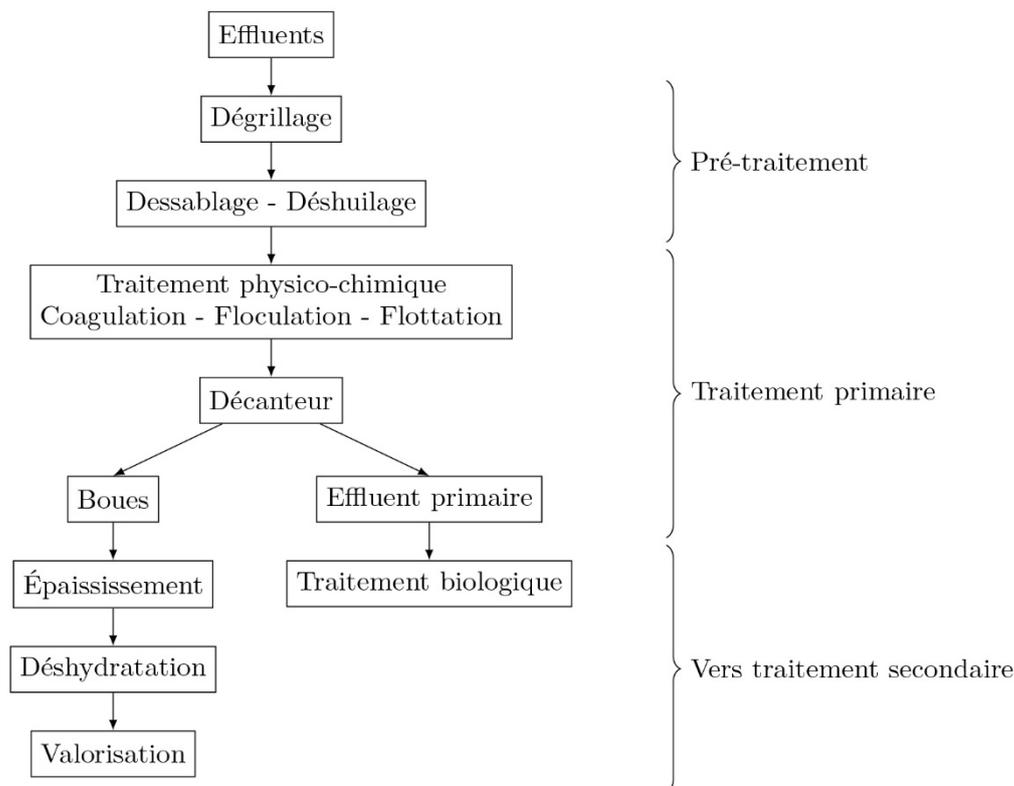


# Physique : DM3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## Partie A – Traitement des eaux usées

L'assainissement des eaux usées dans une station d'épuration nécessite de débarrasser les effluents domestiques ou industriels des sables, graisses, déchets ménagers et agents polluants. On s'intéressera ici plus spécifiquement au pré-traitement et au traitement primaire des eaux dans la station (voir **figure 1**). Les termes employés seront définis au fur et à mesure du problème.



**Figure 1** Traitements successifs des effluents dans une station d'épuration

La **partie I** étudie le principe de débitmètres adaptés aux conditions particulières des stations d'épuration et est complètement indépendante des parties suivantes. Les parties II et III s'intéressent à des procédés physiques de purification des eaux usées et sont largement indépendantes entre elles.

*Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.*

Dans tout le problème, l'eau sera assimilée à un fluide incompressible.

Définition :

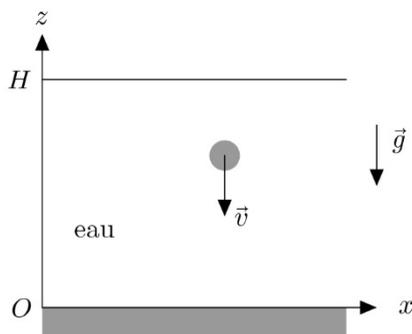
- Le nombre de Reynolds pour une sphère est défini par :

$$R_e = 2r \cdot \frac{V}{\nu} \text{ où } \begin{cases} r = \text{rayon de la sphère} \\ V = \text{vitesse de la sphère} \\ \nu = \frac{\eta}{\rho_e} \text{ viscosité cinématique du fluide où circule la sphère} \end{cases}$$

## II Dessablage - Déshuilage

On étudie dans cette partie la sédimentation ou la remontée à la surface de particules dans le bac de pré-traitement des eaux usées (*dessablage - déshuilage*), l'effluent ayant déjà traversé à l'entrée de la station d'épuration une grille qui retient les déchets solides les plus volumineux (*dégrillage*).

