

## Physique : DM4

## Partie A – Capacité numérique 5

## CN5 - Résolution de l'équation de diffusion

## I - Etude théorique

Q1) Faire un schéma de la situation (on appellera (Ox) l'axe dirigeant la barre) et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par la température dans la barre. Se conférer au cours afin d'obtenir :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Q2) Au bout de combien de temps, en ordre de grandeur, peut-on considérer que le régime permanent est atteint au sein de la barre ?

En ODG l'ED peut s'écrire :

$$\frac{T^*}{\tau} = D \frac{T^*}{L^2} \Rightarrow \tau = \frac{L^2}{D}$$

Q3) Déterminer alors le champ de température en régime permanent dans la barre.

En régime stationnaire :

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux limites  $T_g = T(0)$  et  $T_d = T(L)$  on obtient :

$$T(x) = T_g + \frac{T_d - T_g}{L} x$$

## II - Etude numérique

Q4) Dans cet algorithme, précisez le rôle de Nx, Nt, x et t.

```

: import matplotlib.pyplot as plt
import random
import numpy as np

#Q4) Représentation graphique du champ de température initial
dx=1e-2
dt=1e-2
L=0.5
Deltat=45*60

Nx=int(L/dx)+1
Nt=int(Deltat/dt)+1
x=[j*dx for j in range(Nx)]
t=[i*dt for i in range(Nt)]

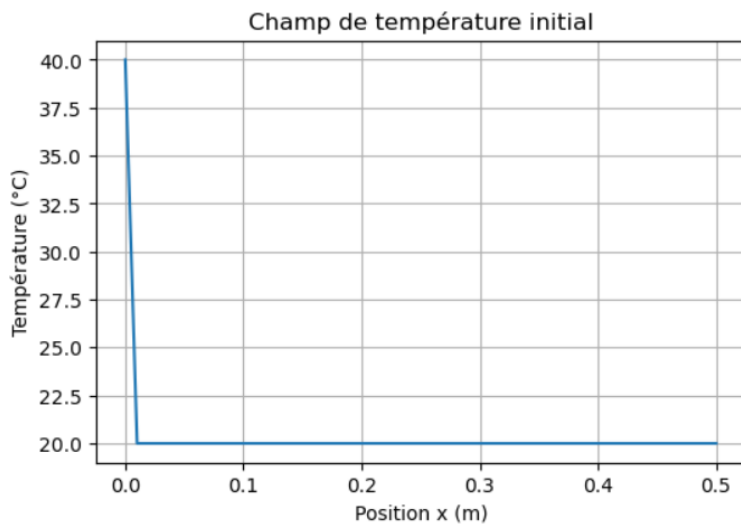
T=np.zeros((Nt,Nx))
Tg=40 #on va travailler en °C (on peut aussi le faire en Kelvin)
Td=20

T[0,0]=Tg
for j in range(1,Nx):
    T[0,j]=Td

plt.clf()
plt.figure(dpi=100)
plt.plot(x,T[0,:])
plt.grid()
plt.xlabel("Position x (m)")
plt.ylabel("Température (°C)")
plt.title("Champ de température initial")
plt.show()

```

&lt;Figure size 432x288 with 0 Axes&gt;



Dans cet algorithme  $N_x$  représente le nombre d'itérations sur la variable  $x$ ,  $N_t$  sur la variable  $t$ ,  $x$  et  $t$  sont des listes qui contiennent les valeurs de  $x$  et  $t$  pour lesquelles on va représenter la température dans tout l'espace en fonction du temps.

**Q5) Remplir le tableau T de manière à imposer, à tout instant, les conditions aux limites aux deux extrémités de la barre.**

```
for i in range (1,Nt): # L'instant initial a déjà été traité
    T[i,0]=Tg
    T[i,-1]=Td
```

**Q6) En écrivant la formule de Taylor-Young pour  $f(x+dx)$  et  $f(x-dx)$ , en déduire que :**

Soit :

$$f(x + dx) \simeq f(x) + dx f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x)$$

$$f(x - dx) \simeq f(x) - dx f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x)$$

