{e}_r)$$

En projetant  $\vec{e}_z$  sur la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , on obtient finalement :

$$\vec{C}_L(M) = \frac{Gm_L r}{d_L^3} \left( (3\cos^2(\theta) - 1) \vec{e}_r - 3\sin(\theta)\cos(\theta)\vec{e}_\theta \right)$$

**B13.** Montrer que l'influence de la Lune sur les marées est de l'ordre de 2 fois plus importante que celle du soleil.

**B14.** Préciser les positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil pour les marées de vives eaux (amplitude maximale, les effets de la Lune et du Soleil s'ajoutent) et pour les marées de mortes eaux (amplitude minimale, les effets de la Lune et du Soleil se compensent partiellement). Attention à bien indiquer deux configurations distinctes pour chaque cas. Indiquer le lien avec les phases de la Lune et donner un ordre de grandeur de la périodicité de l'alternance vives-eaux / mortes-eaux.

## C / AMPLITUDE DES MAREES OCEANIQUES

On considère dans cette partie un modèle simple : la Terre est entièrement recouverte d'eau. On obtient ainsi des résultats pertinents pour l'amplitude des marées en haute mer, mais qui n'expliquent pas les phénomènes observés près des côtes. On se place dans le cadre d'un modèle quasi-statique où la forme des océans à un instant donné obéit à la loi de l'hydrostatique ( $p$  désigne la pression et  $\vec{f}_v$  la résultante des forces volumiques) :

$$\vec{\text{grad}}(p) = \vec{f}_v$$

Dans toute cette partie on ne considère que l'influence de la Lune (et pas celle du Soleil). Le marnage, que l'on notera  $\Delta h$ , est la différence de hauteur d'eau entre la marée haute et la marée basse en un endroit donné.

**C1.** On commence par une approche dimensionnelle : on considère que, outre le facteur  $\frac{m_L}{d_L^3}$  mis en évidence précédemment, la masse de la Terre  $m_T$  et son rayon  $R_T$  interviennent sur le marnage et on pose :

$$\Delta h = \frac{m_L}{d_L^3} m_T^\alpha R_T^\beta$$

Déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $\Delta h$  ait bien les dimensions d'une longueur et calculer numériquement la valeur de  $\Delta h$  qui en résulte.

**C2.** Que traduit la loi de l'hydrostatique ? Quelle est la dimension de ses termes ? Le terme  $\vec{f}_v$  traduit ici l'attraction gravitationnelle due à la Terre, celle due à la Lune ainsi que la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel géocentrique due à la Lune. Donner l'expression de  $\vec{f}_v$  en utilisant, pour ce qui est des effets dus à la Lune, le résultat donné dans la partie B. On notera  $\mu$  la masse volumique de l'eau.

On pose  $\vec{f}_v = -\vec{\text{grad}}(V_T + V_L)$ , où  $V_T$  est l'énergie potentielle volumique associée à l'attraction gravitationnelle de la Terre et  $V_L$  l'énergie potentielle volumique associée aux effets dus à la Lune. On donne l'expression du gradient d'une fonction scalaire  $f$  en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

**C3.** Etablir l'expression de  $V_T$ , en expliquant bien le choix de la constante.

On donne  $V_L = -\mu G \frac{m_L}{d_L^3} \frac{r^2}{2} (3\cos^2(\theta) - 1)$ . La pression atmosphérique est considérée uniforme à la surface de l'eau, et on néglige les phénomènes de tension superficielle.

**C4.** Montrer que dans ces conditions la surface de l'eau vérifie  $V_T + V_L = cste_1$ , et en déduire que, toujours à la surface de l'eau,  $\frac{m_T}{r} + \frac{m_L}{d_L^3} \frac{r^2}{2} (3\cos^2(\theta) - 1) = cste_2$

On détermine (en écrivant que, l'eau étant considérée comme incompressible, le volume des océans est le même avec et sans déformation) que la constante introduite précédemment vaut  $\frac{m_T}{R_T}$ .

