

# Physique : DM10

## Partie A – L'atome le plus simple de l'univers

Dans ce sujet, on propose d'étudier quelques étapes clés de l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Le problème est constitué de 7 parties, quasiment indépendantes, même s'il y a un fil conducteur entre elles. Il est conseillé au candidat de faire une première lecture rapide du sujet afin d'en retirer une vue d'ensemble. Les paragraphes rédigés en italique donnent des explications permettant de situer chaque partie dans son contexte scientifique historique, avec leurs hypothèses d'étude.

Les constantes fondamentales intervenant dans le problème sont rappelées ci-dessous avec leurs valeurs numériques données avec 5 chiffres significatifs :

- charge élémentaire :  $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$  C
- charge de l'électron :  $-e$
- charge du proton :  $+e$
- masse de l'électron :  $m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31}$  kg
- masse du proton :  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$  kg
- rayon de Bohr :  $a_B = 5,2919 \cdot 10^{-11}$  m
- vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 2,9979 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>
- perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>
- permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,8542 \cdot 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>
- constante de Planck :  $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$  J.s
- constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  J.s
- constante énergétique de Rydberg :  $R_y = \frac{m_e}{2\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,1799 \cdot 10^{-18}$  J
- l'électron-volt, unité d'énergie :  $1 \text{ eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19}$  J

On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  et l'expression de deux intégrales et leur valeur :

– pour tout réel  $r_0 > 0$  :  $\int_0^{\infty} r \exp(-r/r_0) dr = r_0^2$

–  $\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ .

Même si elles ne sont pas systématiquement rappelées dans l'énoncé, le candidat utilisera à son initiative dans cette liste toute constante qu'il jugera nécessaire pour répondre aux questions posées.

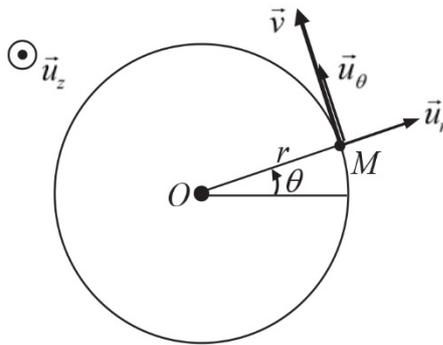
**Les applications numériques demandées seront réalisées avec 4 chiffres significatifs pour les questions Q1 à Q17, puis avec 3 chiffres significatifs à partir de la question Q18.**

## Partie I – Modèle historique de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)

Dans le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron (vu comme ponctuel en  $M$ ) tourne autour de son proton (lui aussi ponctuel et supposé immobile en  $O$ ) en décrivant une orbite circulaire de rayon  $r = OM$  (**figure 1**). On note  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire normal au plan de l'orbite.

L'électron est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme indiqué sur la **figure 1** et  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est la base locale correspondante.

On néglige l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton.



**Figure 1** – Trajectoire circulaire de l'électron autour du proton supposé immobile

- Q1.** Rappeler l'expression de la force électrique exercée par le proton sur l'électron.
- Q2.** Par l'application du théorème de la quantité de mouvement, déduire la norme  $v$  de la vitesse de l'électron en fonction entre autres du rayon  $r$  de l'orbite.
- Q3.** Rappeler l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  de l'électron. Montrer que l'énergie cinétique  $E_c$  de l'électron vérifie :  $E_c = -E_p/2$ .
- Q4.** Exprimer la norme  $L$  du moment cinétique en  $O$  de l'électron en fonction de  $r$ ,  $m_e$ ,  $e$ , et  $\epsilon_0$ .

*En 1913, Bohr a postulé que  $L$  est un multiple entier de  $\hbar$  en posant  $L = n\hbar$ , où  $n$  est un entier naturel strictement positif et où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Pour de tels états du modèle de Bohr, dits stationnaires, l'électron, en mouvement circulaire uniforme, bien qu'accélééré, ne rayonne pas d'énergie.*

- Q5.** De l'égalité  $L = n\hbar$ , déduire que la relation de quantification du rayon  $r_n$  de l'orbite caractérisée par l'entier  $n$  s'écrit sous la forme  $r_n = a_B n^2$ , avec  $a_B$  le rayon de Bohr, qu'on exprimera en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $\epsilon_0$  et  $\hbar$ .
- Q6.** En déduire que l'énergie mécanique  $E_n$  de l'électron vaut  $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$ , avec  $R_y$  la constante énergétique de Rydberg.
- Q7.** Quelle est la signification du rayon de Bohr ?  
Donner la valeur de  $a_B$  en picomètres et celle de  $R_y$  en électron-volts.