On modélise l'une de ces particules par une sphère homogène de masse volumique  $\rho_s$  et de rayon  $r$ . On note  $d = \rho_s/\rho_e$  sa densité, où  $\rho_e$  est la masse volumique de l'eau. La vitesse de la bille sphérique est  $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$ .



**Figure 7** Particule sphérique plongée dans l'eau

**II.A** – On suppose que la force de traînée  $\vec{F}_t$  s'écrit sous la forme d'une force de Stokes :

$$\vec{F}_t = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique de l'eau.

**II.A.1)** Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la bille dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen.

**II.A.2)** Déterminer la vitesse limite de chute  $v_\ell$  de la bille en fonction de  $r$ ,  $d$ ,  $g$  et  $\nu = \eta/\rho_e$ , viscosité cinématique de l'eau. À quelle condition y aura-t-il sédimentation, ou remontée en surface ?

**II.B** – Pour les différentes particules proposées dans le tableau 1, calculer la vitesse limite  $v_\ell$  et le temps  $t_c$  nécessaire pour parcourir une hauteur  $H = 2$  m, en supposant que la vitesse limite est immédiatement atteinte. On prendra  $\nu = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $d = 2,65$  (densité du quartz) et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

	Sable grossier	Sable fin	Limon	Argile	Colloïde
Rayon $r$	1 mm	100 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}$	1 $\mu\text{m}$	0,1 $\mu\text{m}$

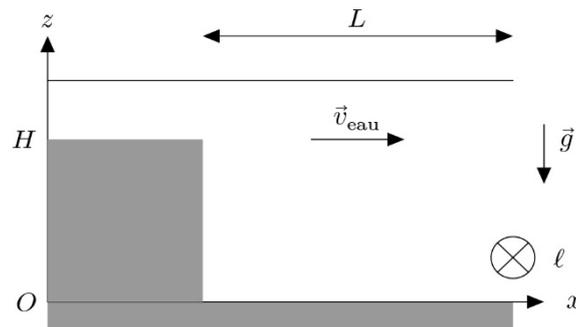
**Tableau 1** Taille typique de différentes particules

**II.C** – Exprimer le nombre de Reynolds  $Re$  caractéristique de l'écoulement autour de la bille en fonction des paramètres introduits. Sachant que l'expression de la force de traînée introduite en II.A peut être utilisée pour  $Re \leq 5$ , commenter les résultats de la question précédente.

**II.D** – Le temps de chute  $t_c$  des particules ne peut dépasser 2 heures, afin d'éviter la remontée de sédiments provoquée par la sédimentation des boues. En déduire la taille minimale  $r_{\min}$  des particules solides éliminées dans le dessableur.

### II.E – Dimensionnement du dessableur

Le débit à traiter est  $Q = 20 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ , soit environ  $1700 \text{ m}^3$  par jour. Le dessableur longitudinal est un bac de profondeur  $H = 2,0 \text{ m}$ , de longueur  $L$  et de largeur  $\ell = L/6$ . Les eaux usées traversent le bac dessableur avec une vitesse  $\vec{v}_{\text{eau}} = v_{\text{eau}} \vec{u}_x$ .

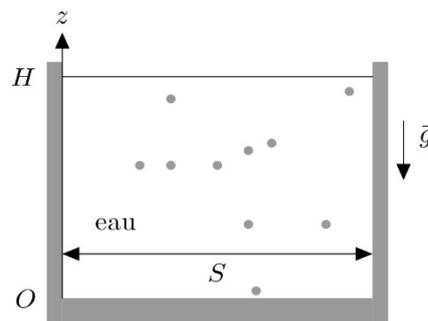
**Figure 8** Vue de profil d'un bac dessableur

**II.E.1)** Quelle est la forme de la trajectoire des particules solides dans le référentiel du sol ? Estimer, en régime permanent, le temps  $\Delta t$  mis par l'eau, support des particules, pour traverser le dessableur.

**II.E.2)** Quelle relation doit exister entre  $t_c(r_{\min})$  et  $\Delta t$  pour que toutes les particules de rayon supérieur à  $r_{\min}$  sédimentent ? Déterminer numériquement la longueur minimale  $L_{\min}$  du bac dessableur.

## III Décantation des boues résiduelles

Cette partie s'intéresse à la modélisation des processus de sédimentation au sein du décanteur primaire, sous l'action du champ de pesanteur uniforme  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ . L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon  $r \leq 1 \mu\text{m}$  et de densité  $d$ . On note  $n^*(z, t)$  la densité volumique de particules, exprimée en particules·m<sup>-3</sup>.

