

Physique : DS1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I – Le millénium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} .

À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $z \in \mathbb{C}$. Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.



I. — Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen (O, \hat{u}_x) – voir figure 1. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α , exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t , on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \hat{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

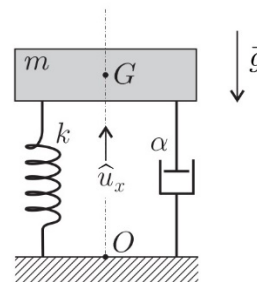


FIG. 1 – Oscillateur

□ 1 — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où \tilde{x} est une constante que l'on déterminera en fonction de g , ω_0 et ℓ_0 . On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ .

□ 2 — Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0 , ξ , X_0 , V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

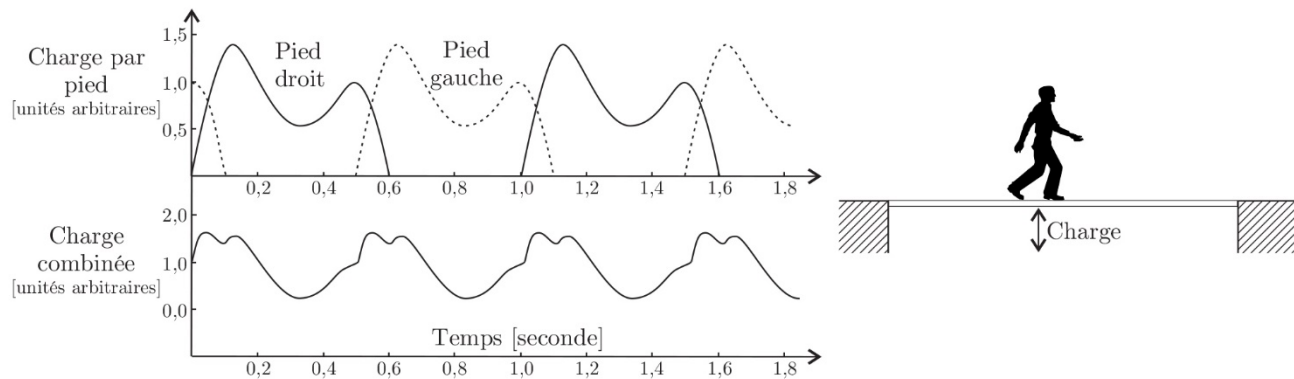


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$.

Le vecteur \vec{F}_0 correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0,4 \vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\hat{u}_x$.

On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

□ 3 — Que devient l'équation de l'oscillateur en Y sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement \underline{Y} sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m} \vec{F}_1$. On exprimera $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$ en fonction de ξ , ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

□ 4 — Sous quelle condition portant sur ξ , un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $|\underline{H}|(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.

□ 5 — En se plaçant dans l'hypothèse $\xi^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