D'où :

$$f(x + dx) + f(x - dx) \simeq 2f(x) + dx^2 f''(x)$$

$$f''(x) \simeq \frac{f(x + dx) + f(x - dx) - 2f(x)}{dx^2}$$

**Q7) Donnez alors l'expression de  $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j}$  en fonction de  $T[i, j - 1]$ ,  $T[i, j + 1]$  et  $T[i, j]$**

A l'aide de la formule précédente et l'aide de l'énoncé on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} \simeq \frac{T[i, j + 1] + T[i, j - 1] - 2T[i, j]}{dx^2}$$

**Q8) En déduire que la résolution de l'équation de diffusion thermique dans la barre se ramène au schéma numérique :**

$$T[i + 1, j] = T[i, j] + \frac{Ddt}{dx^2} (T[i, j + 1] + T[i, j - 1] - 2T[i, j])$$

D'après l'équation de la diffusion :  $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , il suffit donc de remplacer les deux dérivées :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} \simeq \frac{T[i + 1, j] - T[i, j]}{dt}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} \simeq \frac{T[i, j + 1] + T[i, j - 1] - 2T[i, j]}{dx^2}$$

On obtient  $D \frac{T[i,j+1]+T[i,j-1]-2T[i,j]}{dx^2} = \frac{T[i+1,j]-T[i,j]}{dt}$  Ce qui donne le résultat recherché :

$$T[i + 1, j] = T[i, j] + \frac{Ddt}{dx^2} (T[i, j + 1] + T[i, j - 1] - 2T[i, j])$$

Q9) Implémenter ce schéma numérique pour réaliser le remplissage du tableau T dans son intégralité.

```
D=1e-4
for i in range(0,Nt-1): #on remplit à l'indice i+1
    for j in range(1,Nx-1): #les conditions aux limites sont déjà fixées
        T[i+1,j]=T[i,j]+D*dt/(dx*dx)*(T[i,j+1]+T[i,j-1]-2*T[i,j])
```

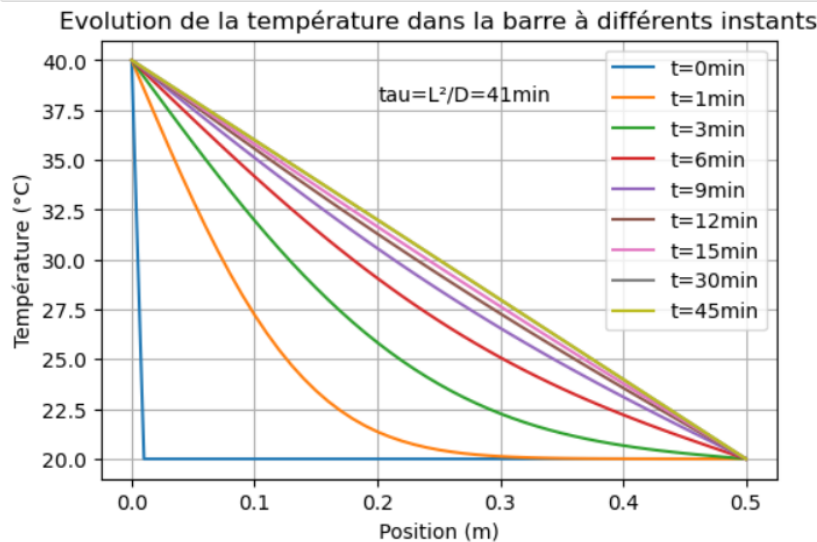
Q10) Pour les différents instants  $t=\{0,1,3,6,9,12,15,30,45\}$ , tracer sur un même graphique l'évolution de la température au sein de la barre. Quand est atteint le régime permanent ? Commenter.

```
instants_min=[0,1,3,6,9,12,15,30,45] #instants choisis en minutes

plt.close()
plt.figure(dpi=100)
for k in range(len(instants_min)):
    i=int(instants_min[k]*60/dt)
    plt.plot(x,T[i,:],label="t="+str(instants_min[k])+"min")
plt.xlabel("Position (m)")
plt.ylabel("Température (°C)")
plt.title("Evolution de la température dans la barre à différents instants")
plt.legend()
plt.grid()

tau_min=L*L/D*1/60

plt.text(0.201,38,"tau=L²/D="+str(tau_min)[0:2]+"min")
plt.show()
```



Le régime stationnaire étant représenté par une "droite", on peut considérer que celui-ci est atteint après 30 minutes (ou 45min). On peut conclure que le régime transitoire laissera place à un régime permanent après 30 minutes.