**C5.** La déformation  $h$  étant petite par rapport à  $R_T$ , on pose  $r = R_T + h$  avec  $\frac{h}{R_T} \ll 1$ . En effectuant les développements limités au premier ordre en  $\frac{h}{R_T}$  adéquats, montrer que :

$$h \left( \frac{m_T}{R_T^2} - \frac{m_L R_T}{d_L^3} (3\cos^2(\theta) - 1) \right) \simeq \frac{m_L R_T^2}{2d_L^3} (3\cos^2(\theta) - 1)$$

Vérifier numériquement que  $\frac{m_L R_T}{d_L^3} \ll \frac{m_T}{R_T^2}$  et simplifier l'expression en conséquence. On utilisera cette expression dans les deux questions suivantes.

*Pour simplifier, on considère que la Lune reste dans le plan équatorial.*

**C6.** Où le marnage  $\Delta h$  est-il le plus important ? Que peut-on dire du marnage aux pôles ?

**C7.** Etablir l'expression du marnage à l'Equateur et faire l'application numérique.

# ANNEXE À RENDRE DANS LA COPIE (Mettre juste le nom)



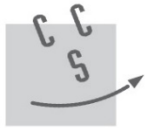
Numéro de place

Numéro d'inscription

Signature

Nom

Prénom



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve : Physique 1 PC

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Document réponse

## DOCUMENT RÉPONSE 1

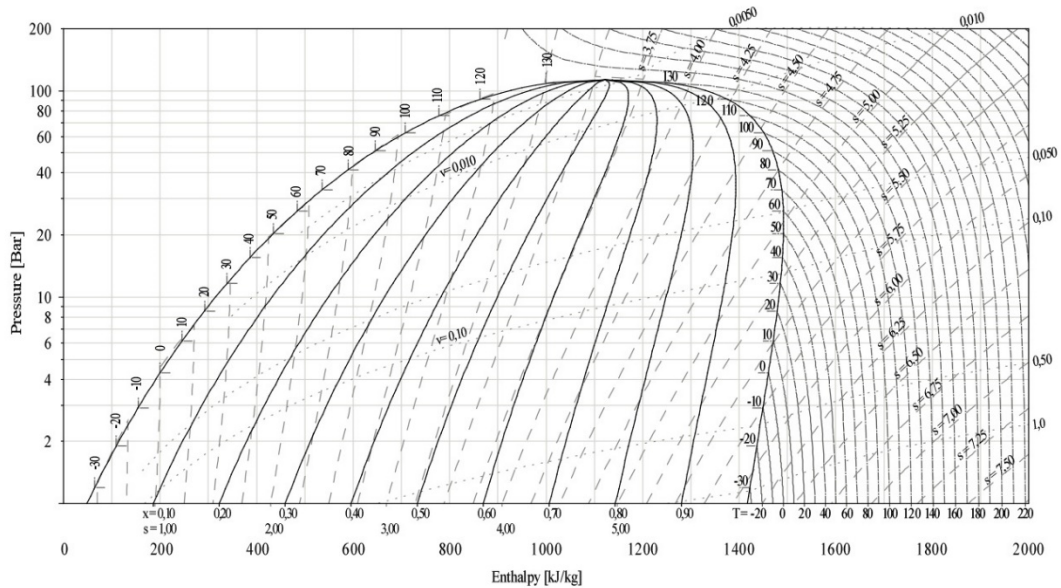


Diagramme de l'ammoniac ( $P, h$ ). DTU, Department of Energy Engineering,  $s$  en  $(\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1})$ ,  $v$  en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $T$  en  $^{\circ}\text{C}$ , M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen (23-10-03).

