

Physique : DS1C

Partie I - Le millénium Bridge (Mines-Ponts PC 2016)

① Oscillateur simple

$$1^{\circ}) \text{ PFD: } m \frac{d^2 \hat{u}_x}{dt^2} = -\alpha \hat{x} \hat{u}_x - mg \hat{u}_x - k(l-l_0) \hat{u}_x$$

$$\text{Sur } \hat{u}_x: m \ddot{x} = -\alpha x - mg - k(x-l_0) \text{ car } l = 0G = x(t).$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} x + \frac{k}{m} (x-l_0) = -g.$$

$$\text{Notons } \tilde{x} = x_{eq} \text{ d'où } \frac{k}{m} (\tilde{x}-l_0) = -g \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} x + \frac{k}{m} (x-\tilde{x}) = 0$$

$$\text{Si } X = x - \tilde{x} \text{ alors: } \underline{\ddot{X} + 2\gamma \omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = 0} \quad (1)$$

$$\text{où } \boxed{\omega_0^2 = k/m}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_0^2 = k/m \\ 2\gamma \omega_0 = \frac{\alpha}{m} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2m\omega_0} = \frac{\alpha}{2m\sqrt{k/m}} \Leftrightarrow \boxed{\gamma = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}}$$

- ω_0 est la pulsation propre, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement
- γ est le facteur d'amortissement, il croît proportionnellement à α .

2^o) 1^{er} cas $\gamma = 0$

$$\text{Dans ce cas (1) s'écrit } \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \Rightarrow X = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Or } \begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{X = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

2^{ème} cas: $0 < \gamma < 1$

$$\text{Dans ce cas le polynôme caractéristique s'écrit: } r^2 + 2\gamma \omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{t.q. } \Delta = 4\gamma^2 \omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 (\gamma^2 - 1) < 0$$

$$\text{des solutions sont du type: } X = [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)] e^{-\gamma \omega_0 t} \text{ où } \omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\gamma^2}$$

$$\text{Or } \begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = -\gamma \omega_0 A + B \omega_a \end{cases}$$

$$\text{car } \dot{X} = -\gamma \omega_0 [A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)] e^{-\gamma \omega_0 t} + \omega_a [-A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t)] e^{-\gamma \omega_0 t}$$

$$\text{Donc } V_0 = -\gamma \omega_0 X_0 + B \omega_a$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{V_0 + \gamma \omega_0 X_0}{\omega_a}$$

$$\text{Donc } X(t) = (X_0 \cos(\omega_a t) + \frac{1}{\omega_a} (V_0 + \gamma \omega_0 X_0) \sin(\omega_a t)) e^{-\gamma \omega_0 t}$$

On observe des pseudo-oscillations.

- d'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$ car $\vec{F}_v = +\beta \vec{x}$
 $\Rightarrow \gamma = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$

- Si $\beta > \alpha$, l'oscillateur devient instable. Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.

$$3^{\circ}). \textcircled{1} \text{ s'écrit avec l'ajout de cette force } \vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{X} + 2\gamma \omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{X} + 2\gamma \omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 \left[X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right] = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$$

$$\text{or } Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{Y} + 2\gamma \omega_0 \dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$$

- On pose $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ et $\underline{F}_1 = F_{1m} e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \underline{Y} (-\omega^2 + 2\gamma \omega_0 (i\omega) + \omega_0^2) = -\frac{F_1}{m} = -\underline{\underline{\epsilon}}$$

$$\text{D'où } \underline{Y} = \frac{-\underline{\underline{\epsilon}}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(2\gamma \omega_0 \omega)} = \frac{-\underline{\underline{\epsilon}}/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\left(\frac{2\gamma \omega}{\omega_0}\right)}$$

$$\text{Donc } \underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$$

4°) Une résonance se produit si $|\underline{H}|$ présente un maximum au voisinage d'une pulsation propre de l'oscillateur.

$$\text{Soit } |\underline{H}| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\gamma^2}}$$