□ 6 — Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

□ 7 — Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

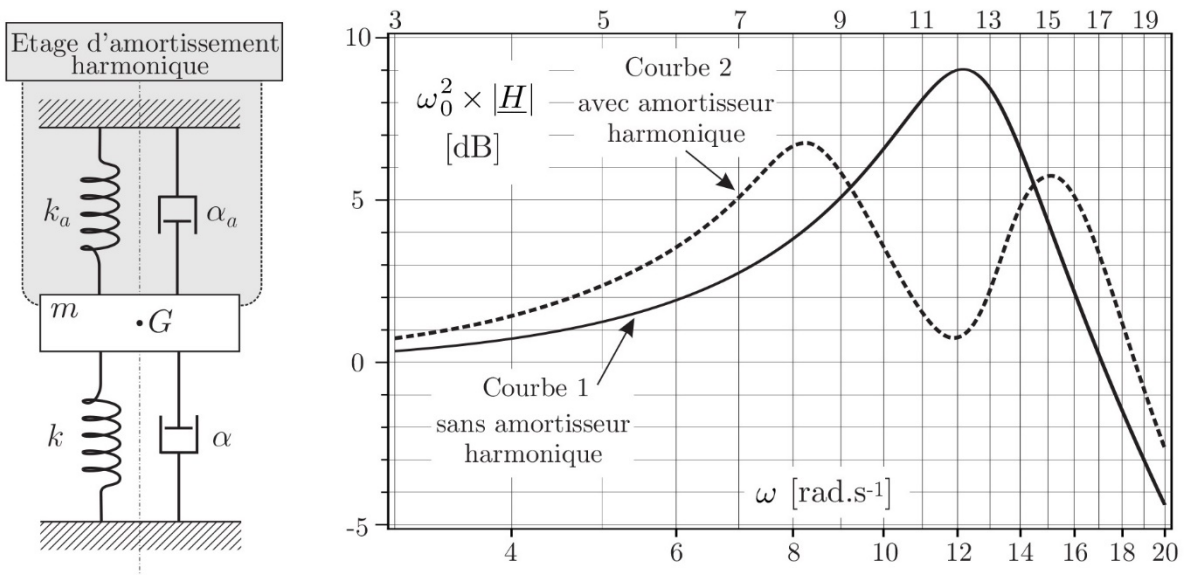


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

□ 8 — Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables ? Lequel vous paraît le plus pertinent ? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible ?

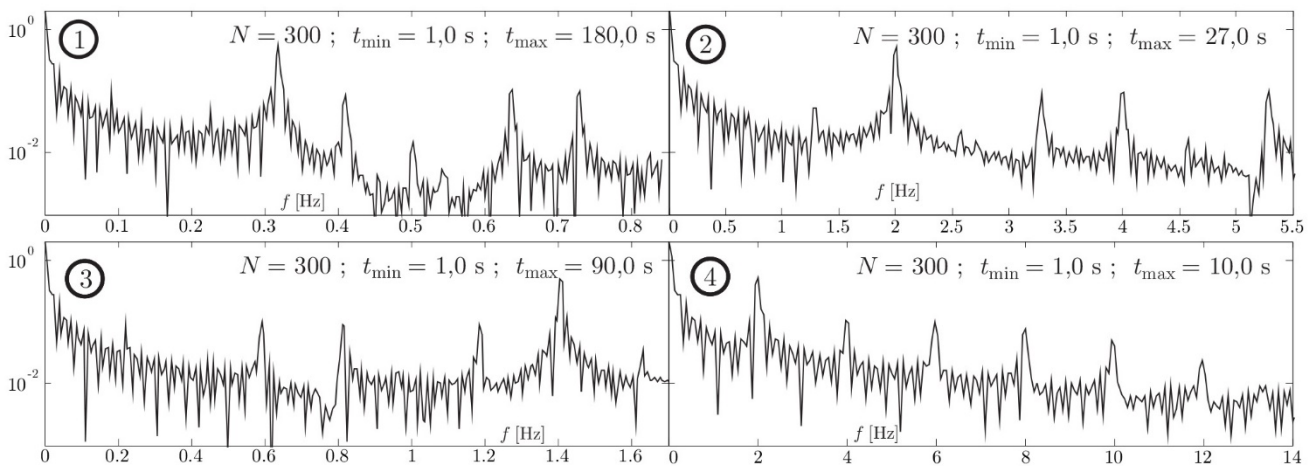


FIGURE 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

□ 9 — À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

FIN DE LA PARTIE I

Partie II – De Mars à Sirius

Des objets astronomiques, de Mars à Sirius

Ce sujet comporte deux problèmes totalement indépendants étudiant différents aspects de l'astronomie (la science des planètes et des étoiles) et en particulier de l'astrophysique (l'étude des modèles physiques des astres). Le problème **I** décrit des notions connues depuis le XVII^e siècle (la mécanique céleste des trajectoires des planètes et les lois de KEPLER et NEWTON). Le problème **II** propose une étude de quelques propriétés énergétiques des étoiles en comparant leur énergie gravitationnelle avec des termes comparables liés aux autres interactions au sein de l'étoile.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des *constantes fondamentales* utiles, des *données numériques* et des rappels de *syntaxe Python* sont regroupés en fin d'énoncé. On pourra noter $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy) , cf. figure 1.

