

## Physique : DM3

## Partie A - Traitement des eaux usées (Centrale PC 2015)

II) Dessaillage - déshuilage

II.A.1) Bilan des forces : - poids :  $\vec{P} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_s \vec{g} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot d \rho_c \cdot \vec{g}$

- poussée d'Archimède :  $\vec{\Pi}_A = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c \cdot \vec{g}$ .

- force de traînée :  $\vec{F}_t = -6\pi\eta r \vec{v}$

dans le référentiel galiléen lié au fluide au repos ( $R_g$ )

II.A.2) PFD appliqué à m dans  $R_g$  :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} (d \rho_c - \rho_c) - 6\pi\eta r \vec{v}$$

lorsque  $\vec{v} = v_e \vec{e}$  alors  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} (d-1) \rho_c = 6\pi\eta r v_e \vec{e}$$

$$\Rightarrow v_e = \frac{2}{9} r^2 (d-1) \rho_c \cdot \vec{g} / \eta$$

D'où en même :  $v_e = \frac{2}{9} (d-1) \rho_c r^2 g / \eta$

$$\Rightarrow \underline{v_e = \frac{2(d-1)}{9\nu} r^2 g} \quad \text{où } \nu = \eta / \rho_c$$

II.B On néglige le régime laminaire d'où  $t_c = \frac{H}{v_c}$

$$\Leftrightarrow t_c = \frac{gHr}{2(d-1)r^2g}$$

	Sable grossier	Sable fin	Limn	Argile	Colloïde
rayon r	1mm	100 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}$	1 $\mu\text{m}$	0,1 $\mu\text{m}$
$ v_c $ (ms <sup>-1</sup> )	3,6	3,6 $\cdot 10^{-2}$	3,6 $\cdot 10^{-4}$	3,6 $\cdot 10^{-6}$	3,6 $\cdot 10^{-8}$
$t_c$ (s)	5,6 $\cdot 10^{-1}$	5,6 $\cdot 10^1$	5,6 $\cdot 10^3$	5,6 $\cdot 10^5$	5,6 $\cdot 10^7$

II.C de nombre de Reynolds est t.q:  $Re = 2r \cdot \frac{V}{\nu}$

$$\Leftrightarrow Re = 2r \frac{v_c}{\nu}$$

$$\Leftrightarrow Re = 2r \cdot \frac{2(d-1)r^2g}{g r^2}$$

$$\Leftrightarrow Re = \frac{4}{g} (d-1) r^3 g / r^2$$

$$\text{D'où pour } Re=5 \text{ on obtient } r_c = \left( \frac{45}{4} \cdot \frac{r^2}{(d-1)g} \right)^{1/3} = 88 \mu\text{m}$$

Au delà de ce rayon l'expression de la force de traînée n'est plus valable c'ad pour le sable fin et grossier.

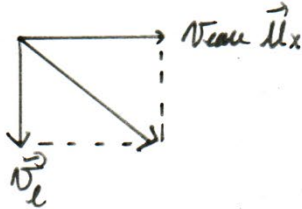
II.D Il faut donc que  $t_c < t_e \Leftrightarrow \frac{gHr}{2(d-1)r^2g} < t_e$

$$\Leftrightarrow r > \sqrt{\frac{gHr}{2(d-1)g t_e}} = 8,8 \mu\text{m}$$

$r_{\text{min}}$

II.E.1) En régime permanent, les particules ont une vitesse horizontale à celle de l'écoulement. L'étude précédente reste valable mais dans le référentiel lié à l'écoulement qui est lui aussi galiléen:

$$\vec{v}_{\text{particules/sol}} = v_e \vec{e}_x + v_{\text{eau}} \cdot \vec{u}_x$$



des trajectoires sont des droites obliques

Calculons  $v_{\text{eau}}$ : Soit  $Q = vS$   
 $= v_{\text{eau}} \cdot Hl \Leftrightarrow v_{\text{eau}} = \frac{Q}{Hl} = \frac{Q}{Hl/6}$