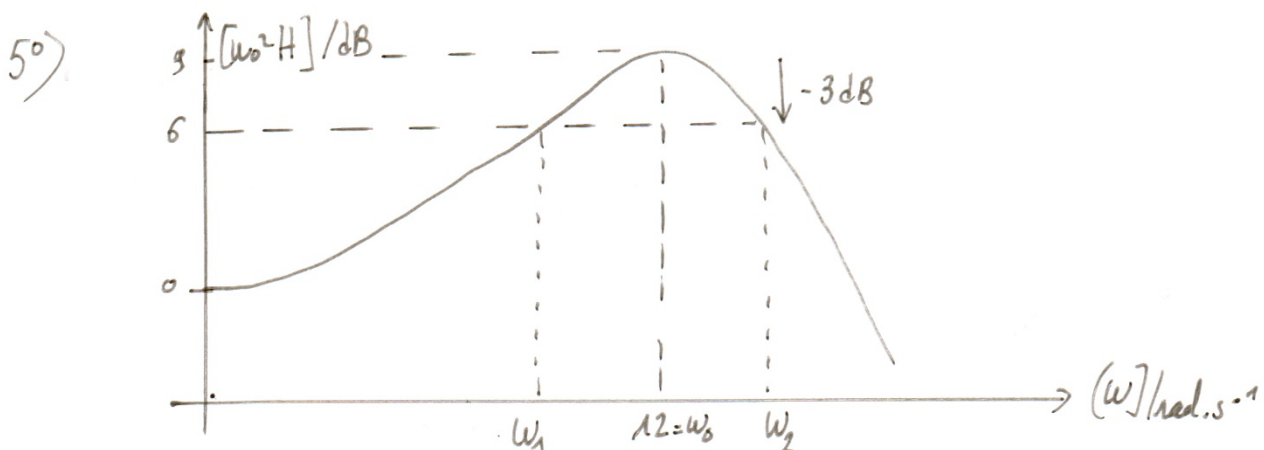
$$\begin{aligned} \text{t.q. } \frac{dH}{d\Omega} = 0 &\Leftrightarrow -4\Omega(1 - \Omega^2) + 8\Omega\gamma^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = 0 \text{ (cas non intéressant car minimum)} \\ (1 - \Omega^2) = 2\gamma^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \Omega^2 = 1 - 2\gamma^2 \rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\gamma^2}$$

$$\text{A la résonance : } |\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^4 + (1 - 2\gamma^2) \cdot 4\gamma^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^2 - \underbrace{4\gamma^4}_{\ll 4\gamma^2}}}$$

$$\text{Vu que } \gamma^2 \ll 1 \Rightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1}{2\omega_0^2\gamma}$$



• Pour $\xi^2 \ll 1$ on a $\omega_r = \omega_0 \approx 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

• Or on sait que la bande passante est l.q. : $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 2\xi$

$$\text{Avec } \Delta\omega = 14,2 - 9,5 = 4,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} = \frac{4,7}{2 \times 12} = \underline{\underline{0,12}}$$

6°) Il est important de connaître les fréquences de résonance d'une structure pour éviter qu'elle ne soit excitée à leur voisinage. Exciter ou une résonance un pont ou une tour peuvent être détectées : pont de Tacoma à Washington

7°) On peut fixer sur la structure des accéléromètres.

8°) Pour chaque spectre on peut calculer la fréquence d'acquisition des mesures : la fréquence d'échantillonnage des mesures :

$$f_c = \frac{N}{t_{\text{max}} - t_{\text{min}}}$$

On obtient ainsi : ① : $f_{c1} = 1,68 \text{ Hz}$, ② : $f_{c2} = 11,5 \text{ Hz}$, ③ : $f_{c3} = 3,34 \text{ Hz}$, ④ : $f_{c4} = 33,3 \text{ Hz}$.

• Or le signal proposé a une fréquence de 2 Hz (période de $0,5 \text{ s}$)

D'après le critère de Shannon - Nyquist $f_{\text{max}} < \frac{f_c}{2}$.