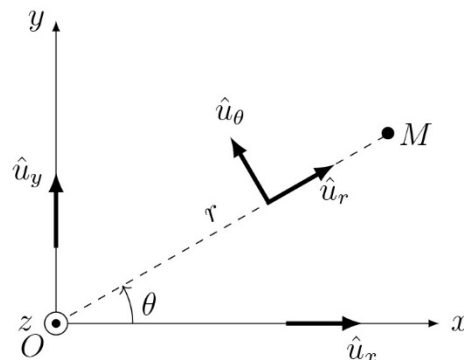


FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

On posera $j^2 = -1$. On notera par un point les dérivées temporelles, $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Les vecteurs \vec{w} sont surmontés d'une flèche, sauf les vecteurs unitaires notés \hat{u} .

I Les lois de Kepler et l'unité astronomique

Ce problème est consacré aux lois de KEPLER (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par CASSINI (1672). On notera que ces travaux sont tous deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par NEWTON (1687).

On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

I.A Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen (\mathcal{R}_0) , le mouvement d'un astre \mathcal{P} assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur \mathcal{A} de masse m_A et de centre fixe A . On notera $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{r} = r\hat{u}_r$.

□ – 1. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?

Quelle est l'expression de la force gravitationnelle \vec{F} exercée par \mathcal{A} sur \mathcal{P} si les deux astres sont assimilés à des points ?

Les deux questions suivantes sont des questions bonus pour les 3/2 – Pour les 5/2 il va falloir se souvenir du théorème de Gauss.

- – 2. Que devient l'expression de \vec{F} si \mathcal{P} reste ponctuel tandis que l'astre \mathcal{A} , de rayon $R_A < r$, possède une répartition de masse à symétrie sphérique ? On justifiera sa réponse.
- – 3. Cette expression reste-t-elle encore applicable si \mathcal{P} et \mathcal{A} sont tous deux à symétrie sphérique ? On pourra, dans tout ce qui suit, considérer \mathcal{A} et \mathcal{P} comme des points matériels A et P .
- – 4. Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy) .

On note \vec{v} la vitesse de P et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P . \vec{v} est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ .

- – 5. Exprimer $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ et en déduire que $\vec{v}(\theta) = C \frac{\hat{u}_\theta + \vec{e}}{p}$ où \vec{e} est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C , m_A et de la constante universelle de gravitation \mathcal{G} .

Montrer que le vecteur \vec{e} est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = e\hat{u}_y$ avec $e = \|\vec{e}\| \geq 0$.

- – 6. Exprimer \dot{r} et $r\dot{\theta}$ en fonction de C , p , e et θ .
En déduire r en fonction de p , e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné.
Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T .

I.B Période du mouvement

- – 7. En utilisant par exemple la question précédente, montrer que $T = \mathcal{I}p^{3/2}/\sqrt{\mathcal{G}m_A}$ où la constante \mathcal{I} s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$.
- – 8. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des lois de Kepler, préciser laquelle et proposer son énoncé « historique » sous forme d'une phrase en français.

Le calcul de l'intégrale \mathcal{I} en fonction de e peut être mené de manière numérique (au moyen d'un script Python) ; les résultats sont illustrés figure 2.

- – 9. Proposer l'écriture des lignes de code Python permettant le tracé de la figure 2 : courbe en trait plein puis mise en exergue d'une dizaine de valeurs régulièrement réparties pour $0 \leq e \leq \frac{1}{2}$.

Note : on pourrait mener le calcul exact de l'intégrale qui fournit $\mathcal{I}(e) = (1 - e^2)^{-3/2} \mathcal{I}_{e=0}$. Ce calcul n'est pas demandé !