$$\text{Or } \Delta t = \frac{L}{v_{\text{eau}}} = \frac{L^2 H}{6Q}$$

II.E.2) Les résultats restent valables dans le référentiel mobile, il faut donc pour que les particules sédimentent que :  $\Delta t > t_c$  (1 min)

$$\Rightarrow \frac{L_{\text{min}}^2 H}{6Q} = t_c$$

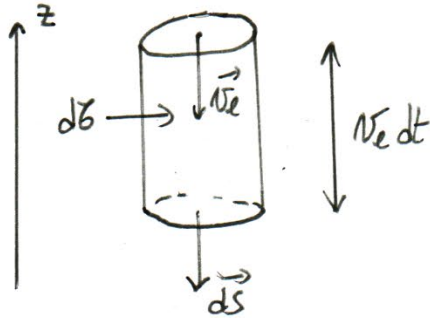
$$\Rightarrow L_{\text{min}} = \sqrt{\frac{6Q t_c}{H}} = \underline{21 \text{ m}}$$

### III) Décantation des boues résiduelles

III.A.1.a) D'après l'énoncé :  $\vec{j}_0 = -D \text{grad } m^*(z, t)$

$$\Rightarrow \vec{j}_0 = -D \frac{\partial m^*}{\partial z} \vec{u}_z$$

III.A.1.b)



des particules qui traversent et pendant dt sont contenues dans dG d'où :

$$dN = m^* dG = m^* v_e dS dt.$$

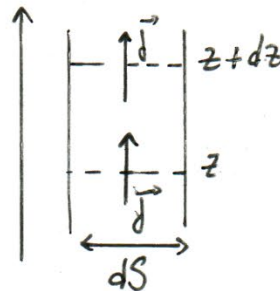
$$\text{Or } \frac{dN}{dt} = \vec{j}_c \cdot \vec{dS} \text{ avec } \vec{dS} = -dS \vec{u}_z$$

$$\text{D'où : } \vec{j}_c = -m^* v_e \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_c = \left[ -m^* v_e - D \frac{\partial m^*}{\partial z} \right] \vec{u}_z$$

III.A.1.c) Bilan de particules sur dG :

$$\begin{aligned} dN &= SN(t+dt) - SN(t) \\ &= [m^*(t+dt) - m^*(t)] dS \cdot dz \\ &= \frac{\partial m^*}{\partial t} \cdot dt \cdot dG. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} SN_e &= [-\phi(z+dz) + \phi(z)] dt \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} dz \cdot dt \\ &= -\frac{\partial j}{\partial z} \cdot dS dz dt \end{aligned}$$

$$\text{Or } dN = SN_e \Rightarrow \frac{\partial m^*}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z}$$

$$\text{or } \vec{j} = \left[ -m^* v_e - D \frac{\partial m^*}{\partial z} \right] \vec{u}_z \Rightarrow \frac{\partial m^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 m^*}{\partial z^2} + v_e \cdot \frac{\partial m^*}{\partial z} \quad \text{Pason. Weava}$$

(MW)



III.A.2.a) En régime stationnaire  $(\partial/\partial t) = 0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^2 m^*}{\partial z^2} + N_e \cdot \frac{\partial m^*}{\partial z} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial m^*}{\partial z} + \frac{N_e}{D} m^* &= B \\ \Rightarrow m_{\infty}^*(z) &= A e^{-z/\lambda} + \frac{DB}{N_e} \quad \text{où } \lambda = D/N_e \end{aligned}$$

En  $z=0$  on a une paroi d'où  $f(z=0) = 0$  avec  $m_{\infty}^*(z=0) = m_0^*$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0^* = A + DB/N_e = A + dB \\ -m^*(z=0) N_e - D \frac{\partial m^*}{\partial z}(z=0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0^* = A + dB \\ \left(-A + \frac{DB}{N_e}\right) N_e + \frac{DA}{\lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0^* = A + dB \\ DB = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0^* = A \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{d'où : } \underline{m_{\infty}^*(z) = m_0^* e^{-z/\lambda} \quad \text{où } \lambda = D/N_e}$$