• Ainsi le graphique 4 nous permet de mieux caractériser le signal :

- Signal de valeur moyenne non nulle.
- Signal dont le fondamental vaut 2 Hz .

avec des harmoniques à amplitude décroissante à $4, 6, 8, 10, 12 \text{ Hz}$

• des autres graphes sont sensibles au repliement de spectre. Par exemple dans le cas du graphique

②, le pic à $3,5 \text{ Hz}$ est en fait le pic à 8 Hz car $3,5 = 11,5 - 8$.

• On peut donc conclure que la fréquence de la marche est de 1 Hz car les 2 pieds jouent un rôle symétrique. La fréquence de la force subie par le pont est de 2 Hz .

9°) La fréquence de résonance du pont correspond à la fréquence de la force subie, ainsi le pont va rentrer en résonance. Le système d'amortissement va abaisser la réponse en amplitude (-20 dB au maximum) et placer une anti-résonance au la fréquence de la force subie par le pont.

Partie II - Des objets astronomiques, de Mars à Sirius (Mines-Ponts 2024 /MPI)

I-A) Les lois de Képler et l'u.a

Q1) On peut considérer A comme fixe si $m_A \gg m_P$ (sinon on traite le problème à 2 corps)

• Force gravitationnelle de A sur P :
$$\vec{F}_{A \rightarrow P} = - \frac{G m_A m_P}{r^2} \vec{u}_r$$

Q2) Si A devient sphérique, on peut ramener toute la masse au centre A et les formules restent inchangées.

Justification : théorème de Gauss

• Symétrie sphérique

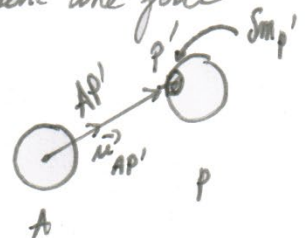
• Surface de Gauss : sphère de rayon $r > R_A$

d'où $\oint \vec{g}_A \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int} \Rightarrow 4\pi r^2 g_A = -4\pi G M_A \Rightarrow \vec{g}_A = -\frac{G M_A}{r^2} \vec{u}_r$

d'où $\vec{F}_{A \rightarrow P} = -\frac{G m_A m_P}{r^2} \vec{u}_r$

Q3) Chaque point de P va subir un champ de gravitation différent et donc une force différente. Ainsi on peut écrire :

$$\vec{F}_{A \rightarrow P} = -G m_A \int_{P' \in A \text{ sur } P} \frac{\delta m_{P'}}{AP'^2} \vec{u}_{AP'}$$



Q4) TRC appliqué à P dans R galiléen par rapport à A fixe :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{AP} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_A = \text{cste}$$

or $\vec{L}_A \cdot \vec{AP} = (\vec{AP} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{AP} = 0$ d'où $\vec{L}_A \perp \vec{AP}$

\Rightarrow le mv est plan dans un plan orthogonal à \vec{L}_A .

En coordonnées cylindriques. $\vec{L}_A = \vec{AP} \wedge m\vec{v}(P)$
 $= m_P r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = m_P C \vec{u}_z$ d'où $C = r^2 \dot{\theta} = \text{cste}$

05) Calculons $\frac{d\vec{v}}{dt}$:

$$\# \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \vec{a} \cdot \frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{\vec{F}}{m_p \dot{\theta}} = -\frac{Gm_A}{r^2 \dot{\theta}} \vec{u}_r = -\frac{Gm_A}{c} \vec{u}_r$$

$$\text{or } \vec{u}_r = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{Gm_A}{c} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$$

$$\text{d'où } \vec{v} = \frac{Gm_A}{c} \vec{u}_\theta + \text{cste}$$

$$\text{or } \vec{v}(\theta) = C \frac{\vec{u}_\theta + \vec{e}}{p} \quad \text{donc : } \begin{cases} \frac{Gm_A}{c} = \frac{C}{p} \Rightarrow p = \frac{C^2}{Gm_A} \\ \frac{C}{p} \vec{e} = \text{cste} \end{cases}$$