### III – Puissance volumique interne dans tout le conducteur

Q11) Donnez l'expression de  $K$  en fonction de  $R$ ,  $I$ ,  $S$ ,  $L$ ,  $\rho$  et  $c$ .

L'équation à résoudre est désormais :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K$$

avec  $K = \frac{p_V}{\rho c}$ .

Or :  $p_V = \frac{RI^2}{SL}$  est la puissance volumique dissipée par effet Joule ( $S$  étant la section du barreau),  $\rho$  la masse volumique du barreau et  $c$  la capacité thermique massique du barreau.

Par conséquent :  $K = \frac{RI^2}{\rho cLS}$

**Q12) Pour les mêmes instants, tracer sur un même graphique l'évolution de la température au sein de la barre conductrice. Commenter.**

Cette fois Le schéma numérique associé à cette équation devient :

$$T[i + 1, j] = T[i, j] + dt \times \left( \frac{D}{dx^2} (T[i, j + 1] + T[i, j - 1] - 2T[i, j]) + K \right)$$

D'où l'algorithme suivant :

```
dx=1e-2
dt=1e-2

L=0.5
Deltat=45*60

Nx=int(L/dx)+1
Nt=int(Deltat/dt)+1

x=[j*dx for j in range(Nx)]
t=[i*dt for i in range(Nt)]

T=np.zeros((Nt,Nx))

Tlim=20

#initialisation
T[0,0]=Tlim
for j in range(1,Nx):
    T[0,j]=Tlim

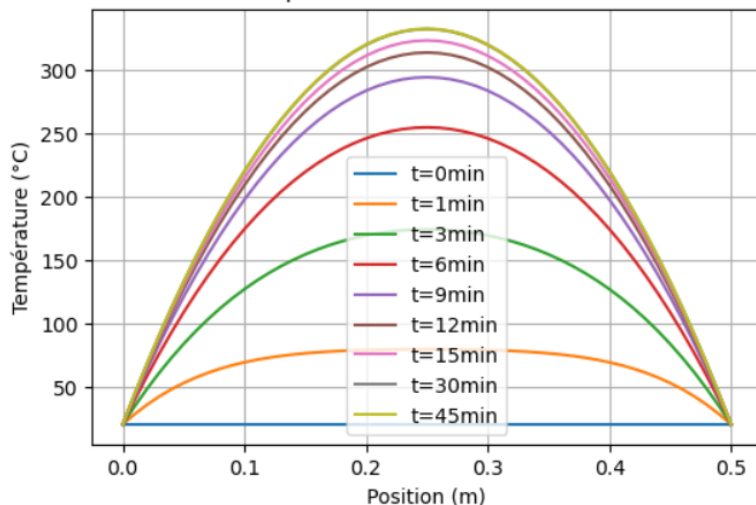
#instants ultérieurs
for i in range(1,Nt): # l'instant initial a déjà été traité
    T[i,0]=Tlim
    T[i,-1]=Tlim

K=1 #K est choisie arbitrairement de manière à avoir des résultats graphiques adaptés.
D=1e-4

for i in range(0,Nt-1): #on remplit à l'indice i+1
    for j in range(1,Nx-1): #Les conditions aux limites sont déjà fixées
        T[i+1,j]=T[i,j]+dt*(D/(dx*dx))*(T[i,j+1]+T[i,j-1]-2*T[i,j])+K
    instants_min=[0,1,3,6,9,12,15,30,45] #instants choisis en minutes

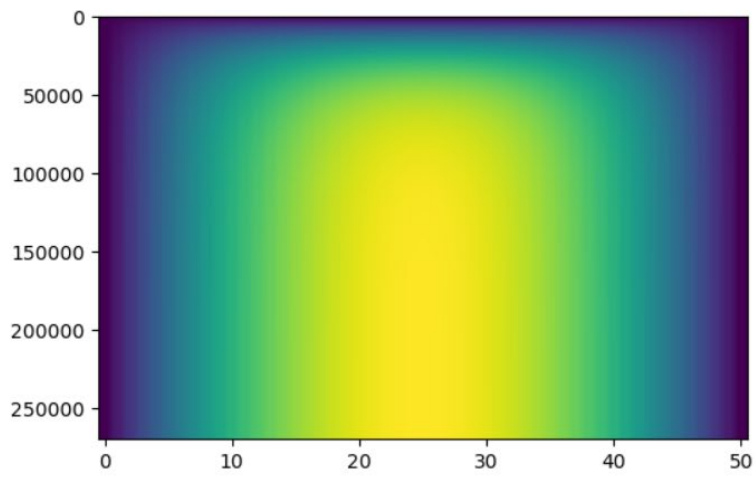
plt.close()
plt.figure(dpi=100)
for k in range(len(instants_min)):
    i=int(instants_min[k]*60/dt)
    plt.plot(x,T[i,:],label="t="+str(instants_min[k])+"min")
plt.xlabel("Position (m)")
plt.ylabel("Température (°C)")
plt.title("Evolution de la température dans la barre à différents instants")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Evolution de la température dans la barre à différents instants



**Bonus) On peut aussi faire une représentation 3D où sur l'on place x sur l'axe des abscisses, le temps sur celui des ordonnées et la température prend une couleur allant vers le jaune au fur et à mesure que la température augmente.**