III.A.2.b) Relation d'Einstein :  $D = k_B T / 6\pi\eta r$  et  $N_e = \frac{2(d-1)\rho_e r^2 g}{g_m}$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{D}{N_e} = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \cdot \frac{g_m}{2(d-1)\rho_e r^2 g}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3k_B T}{4\pi(d-1)\rho_e r^3 g}$$

$$\text{Donc } m_{\infty}^*(z) = m_0^* e^{-\left[ \frac{z \cdot 4\pi(d-1)\rho_e r^3 g}{3k_B T} \right]}$$

$$= m_0^* e^{-\left[ \frac{4\pi r^3 \rho_e g (d-1) z}{3k_B T} \right]}$$

$$= m_0^* e^{-\Delta m \cdot g \cdot z / k_B T} \quad \text{où } \Delta m = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_s - \rho_e) g.$$

On reconnaît l'expression de l'énergie potentielle du poids apparent ( $\vec{P} + \vec{\Pi}_A$ ) telle que :

$$m_{\infty}^*(z) = m_0^* e^{-e_p(z)/k_B T} \quad \text{où } e_p(z) = \Delta m g z$$

III.A.2.c) Calculons à t.g :  $\lambda = \frac{3 k_B T}{4 \pi (d-1) e \cdot r^3 g}$  avec  $T = 300 \text{ K}$  et  $d = 2,65$

r	1 $\mu\text{m}$	0,1 $\mu\text{m}$	0,01 $\mu\text{m}$
$\lambda$	61 mm	61 $\mu\text{m}$	61 nm

Sans diffusion, les particules toucheraient toutes le fond du récipient et auraient une altitude égale à r. La diffusion doit donc être prise en compte si  $\lambda > r$

ce'd pour :  $r = 0,1 \mu\text{m}$  et  $0,01 \mu\text{m}$  ce qui correspond aux colloïdes.

III.B.1.a) D'après Richardson-Zaki :  $N_e(x) = N_0 (1-x)^n$  où  $x = \frac{dG_{\text{particules}}}{dG_{\text{total}}}$

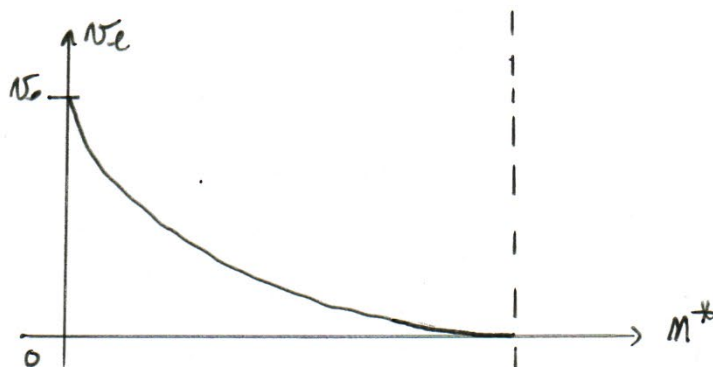
Or, dans  $dG$ , il y a  $S N$  particules :  $S N = m^* dG$

Chaque particule a un volume propre :  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$\Rightarrow dG_{\text{particules}} : m^* dG \times V$$

$$\Rightarrow x = m^* V \quad \text{où } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{D'où } N_e(x) = N_0 (1 - m^* V)^{5,1 \leftarrow n}$$



III.B.1.b).  $v_0$  représente la vitesse limite atteinte par les particules dans le cas limite d'une dilution infinie ( $m^* = 0$ ).

. Si l'eau est en mouvement vers le haut, elle freine la sédimentation.

. Si  $m^*$  devient trop grand,  $v_0$  devient faible et on risque de voir les sédiments remonter.