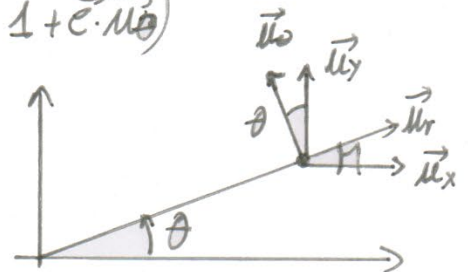
$\# \vec{e}$ a la même dimension que \vec{u}_θ : il est donc sans dimension

$\# \vec{e} = \frac{p \vec{v}(\theta)}{C} - \vec{u}_\theta$. Les deux entités appartiennent à (Axy) donc \vec{e} appartient à (Axy) .

$$06) \# \text{ Or } r \dot{\theta} = \vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{C}{p} (\vec{u}_\theta + \vec{e}) \cdot \vec{u}_\theta = \frac{C}{p} (1 + \vec{e} \cdot \vec{u}_\theta)$$

$$= \frac{C}{p} (1 + e \vec{u}_y \cdot \vec{u}_\theta)$$

$$\Leftrightarrow r \dot{\theta} = \frac{C}{p} (1 + e \cos \theta)$$



$$\# \text{ Et } i = \vec{v} \cdot \vec{u}_r = \frac{C}{p} (\vec{u}_\theta + e \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_r = \frac{Ce}{p} \sin \theta = i$$

$$\# \text{ On a démontré : } \begin{cases} r^2 \dot{\theta} = C \\ \text{et} \\ r \dot{\theta} = \frac{C}{p} (1 + e \cos \theta) \end{cases} \quad \text{d'où } r = \frac{C}{\frac{C}{p} (1 + e \cos \theta)}$$

$$\text{D'où } r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Donc si $0 \leq e < 1$ alors : $\frac{p}{1+e} < r < \frac{p}{1-e}$: mouvement borné

Dans ce cas on a affaire à un mouvement elliptique.

I.B) Période du mouvement

Q7) loi des aires : $C = r^2 \dot{\theta} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{r^2}{C} d\theta$.

$$\Leftrightarrow T = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{C} d\theta \quad (\text{Attention } r = r(\theta))$$

$$\text{d'où } T = \int_0^{2\pi} \frac{p^2}{(1+e \cos \theta)^2 C} d\theta = \frac{p^2}{C} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{p^2}{C} \mathcal{L} \quad \text{où } \mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2}$$

$$\text{or } p = \frac{C^2}{Gm_A} \Rightarrow C = \sqrt{p Gm_A}$$

$$\text{d'où } T = \frac{p^2}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Gm_A}} \cdot \mathcal{L} \Leftrightarrow T = \frac{\mathcal{L} p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}$$

Q8) Si $e = 0$: $\begin{cases} r_{\min} = \frac{p}{1+e} = p \\ r_{\max} = \frac{p}{1-e} = p \end{cases} \Rightarrow r_{\min} = r_{\max} \Rightarrow \text{traj. circulaire}$

$$\text{et } T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}} \quad \text{car } r = p.$$

$$\text{d'où } \frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm_A}{4\pi^2}$$

Énoncé historique : " le carré de la période sur le cube du demi-grand axe de l'ellipse est une constante indépendante de la masse de la planète pour toute les planètes du système solaire "

Q9) `import numpy as np`
`import matplotlib.pyplot as plt`
`import scipy.integrate`