```
plt.close()  
plt.figure(dpi=100)  
plt.imshow(T,aspect="auto")  
plt.show()
```



## PARTIE B - Caloduc (Centrale MP - 2015)

IV.A.1

On a :  $a \gg l$  et  $b \gg l$ , on peut donc considérer la plaque comme "infinie" : pas d'effets de bord. Il y a donc invariance par translation suivant  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  d'où :

$$T(x, y, z, t) = T(x, t) \quad (1)$$

IV.A.2 On fait un bilan thermique sur une tranche d'épaisseur  $dx$  et de section  $S$  entre  $t$  et  $t+dt$  :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$\Leftrightarrow U(t+dt) - U(t) = \delta Q$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{du}{dt} dt dV = \left[ j_{th}(x) - j_{th}(x+dx) \right] S dt$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{du}{dt} dt dV = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx S dt$$

Or d'après la loi de Fourier  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \rho \frac{du}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{Or } du = c dT \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ où } D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}} \quad (2)$$

IV.A.3 En régime stationnaire :  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = Ax + B$

$$\text{Avec les C.L. : } \boxed{T = \frac{T_0 - T_1}{l} x + T_1} \quad (3)$$

Donc :  $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx} ab$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Phi = \lambda \frac{T_1 - T_0}{l} ab} \quad (4)$$

IV.A.4

$$D'ai \quad \Phi = \frac{(T_1 - T_0)}{R_{th}} \quad \text{ou} \quad \boxed{R_{th} = \frac{l}{\lambda ab}} \quad (5)$$

$$\text{Analogie à : } I = \frac{V_1 - V_0}{R} \quad \text{ou} \quad R = \frac{L}{\lambda ab}$$

IV.B.1

$$\text{Soit } \delta Q_{cc} = h(T_0 - T_a) dy dz dt \Rightarrow \Phi_{cc} = h(T_0 - T_a) dy dz$$

$$\Rightarrow [h] = \text{Wk}^{-1}\text{m}^{-2}$$

$$\text{De plus } \Phi_{cc} = \frac{\Delta T}{R_h} \Rightarrow \underline{R_h = \frac{1}{\lambda ab}} \quad (6)$$

IV.B.2

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} R_{th} = \frac{l}{\lambda ab} = \underline{\underline{1,1 \cdot 10^{-2} \text{ kW}^{-1}}} \\ R_h = \frac{1}{\lambda ab} = \underline{\underline{35 \text{ kW}^{-1}}} \end{array} \right.$$

Ces deux résistances étant en série  $\Rightarrow R_{tot} \approx R_h$