**Figure 9** Particules en suspension dans un bac décanteur

### III.A – Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur  $H = 2 \text{ m}$  et de section  $S$ .

**III.A.1)** On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules  $n^*$  au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

a) La diffusion de particules se traduit par l'existence d'un flux de particules  $\vec{j}_D$ . De la même façon que la diffusion thermique dans un milieu se traduit par un flux thermique  $\vec{j}_Q$  proportionnel et opposé au gradient de température  $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$  (loi de Fourier), la diffusion de particules se traduit par un flux de particules

proportionnel et opposé au gradient de concentration, soit ici  $\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^*$ . La constante  $D$  est le coefficient de diffusion des particules sphériques dans l'eau.

Exprimer  $\vec{j}_D$  en fonction de  $D$ ,  $\frac{\partial n^*}{\partial z}$  et d'un vecteur unitaire.

b) En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à la vitesse  $v_\ell$ . Déterminer l'expression du flux de particules  $\vec{j}_C$  associé à la convection, en fonction de  $n^*(z, t)$  et  $v_\ell$ . En déduire le flux total de particules  $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_C$ .

c) Montrer que l'évolution de  $n^*(z, t)$  est régie par l'équation de Mason-Weaver :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}$$

**III.A.2)** On cherche le profil de concentration  $n_\infty^*(z)$  en régime stationnaire.

a) Donner la forme de la solution générale pour  $n_\infty^*(z)$ , en introduisant une longueur caractéristique  $\lambda$ . Écrire la condition limite pour le flux total  $\vec{j}$  en  $z = 0$ , et en déduire la nouvelle forme de  $n_\infty^*(z)$ , que l'on exprimera en fonction de  $n_0^* = n_\infty^*(z = 0)$ ,  $\lambda$  et  $z$ .

b) La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion  $D$  au coefficient de frottement de la force de Stokes :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

Montrer que la répartition des particules  $n_\infty^*(z)$  peut s'interpréter à l'aide du facteur statistique de Boltzmann, qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique,  $n_\infty^*(z)$  est proportionnelle au facteur  $\exp\left(-\frac{e_p}{k_B T}\right)$ ,  $e_p$  étant l'énergie potentielle associée à une particule et  $k_B$  la constante de Boltzmann.

On pourra utiliser le résultat de la question II.A.

c) Pour  $T = 300$  K, estimer numériquement  $\lambda$  pour  $r = 1$   $\mu\text{m}$ ,  $r = 0,1$   $\mu\text{m}$  et  $r = 0,01$   $\mu\text{m}$ . Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

### III.B – Sédimentation d'une suspension concentrée

On néglige les effets diffusifs. À concentration élevée, la vitesse de sédimentation  $v_\ell$  décroît avec la densité volumique de la boue. Ce phénomène est décrit par la loi empirique de Richardson-Zaki :  $v_\ell(x) = v_0(1-x)^n$  où  $x$  est la fraction volumique en particules solides dans la boue,  $v_0$  une constante et  $n \simeq 5,1$ .

#### III.B.1)

a) Relier  $x(z, t)$  à la densité volumique en particules solides  $n^*(z, t)$  et au volume  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  d'une particule solide. Tracer l'allure de la courbe  $v_\ell = f(n^*)$ .

b) Que représente la constante  $v_0$  ? Quelle est la conséquence pour le mouvement macroscopique de l'eau de la chute d'un grand nombre de sédiments ? Expliquer alors qualitativement pourquoi  $v_\ell$  décroît lorsque la concentration en particules augmente.

**III.B.2)** On note le flux de particules  $\vec{j}$  (qui s'assimile au flux convectif  $\vec{j}_C$  déterminé à la question III.A.1). Les particules se déplaçant uniquement vers le bas, on note  $\vec{j} = -j(z, t)\vec{u}_z$ .

Déterminer  $j(z, t)$  en fonction de  $v_0$ ,  $V$ ,  $n$  et  $n^*(z, t)$ .

En vous aidant de la courbe de la figure 10, déterminer la valeur maximale  $j_{\text{max}}$  du flux de particules, en fonction de  $v_0$  et  $V$ .

Que représente la pente du segment  $OM$  ?

**III.B.3)** Une suspension initialement homogène de densité volumique  $n_0^*$  laissée à décanter présente rapidement trois zones distinctes : une zone transparente (1) en haut du décanteur, une zone opaque (3) en bas, et une zone trouble (2) qui les sépare (voir figure 11).