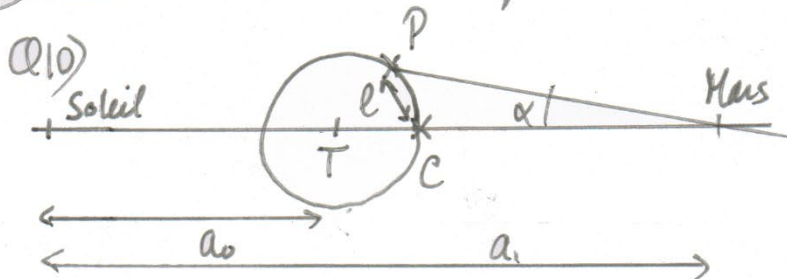
`e = np.linspace(0, 0.5, 10)` # On prépare les valeurs de calcul de α
`T = []` # on crée notre liste

def fonction(theta):
`y = 1 / (1 + x * np.cos(theta)) ** 2`
`return y.`

for x in e:
`res, en = scipy.integrate.quad(fonction, 0, 2 * np.pi)` # dans res on récupère nos valeurs.
`T.append(res)`

`plt.figure()`
`plt.plot(e, T, 'o')`
`plt.xlabel('paramètre e')`
`plt.ylabel('intégrale')`
`plt.show()`

I.C) Mesure de l'unité astronomique



Q11) 3^{ème} loi de Kepler: $\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3} \Rightarrow a_0^3 = a_1^3 \cdot (T_0/T_1)^2$

Or $\tan \alpha \approx \frac{l}{PM} \Rightarrow \alpha \approx \frac{l}{a_1 - a_0}$ (vrai car α est petit et $R_T \ll a_0$)

$$\text{Joue } a_1 - a_0 \approx \frac{l}{\alpha} \Leftrightarrow a_1 \approx a_0 + \frac{l}{\alpha}$$

$$\text{d'où : } a_0^3 = \left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right)^3 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a_0 = \left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right) \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}$$

$$\Leftrightarrow a_0 \left(1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}\right) = \frac{l}{\alpha} \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}$$

$$\Leftrightarrow a_0 = \frac{\left(\frac{l}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}}{1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}}$$

Q12) Avec les données numériques de l'énoncé :

$$a_0 = \frac{(7070 \cdot 10^3 / (14 \times 4,85 \cdot 10^{-6})) \cdot (365/687)^{2/3}}{1 - (365/687)^{2/3}}$$

$$= \underline{1,9 \cdot 10^{11} \text{ m}}$$

On vérifie l'ordre de grandeur de $1,9 \cdot 10^{11} \text{ m}$

$$\text{Q13) Soit } \delta W_g = \vec{F}_{\text{op}} \cdot d\vec{OM} = -\vec{F}_g \cdot d\vec{OM} \text{ car } \vec{F}_{\text{op}} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$= -F_g \cdot \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + \dots) = -F_g \cdot dr$$

$$\text{Vu que } F_g < 0 \text{ et } dr < 0, \text{ on a donc } \delta W_g < 0 \Rightarrow \underline{W_g < 0}$$

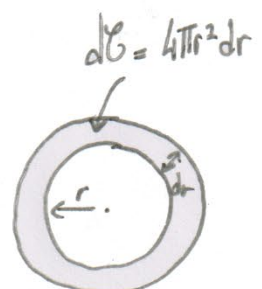
• Cette face permet de rendre cohérent (consistant) la sphère de rayon R . Ainsi il faudra fournir l'énergie opposée pour "casser" la structure d'eau :

$$E_l = -W_g = \text{énergie de liaison.}$$

$$\text{Q14) Mass volumique : } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\cdot \text{ masse } m(r) : m(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\rho\pi r^3}{3}$$

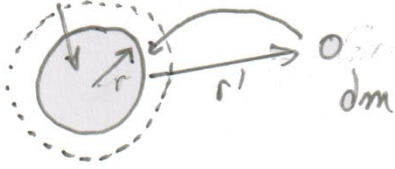
$$\cdot \text{ Et la masse } dm : dm = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$



Q15) C'est un calcul classique que l'on retrouvera dans EM5 :

$$dW_g = + \int_{\infty}^r \vec{F}_{op} \cdot d\vec{OM} = \int_{\infty}^r -F_g \cdot d\vec{OM}$$