\* C'est l'air qui limite le transfert thermique  $\Rightarrow$  ça ne sert à rien d'améliorer les parois, mais remplacer l'air ou augmenter la surface de contact peut être utile.

IV.C.Question ouverte:

Le microprocesseur est composée de fils de Cu et de puces en silicium, sur un support en silicium. On va utiliser le TDP = 15W, et supposons que le processeur est détruit quand le cuivre fond :  $T_{fus}(\text{Si}) > T_{fus}(\text{Cu})$ .

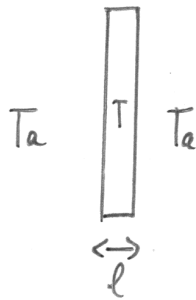
On suppose que la plaque est à température uniforme et qu'elle n'échange de transfert thermique qu'avec l'air ( $R_h \gg R_{th}$ ):

$$\text{Calcul de la surface de contact : } S = 2ab + 2bl + 2al$$

$$= 2b(a+l)$$

$$\approx \underline{\underline{2ab}}$$

# 1<sup>er</sup> principe appliqué à la plaque



$$\text{Soit } dU = m c_p dT = \delta W + \delta Q$$

$$= P_c dt - h(T - T_a) S dt.$$

$$\Leftrightarrow \rho_{si} c_{si} a b l \frac{dT}{dt} = P_c - h(T - T_a) S$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_a}{\tau} + \frac{P_c}{\rho_{si} c_{si} \times a b l}$$

$$\text{Donc } T = A e^{-t/\tau} + T_a + \frac{P_c \tau}{\rho_{si} c_{si} \cdot a b l} \quad \text{ou } \tau = \frac{\rho_{si} c_{si} a b l}{h S}$$

$$= \frac{\rho_{si} c_{si} l}{2h}$$

$$\text{Donc } T = T_a + A e^{-t/\tau} + \frac{P_c}{2h a b}$$

$$\text{Hypothèse : } T(0) = T_a \text{ d'où } T = T_a + \frac{P_c}{2h a b} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\text{A.N. : } \begin{cases} T_a = 293\text{K} \\ T(t \rightarrow \infty) = 553\text{K} \end{cases} \quad \text{et } \tau = 4\text{s.}$$

• Ni le métal, ni le silicium ne fondent dans ces conditions. Mais on a aussi à respecter

$$T_{\text{jonction}} = 100^\circ\text{C} \text{ (Spécification du microprocesseur)}$$

$$\text{Or } T_{\text{lim}} = T(t_{\text{lim}}) = T_a + \frac{P_c}{2h a b} (1 - e^{-t_{\text{lim}}/\tau})$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_{\text{lim}} - T_a}{P_c} \cdot 2h a b = 1 - e^{-t_{\text{lim}}/\tau}$$

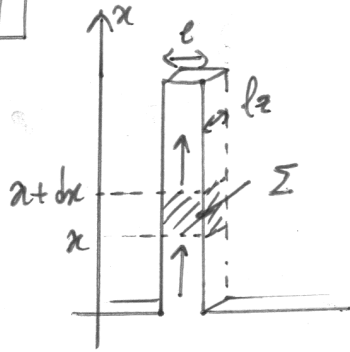
$$\Leftrightarrow t_{\text{lim}} = -\tau \ln \left( 1 - \frac{(T_{\text{lim}} - T_a) 2h a b}{P_c} \right) = \underline{\underline{15\text{s}}}$$

• Sans système de refroidissement efficace le processeur arrêtera de fonctionner après

$$\boxed{\Delta t = 15\text{s}} \quad \textcircled{7}$$



IV.D.1



D'après le premier principe appliqué à  $\Sigma$  :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

En régime stationnaire :  $0 = (\Phi_e + \Phi_s + \Phi_{at}) dt$