## DOCUMENT RÉPONSE 2

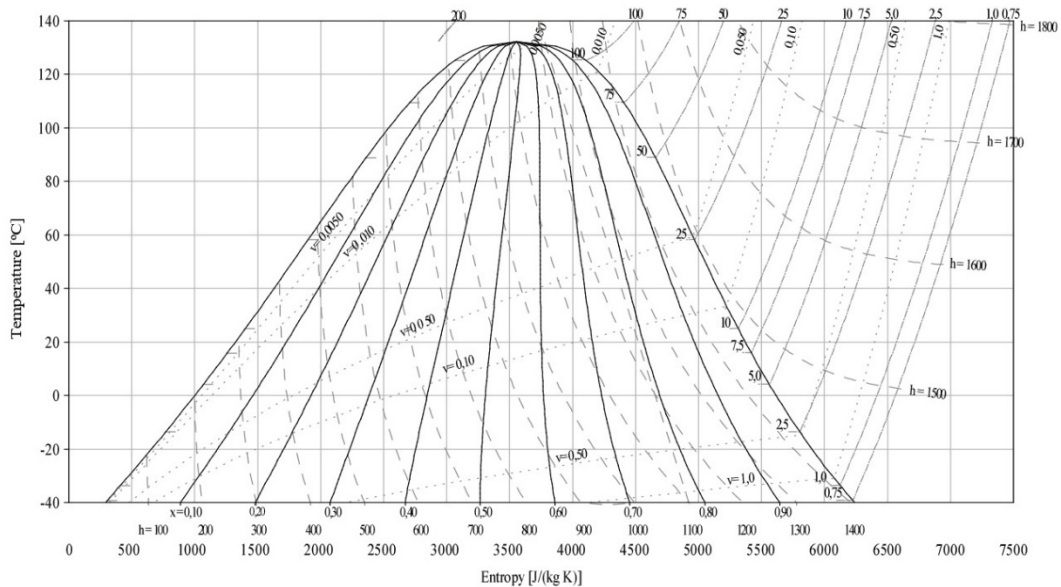
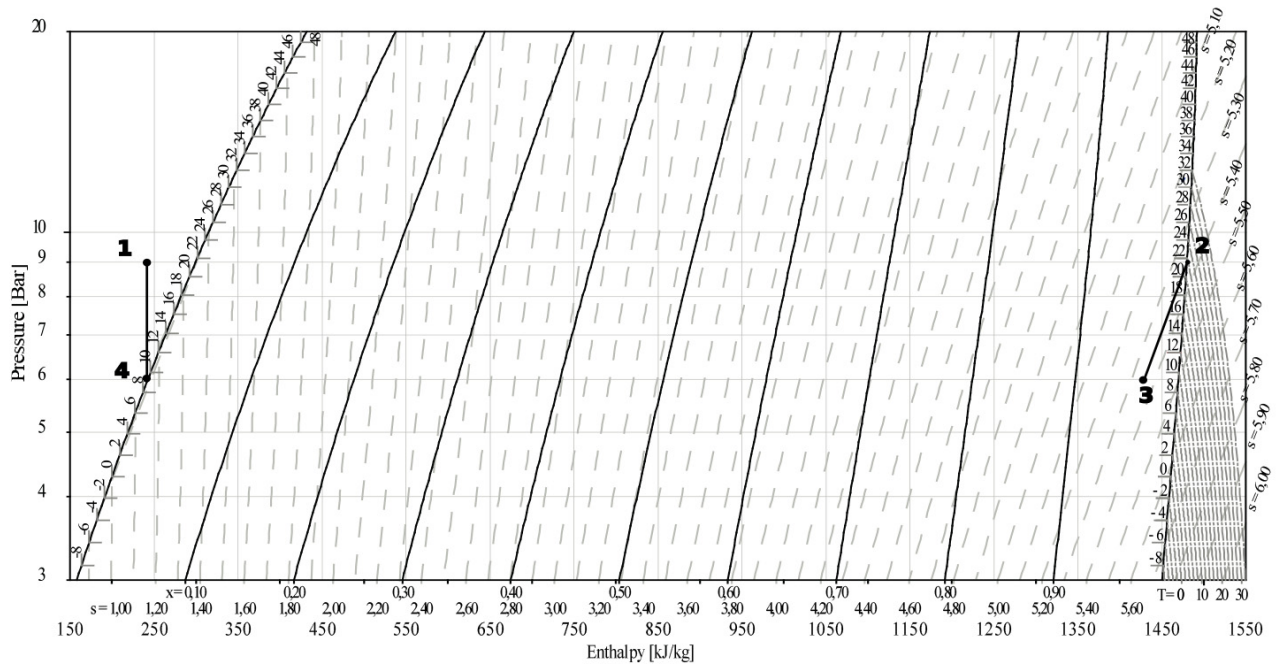


Diagramme de l'ammoniac ( $T, s$ ). DTU, Department of Energy Engineering,  $h$  en  $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $v$  en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $p$  en bar, M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen (23-10-03).