III.B.2). On a vu que  $\vec{f}_c = -m^* N_e \vec{u}_z$   
 $\Rightarrow \vec{f} = -m^* v_0 (1 - m^* v)^n \vec{u}_z$  (on néglige la diffusion dans cette partie).

$$\text{Or } m^* = \frac{\alpha}{V} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{v_0 \alpha}{V} (1 - \alpha)^n \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\frac{v_0}{V} f(\alpha) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow f_{\max} = \frac{v_0}{V} f_{\max}$$

$$\Rightarrow \underline{f_{\max} = 0,065 \frac{v_0}{V}}$$

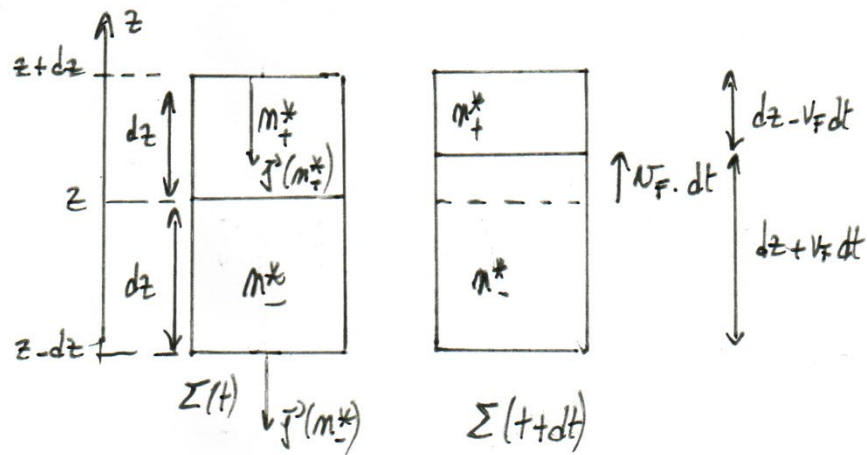
. la pente de  $\ln$  est égale à :  $\text{pente} = \frac{f(y)}{y} = (1-y)^{5,1}$   
 $\Leftrightarrow \underline{\text{pente} = \frac{v_0 e}{v_0}}$

III.B.3.a) Par la sédimentation, il y a accumulation de particules au fond du récipient, et il y a un défaut à proximité de la surface. On peut donc en déduire :

$$\begin{array}{l} * m^* = 0 \text{ dans la zone (1)} \\ * \alpha^* = \alpha_0^* \text{ — " (2)} \\ * m^* = 0,8/V \text{ — " (3)} \end{array} \parallel$$

En effet le flux de particules devient nul à la concentration  $\alpha = 0,8 \Rightarrow m^* = 0,8/V$

III.B.3.b) Représentons l'interface à  $t$  et à  $t+dt$ :



Paire de particules sur le volume de hauteur  $2dz$ :

$$N(t) = (m_+^* + m_-^*) dS dz$$

$$N(t+dt) = \left[ m_+^* (dz - v_F dt) + m_-^* (dz + v_F dt) \right] dS$$

$$\text{D'où } dN = v_F dt [m_-^* - m_+^*] dS$$

$$\text{Or } dN = [\Phi_{entrant}(z+dz) - \Phi_{sortant}(z)] dt$$

$$= [(j_+ S) - (j_- S)] dt$$

$$= [j_+ - j_-] S dt$$

$$\text{D'où } v_F dt [m_-^* - m_+^*] dS = [j_+ - j_-] S dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}_F = \frac{j(m_+^*) - j(m_-^*)}{m_-^* - m_+^*} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{v}_F = - \frac{j(m_+^*) - j(m_-^*)}{m_+^* - m_-^*} \vec{u}_z$$



III.b.3.c) D'après la question précédente:  $\vec{N}_{12} = -N_{12} \vec{u}_z$   
 avec  $N_{12} = - \frac{j(m_2^*) - j(m_1^*)}{m_1^* - m_2^*}$

Or  $m_1^* = 0$  et  $j(m_1^*) = 0$  car la zone 1 est vide de particules.