$$\Leftrightarrow \Phi(x) - \Phi(x+dx) - h(T-T_a) dx \cdot (2e+2l_z) = 0$$

$$\Leftrightarrow - \frac{d(\int h S dx)}{dx} - h(T-T_a) dx (2e+2l_z) = 0$$

$$\text{or } \begin{cases} \int h S dx = -\lambda \frac{dT}{dx} \\ \text{et} \\ S = e l_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow e l_z \cdot \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - h(T-T_a)(2e+2l_z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T-T_a) = 0$$

$$\text{ou } \delta = \sqrt{\frac{\lambda e l_z}{h(2e+2l_z)}} \quad (8)$$

Dont la solution est :  $T-T_a = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$

or  $B=0$  sinon  $T$  diverge.

$$\text{et } T(x_1) = T_R = T_a + A e^{-x_1/\delta} \Rightarrow A = (T_R - T_a) e^{x_1/\delta}$$

$$\text{Donc } T(x) = T_a + (T_R - T_a) e^{-(x-x_1)/\delta}$$

IV.D.2

$$\begin{aligned} \text{Soit Pailleto} &= \Phi(x_1) = j_{th}(x_1) e dz \\ &= -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1} e dz \\ &= (T_R - T_A) \frac{\lambda e dz}{\delta} \end{aligned}$$

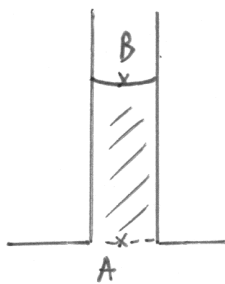
$$\text{Donc } \boxed{P_{radiation} = 6(T_R - T_A) \frac{\lambda e dz}{\delta}} \quad (9)$$

$$\text{et } \boxed{R_{radiation} = \frac{\delta}{6\lambda e dz}}$$

A.N. :

$$\begin{cases} P_{rad} = 44W \\ R_{rad} = 1,1 \text{ kW}^{-1} \ll R_a = 35 \text{ kW}^{-1} : \text{le système est efficace.} \end{cases}$$

IV.E.1 Caloduc = tube transporteur de chaleur proche de gazoduc et aqueduc.

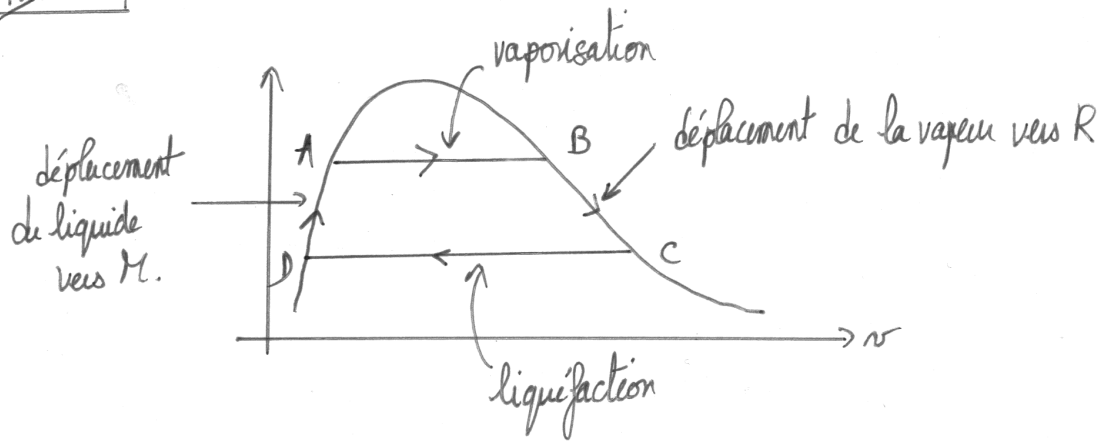
IV.E.2

des forces appliquées au fluide sont :

- les forces de pression en B et A
- le poids
- les forces de capillarité.

des forces de pression sont t.g  $\vec{F}_{PA} = -\vec{F}_{PB}$ , de plus le poids travaille négativement si le fluide monte :  $\mathcal{P} = -\vec{P} \cdot \vec{v} < 0$  donc il faut un travail

positif pour que le fluide monte :  $\Rightarrow$  Ce sont ces forces de capillarité qui permettent au fluide de monter (10)

IV.E.3IV.F

$$\text{Soit } P_{micro} = \frac{T_R - T_M}{R_{calo}} \Rightarrow R_{calo} = \frac{T_R - T_M}{P_{micro}} = \frac{1}{20} = \underline{\underline{5,0 \cdot 10^{-2} \text{ kW}^{-1}}}$$

$$\text{Alors que pour un bancou en cuivre : } R_{cu} = \frac{l}{\delta S} = \frac{y_2 - y_1}{l \cdot l_z}$$

$$= \frac{10}{2 \cdot 2,9 \cdot 10^{-3} \cdot 401} = \underline{\underline{4,3 \text{ kW}^{-1}}}$$

le caloduc transporte mieux l'énergie qu'un bancou de cuivre.