DOCUMENT RÉPONSE 5

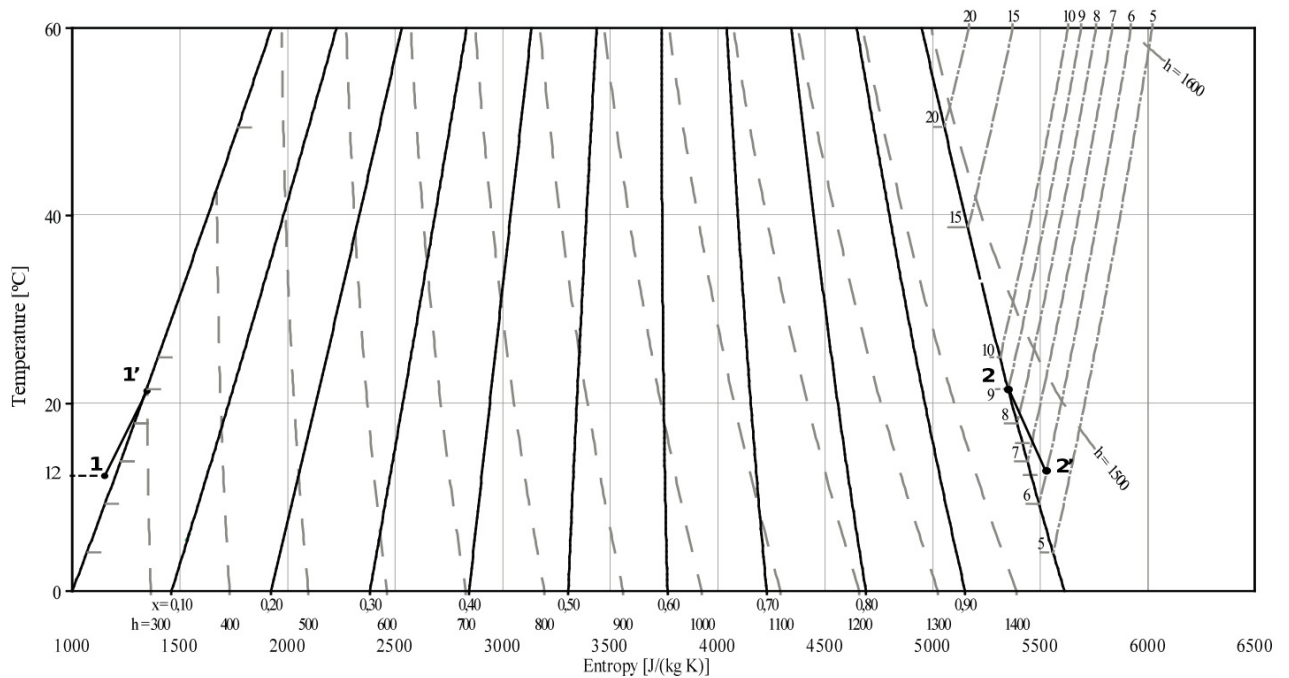
Point $i$	$T_i$ (°C)	$P_i$ (bar)	$x_i$	$h_i$ (kJ·kg <sup>-1</sup> )	$s_i$ (kJ·K <sup>-1</sup> ·kg <sup>-1</sup> )
1	12	9		240	1,15
1'					
2					
2'		6			
3					
4					

DOCUMENT RÉPONSE 3



Agrandissement d'une partie du diagramme de l'ammoniac ( $P, h$ ). DTU, Department of Energy Engineering,  $s$  en (kJ·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup>),  $v$  en m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>,  $T$  en °C, M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen (23-10-03).

DOCUMENT RÉPONSE 4



Agrandissement d'une partie du diagramme de l'ammoniac ( $T, s$ ). DTU, Department of Energy Engineering,  $h$  en kJ·kg<sup>-1</sup>,  $v$  en m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>,  $p$  en bar, M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen (23-10-03).