. Dans la zone 2,  $m_2^* = \alpha/V$  et  $j(m_2^*) = -N_0 m_2^* (1-\alpha)^n$   
 $\Rightarrow N_{12} = \frac{-N_0 m_2^* (1-\alpha)^n}{-m_2^*}$

$\Rightarrow \vec{N}_{12} = -N_0 (1-\alpha)^n \vec{u}_z$

Si  $\alpha = 0,1$  d'après la figure 10 on a  $f(\alpha) = 0,058$  d'où

$\vec{N}_{12} = -0,058 N_0 \vec{u}_z$

III.b.3.d) De même:  $\vec{N}_{23} = +N_{23} \vec{u}_z$  avec  $N_{23} = - \frac{j(m_3^*) - j(m_2^*)}{m_2^* - m_3^*}$

or  $j(m_3^*) = 0$  et  $m_3^* = 0,8/V$  d'où:  $N_{23} = - \frac{(1-\alpha)^n (-N_0) m_2^*}{(\alpha - 0,8)/V}$

$\Rightarrow N_{23} = + \frac{0,058 N_0 \times 0,1}{0,7}$

$\Rightarrow \vec{N}_{23} = +0,083 N_0 \vec{u}_z$

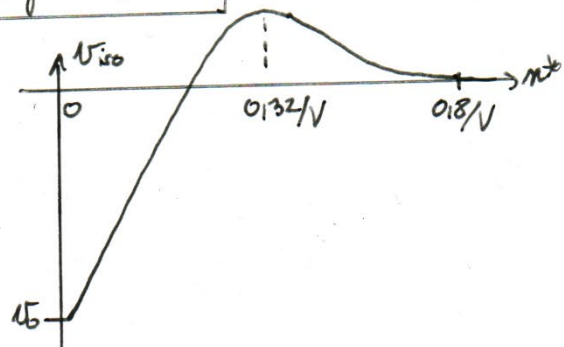
III.b.4.a) On a vu que  $\vec{v}_F = - \frac{j(m_+^*) - j(m_-^*)}{m_+^* - m_-^*}$

Si on passe à la limite:  $\vec{v}_{iso} = - \frac{\partial j}{\partial m^*} \vec{u}_z$

Or  $j = +N_0 m^* (1-m^*V)^n = + \frac{N_0}{V} \cdot m^* V (1-m^*V)^n = + \frac{N_0}{V} f(m^*V)$

$\Rightarrow \vec{v}_{iso} = -N_0 f'(m^*V) \vec{u}_z$

D'où l'allure d'après la figure 10:



III.B.4.b) Considérons deux cas :

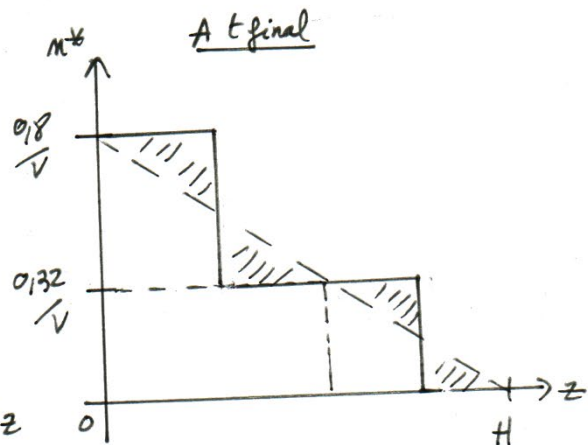
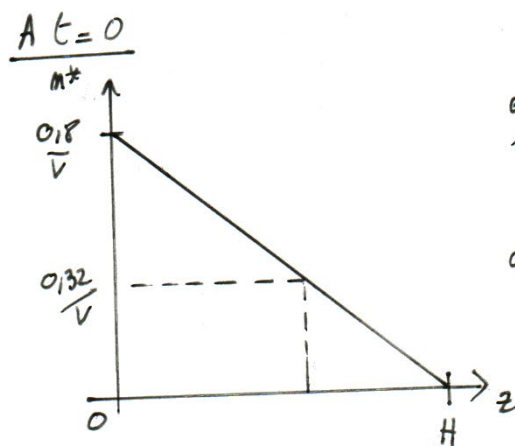
\* Si  $z(A) > z(B)$  avec  $m^*(A) < m^*(B) < 0,32/V$ .

alors  $N_{iso}(A) < N_{iso}(B)$  ce qui veut dire que la surface A se propage plus rapidement que la surface B. Ces deux surfaces sont amenées à fusionner pour former un front. Par conséquent toutes surfaces séparant des concentrations plus petites que  $0,32/V$  vont se rattraper pour former un front séparant deux zones :

- une de concentration nulle
- une de concentration  $0,32/V$ .