Sphère de masse m



$$\Rightarrow dW_g = + G \int_{\infty}^r \frac{m dm}{r'^2} dr' = -G \left[\frac{m dm}{r'} \right]_{\infty}^r$$

variable muette

$$\Rightarrow dW_g = - \frac{G m dm}{r}$$

Il reste à intégrer de 0 à R pour que la sphère se forme totalement :

$$W_g = \int_0^R - \frac{G m dm}{r} = - \int_0^R G \cdot \frac{\rho 4\pi r^3}{3r} \cdot \rho 4\pi r^2 dr$$

$$= - \int_0^R G \cdot \frac{16\pi^2}{3} r^4 \left(\frac{3M}{4\pi R^3} \right)^2 dr.$$

$$= -G \cdot \frac{16\pi^2 \times 3^2}{16 \times 3\pi^2} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow W_g = - \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$

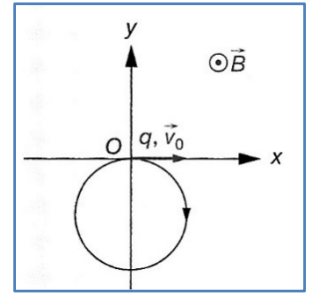
Fin de la partie mécanique

Partie III – SVF

a) Mouvement Cyclotron

1. Mouvement circulaire

Une particule de charge q et masse m placée dans un champ magnétique uniforme et statique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. La particule est située initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ est perpendiculaire au champ magnétique.



Le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P_e = 0$ montre que la

norme de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient : $m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} B_0 \dot{y} \\ -B_0 \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$

Or $\ddot{z} = 0 \Rightarrow z = v_{0z}t + z_0 = 0 \Rightarrow$ la trajectoire est plane si $v_{0z} = 0$

L'intégration des projections sur \vec{u}_x et \vec{u}_y donne : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + C_1 \\ m\dot{y} = -qB_0x + C_2 \end{cases}$ (1)

Les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$ donnent : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + mv_0 \\ m\dot{y} = -qB_0x \end{cases}$

Donc (1) peut s'écrire : $\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m} \dot{y} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} x \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m} \dot{x} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} y - \frac{qB_0}{m} v_0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases}$ où $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ pulsation cyclotron si on suppose $q > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \\ y = A' \cos(\omega_c t) + B' \sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases} \text{ avec comme conditions initiales } \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_c} \\ y(0) = 0 \Rightarrow A' = \frac{v_0}{\omega_c} \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow B' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

Si on pose $R = \frac{v_0}{\omega_c}$ on a : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{(y+R)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+R)^2 = R^2$, on retrouve bien l'équation d'un cercle de centre $(0, -R)$ et de rayon R si $q > 0$.

2. Mouvement rectiligne

Si \vec{v}_0 colinéaire à \vec{B} , il n'y a pas de force initiale et donc pas de modification de \vec{v}_0 ...donc le mouvement sera rectiligne

3. Mouvement hélicoïdal

- a. Si \vec{v}_0 est quelconque il va se rajouter une composante sur z : $z = v_{0z}t + z_0$ ainsi le mouvement en plus d'être circulaire va monter, ce qui va former une trajectoire hélicoïdale de pas $h = v_{0z}T = v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega_c}$
- b. Les équations en $x(t)$ et $y(t)$ reste les mêmes à condition de remplacer v_0 par v_{0x} .

b) Soit un point M matériel de masse m se déplaçant sur la droite (Ox) et soumis à l'énergie potentielle $E_p(x)$. Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x .