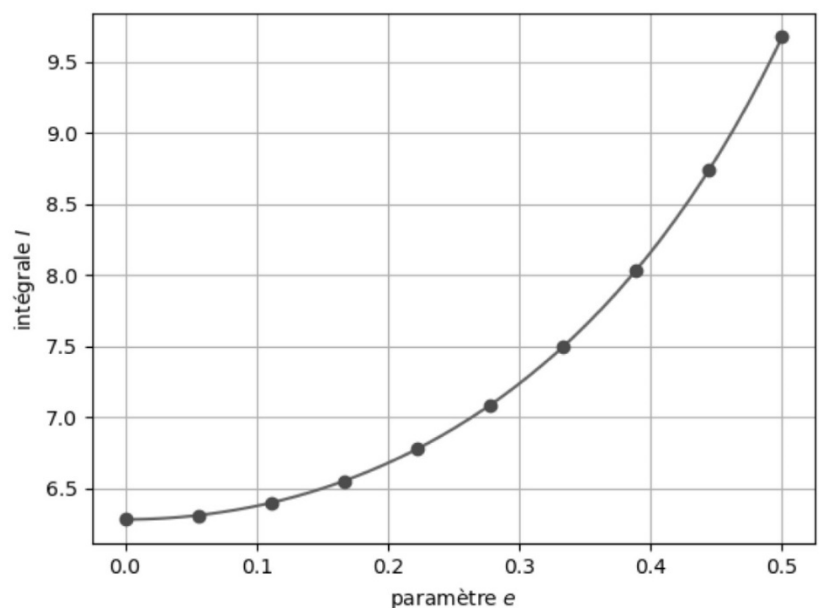


FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale \mathcal{I}

I.C Mesure de l'unité astronomique

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de COPERNIC, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1 , de périodes T_0 et T_1 .

Le principe de la mesure de a_0 proposée par CASSINI, à la fin du XVII^e siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7\,070$ km) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance *minimale* de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris \rightarrow Mars et Cayenne \rightarrow Mars).

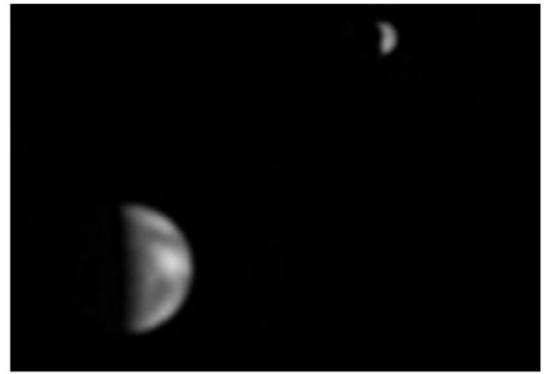


FIGURE 3 – La Terre et la Lune vues depuis Mars par la sonde *Mars Global Surveyor*, photo NASA

- – 10. Représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0 , a_1 , ℓ , α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).
- – 11. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0 , T_1 , ℓ et α .
- – 12. La valeur annoncée par CASSINI était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci-dessus ?

II Structure et énergie des étoiles

Les parties II.A, II.B et II.C sont très largement indépendantes. Les étoiles à l'équilibre seront ici décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et de diverses forces antagonistes qui s'opposent à l'effondrement de l'étoile : il s'agira de la pression thermodynamique associée à l'agitation thermique dans la partie II.B et d'une propriété strictement quantique, la pression de confinement, dans la partie II.C.

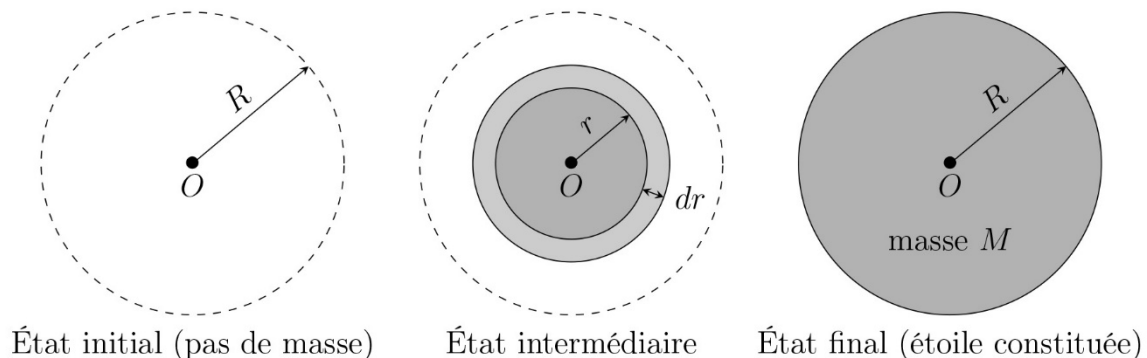


FIGURE 4 – Constitution progressive de l'étoile

II.A L'énergie gravitationnelle

Du fait de la symétrie sphérique de l'étoile, on va définir son énergie gravitationnelle W_g comme l'énergie mécanique qu'un opérateur *fournit* à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant (figure 4). Ce calcul sera effectué pour une évolution *quasi-statique*, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