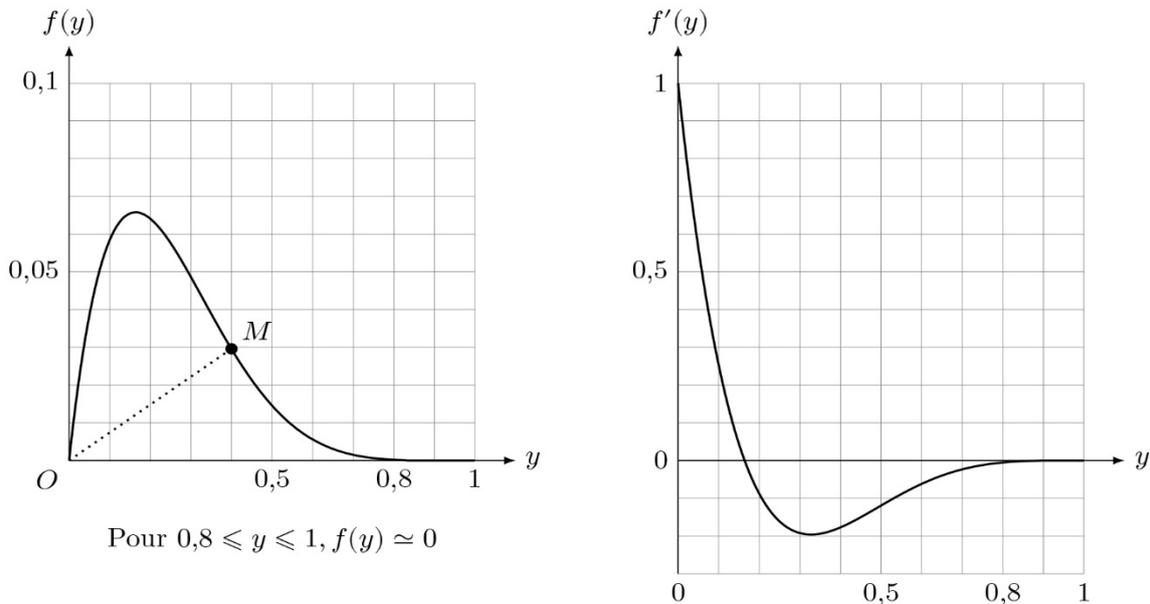
a) En vous aidant de la figure 10, déterminer la valeur de  $n^*$  dans chacune de ces trois zones.

b) Par un bilan de particules entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , montrer que la vitesse de déplacement  $\vec{v}_F$  d'une frontière séparant deux zones de densités volumiques de particules respectives  $n_-^*$  et  $n_+^*$  (voir figure 11) s'écrit :

$$\vec{v}_F = -\frac{j(n_+^*) - j(n_-^*)}{n_+^* - n_-^*} \vec{u}_z$$

c) La frontière entre (1) et (2) se déplace à une vitesse  $\vec{v}_{12}$ . Déterminer  $\vec{v}_{12}$  pour une fraction volumique  $x = 10\%$  en sédiments, en fonction de  $v_0$ .

d) La frontière entre (2) et (3) se déplace à une vitesse  $\vec{v}_{23}$ . Déterminer  $\vec{v}_{23}$  en fonction de  $v_0$ .



**Figure 10** Tracé de la fonction  $f(y) = y(1 - y)^{5,1}$  et de sa dérivée



**Figure 11** Décantation d'une suspension

**III.B.4)** On cherche à comprendre pourquoi de tels fronts de variation brusque de la concentration apparaissent quel que soit le profil initial de la concentration dans le décanteur.

a) On note  $\vec{v}_{\text{iso}} = v_{\text{iso}} \vec{u}_z$  la vitesse de déplacement d'une surface horizontale de densité volumique  $n^*$  fixée. Relier  $v_{\text{iso}}$  à  $\frac{dj}{dn^*}$ , puis tracer l'allure de  $v_{\text{iso}}(n^*)$ .

b) En déduire comment, à partir d'une suspension où la fraction volumique varie linéairement de 0 en surface à 0,80 au fond du décanteur, un front où la concentration varie brutalement peut se former dans le décanteur. On pourra représenter l'allure de l'évolution de  $n^*(z, t)$  au cours du temps.

### Données numériques

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Accélération du champ de pesanteur terrestre

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Masse volumique de l'eau

$$\rho_e = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Partie B – Rédiger CN3 / Boulet de Mersenne dans votre DM