\* Si  $z(A') > z(B')$  avec  $m^*(B') > m^*(A') > 0,32/V$ .

alors  $N_{iso}(A') > N_{iso}(B')$  ce qui veut dire qu'au fond du récipient, plus la concentration d'une zone est différente de la concentration maximale  $0,8/V$ , plus cette zone s'éloigne du fond ce qui crée une zone homogène autour de  $0,8/V$ .



## Partie B – Le boulet de Mersenne (CN3 – PC Joffre)

Q1) PFD appliqué dans le référentiel terrestre :

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{f}_{ic} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = m\vec{g} - 2m \begin{pmatrix} -\Omega \cos(\lambda) \\ 0 \\ +\Omega \sin(\lambda) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 2m\Omega\dot{y} \sin(\lambda) \\ m\ddot{y} = -2m\Omega\dot{x} \sin(\lambda) - 2m\Omega\dot{z} \cos(\lambda) \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\Omega\dot{y} \cos(\lambda) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y} \sin(\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x} \sin(\lambda) - 2\Omega\dot{z} \cos(\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{y} \cos(\lambda) \end{cases}$$

Q2) Dans un référentiel galiléen :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow t_f = \frac{2v_0}{g} = 20,4s$$

Q3) Soit le système d'équation :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y} \sin(\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x} \sin(\lambda) - 2\Omega\dot{z} \cos(\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{y} \cos(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} = -2\Omega\ddot{x} \sin(\lambda) - 2\Omega\dot{z} \cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} = -4\Omega^2 \frac{dy}{dt} \sin^2(\lambda) - 4\Omega^2 \frac{dy}{dt} \cos^2(\lambda) + 2\Omega g \cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} + 4\Omega^2 \frac{dy}{dt} = +2\Omega g \cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v_y}{dt^2} + 4\Omega^2 v_y = +2\Omega g \cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow v_y(t) = A \cos(2\Omega t) + B \sin(2\Omega t) + \frac{g \cos(\lambda)}{2\Omega} \text{ où } \begin{cases} v_y(0) = 0 \\ a_y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{g \cos(\lambda)}{2\Omega} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_y(t) = \frac{g \cos(\lambda)}{2\Omega} (1 - \cos(2\Omega t))$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{g \cos(\lambda)}{4\Omega^2} \sin(2\Omega t) + \frac{g t \cos(\lambda)}{2\Omega} + C \text{ avec } C = 0 \text{ car } y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{g \cos(\lambda)}{2\Omega} \left( t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega} \right)$$

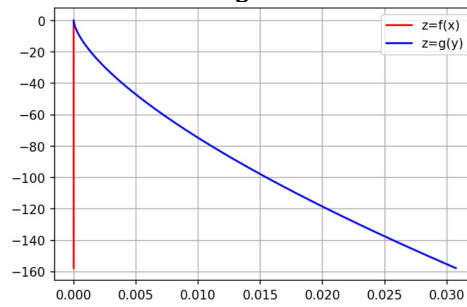
Or :

$$\Omega t \ll 1 \Rightarrow \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega} = t - \frac{4\Omega^2 t^3}{6} = t - \frac{2\Omega^2 t^3}{3}$$

$$\Rightarrow y(t) \simeq \frac{g\Omega t^3 \cos(\lambda)}{3}$$

Si on suppose que le temps de chute est équivalent à celui dans un référentiel galiléen :  $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5,67s$

$$\Rightarrow y(t_f) \approx \frac{g\Omega t^3 \cos(\lambda)}{3} = +3,07cm$$



On retrouve bien, le même résultat que sur la simulation.

Q4) Cela reste la déviation vers l'est dans le cas d'une chute car  $\cos(\lambda)$  ne change pas de signe.