On développe l'énergie potentielle à l'ordre 2 autour de la position d'équilibre x_0 :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} + o(x - x_0)$$

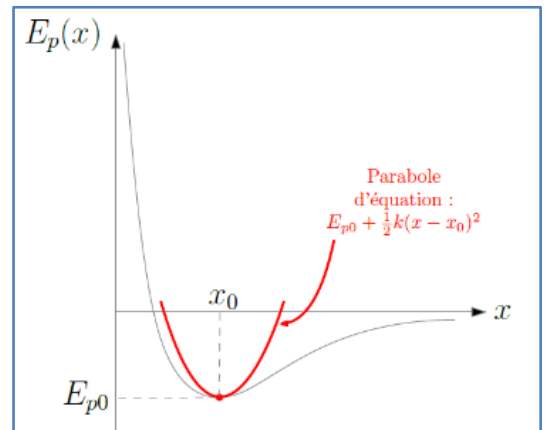
Par définition de la position d'équilibre : $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$, on pose $k = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0}$

$$\Rightarrow E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Ainsi on approxime autour de la position d'équilibre la courbe par un puits parabolique, qui correspond à celui d'un oscillateur harmonique de position d'équilibre x_0 . Il est donc normal de retrouver l'équation différentielle d'un OH.

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x = -k(x - x_0)\vec{u}_x \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

On pose $X = x - x_0$ et on obtient : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



c) Retrouvez les expressions de la première vitesse cosmique, puis de la seconde vitesse cosmique. (on donnera les applications numériques par rapport à un lancer à la surface de la terre)

- Première vitesse cosmique :

Le cas le plus simple de trajectoire liée est la trajectoire circulaire. Son rayon est noté r . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse donne :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}_r \\ \Rightarrow m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \\ \Rightarrow m \left(-r\dot{\theta}^2 \right) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r^3}} \end{aligned}$$

Au final, la vitesse sur l'orbite circulaire de rayon r s'écrit :

$$v_1 = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r}} = 7,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \text{ dans le cas de la terre}$$

où m' est la masse du centre attracteur.

C'est ce que l'on nomme la première vitesse cosmique. C'est la vitesse minimale à communiquer

à un objet pour le satelliser.

- Deuxième vitesse cosmique

Il est intéressant de connaître la vitesse limite, pour laquelle l'objet partira au loin sans revenir, c'est ce que l'on nomme la vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique. C'est la limite entre les trajectoires fermées et ouvertes c'est-à-dire la trajectoire parabolique dont l'énergie mécanique est nulle :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm'}{r} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm'}{r}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \text{ dans le cas de la terre}$$

- d) Dans le cas d'un mouvement à forces centrales, démontrez l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite circulaire, puis elliptique ($E_m = -\frac{|k|}{2a}$).

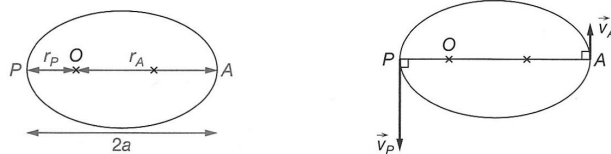
- Mouvement circulaire

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2}m \frac{Gm'}{r} - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2} \frac{|k|}{r} - \frac{|k|}{r} = -\frac{|k|}{2r}$

- Mouvement elliptique

Pour un point matériel en orbite elliptique autour d'une masse m' immobile en O, l'énergie mécanique E_m , est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm'}{r}$$



En l'évaluant aux points d'approche et d'éloignement maximaux notés précédemment A et P, la vitesse se réécrit en ces points :

$$v = r\dot{\theta} = \frac{C}{r} \text{ aux points A et P (vitesse orthoradiale)}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - \frac{Gmm'}{r} \text{ aux points A et P} \Rightarrow r^2 - \frac{1}{2} \frac{mC^2}{E_m} + \frac{Gmm'}{E_m} r = 0$$

Il est clair par construction que cette équation possède exactement deux racines positives, r_A et r_p tel que:

$$r = -\frac{1}{2} \frac{Gmm'}{E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow r_A + r_p = 2a = -\frac{Gmm'}{E_m}$$

D'où : $E_m = -\frac{|k|}{2a}$

Pour une orbite parabolique $E_m = 0$ et pour une orbite hyperbolique : $E_m = +\frac{|k|}{2a}$

- e) Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule pesant.

Le solide est soumis à :

- L'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;

- Son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G tel que :

$$M_z = -mgdsin\theta$$

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\theta} = M_z = -mgdsin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgdsin\theta}{J_z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z}$$