- – 13. Donner et justifier physiquement le signe de W_g . Expliquer pourquoi on nomme parfois $E_\ell = -W_g$ l'énergie de liaison de l'étoile.
- – 14. Exprimer la masse volumique ρ , supposée uniforme et constante, de l'étoile en fonction de M et R .
En déduire, en fonction de M , R et r , les expressions de m (masse déjà constituée dans une sphère de rayon r) et de dm (masse à apporter pour faire passer ce rayon de r à $r + dr$).
- – 15. Justifier que la contribution dW_g à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement (passage de r à $r + dr$) s'écrit $dW_g = -\mathcal{G} \frac{m dm}{r}$.
Calculer l'énergie gravitationnelle totale W_g de l'étoile en fonction de \mathcal{G} , M et R .

Données numériques

Grandeur	Symbole, valeur et unité
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Distance Terre–Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1 \text{ UA} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687 \text{ j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4,85 \mu\text{rad}$

On donne $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \simeq 1,6$ et $\left[\frac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \frac{5}{4}$.

Syntaxes Python

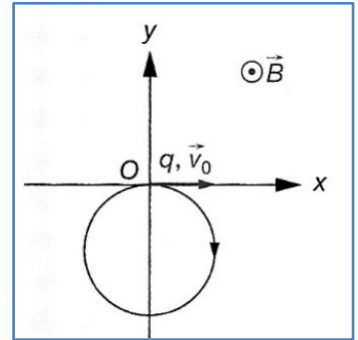
Syntaxe d'appel	Résultats ou commentaires
* Générer un tableau de n valeurs régulièrement sur $[a, b]$:	
<code>r = numpy.linspace(a, b, n)</code>	<code>r</code> est un tableau de type <code>numpy.array</code>
* Évalue l'intégrale $y = \int_a^b f(x)dx$ et estime l'erreur numérique	
<code>r = scipy.integrate.quad(f, a, b)</code>	<code>r = (y, err)</code>
* Créer ou activer une fenêtre de tracé :	
<code>r = matplotlib.pyplot.figure()</code>	exécuter <i>avant</i> de générer des tracés
* Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$	
<code>matplotlib.pyplot.plot(x, y)</code>	<code>x</code> et <code>y</code> , énumérables de même dimension
* Afficher la ou les fenêtres de tracé :	
<code>matplotlib.pyplot.show()</code>	exécuter <i>après</i> avoir généré des tracés

Fin de la partie II

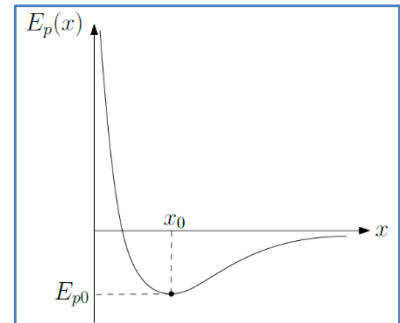
Partie III – SVF

a) Montrez que la trajectoire d'une charge q dans un champ magnétostatique uniforme est :

1. Un cercle si $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ est dans un plan orthogonal à \vec{B} . On retrouvera l'expression du centre du cercle C et de son rayon R à l'aide de v_0 et de la pulsation cyclotron.
2. Une droite si \vec{v}_0 colinéaire à \vec{B}
3. Une hélice dans un cas plus général. Dans le cas général on donnera les équations horaires $x(t), y(t)$ et $z(t)$ avec pour conditions initiales $\vec{OM}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z$.



b) Soit un point M matériel de masse m se déplaçant sur la droite (Ox) et soumis à l'énergie potentielle $E_p(x)$. Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x .



- c) Retrouvez les expressions de la première vitesse cosmique, puis de la seconde vitesse cosmique. (on donnera les applications numériques par rapport à un lancer à la surface de la terre)
- d) Dans le cas d'un mouvement à forces centrales, démontrez l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite circulaire, puis elliptique $(E_m = -\frac{|k|}{2a})$.
- e) Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule pesant.