**Q8.** Donner la vitesse  $v_n$  de l'électron sur l'orbite caractérisée par l'entier  $n$ . On l'exprimera en fonction de  $n$ ,  $R_y$  et  $m_e$ .

Donner la valeur numérique de  $v_1$ . Le mouvement de l'électron vous semble-t-il relativiste ? Justifier.

## Partie II – Une résolution simplifiée de l'atome de Bohr par l'équation de Schrödinger (1926)

On rappelle l'équation de Schrödinger pour une particule non relativiste de masse  $m$  décrite par la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t)$  dans un champ d'énergie potentielle  $E_p(\vec{r})$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + E_p(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

où  $\vec{r}$  désigne le vecteur position d'un point  $M$  quelconque de l'espace ( $M$  est repéré par ses coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, d'origine  $O$ ) et  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

**Q9.** On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie  $E$  de l'électron de l'atome d'hydrogène : on note  $\psi(\vec{r}, t) = \kappa(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$ .

Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps concernant la partie spatiale de la fonction d'onde  $\kappa(\vec{r})$  (On n'explicitera à ce stade ni la fonction énergie potentielle ni le Laplacien).

Afin de simplifier la résolution de l'équation obtenue en **Q9**, nous nous limiterons à considérer que l'électron n'est spatialement détectable qu'en un lieu de points formé de cercles dans le plan d'équation  $z = 0$ , concentriques au point  $O$  où se trouve le proton (supposé ponctuel) et avec des rayons de valeurs quantifiées. Les points  $M$  où est évaluée la fonction d'onde sont ainsi repérés par leurs coordonnées polaires  $(r = R, \theta)$ , d'axe  $Oz$ , avec  $r$  contraint à prendre des valeurs  $R$  discrètes (que l'on cherche à déterminer).  $\kappa(\vec{r})$  est alors une fonction continue de la variable  $\theta$  : on la notera  $\kappa(\theta)$ .

**Q10.** Expliciter la fonction énergie potentielle électrostatique de l'électron évoquée à la question **Q3** et pour laquelle on impose  $r = R$ .

**Q11.** Sachant que  $E_p = 2E$  (résultat déduit de **Q3**), montrer que  $\kappa(\theta)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{d^2 \kappa(\theta)}{d\theta^2} = E \kappa(\theta).$$

Résoudre cette équation pour les états liés de l'électron en posant  $\eta^2 = \frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}$ .

**Q12.** En remarquant que  $\kappa(\theta + 2\pi) = \kappa(\theta)$ , déterminer une relation de quantification des valeurs de  $R$ , puis des énergies  $E$ . Commenter ces résultats.

## Partie III – Spectre de raies de l'hydrogène

Cette partie n'est pas indépendante des précédentes.

On rappelle que l'émission de lumière par un atome est due aux transitions entre deux états stationnaires (stationnaires au sens de Bohr (**partie I**), ou, au choix, au sens de la mécanique quantique (**partie II**)).

**Q13.** Quelle est l'énergie du photon émis lors de la transition entre un état atomique d'énergie  $E_{sup}$  vers un état d'énergie plus faible  $E_{inf}$  ?

Montrer dans le cas de l'atome d'hydrogène que la longueur d'onde  $\lambda_{nn'}$  de la raie d'émission correspondant à la transition de l'état d'énergie  $E_n$  vers l'état d'énergie  $E_{n'}$  (avec  $n' < n$ ) vérifie

la relation de Ritz  $\frac{1}{\lambda_{nn'}} = R_H \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ . On explicitera la constante  $R_H$  en fonction de  $R_y$ ,  $h$

et  $c$ .

**Q14.** Calculer les valeurs numériques des longueurs d'onde des quatre premières raies d'émission de la série de Balmer prédites par la formule de Ritz, c'est-à-dire les raies correspondant aux transitions des états  $n = 3, 4, 5, 6$  vers l'état  $n' = 2$  (représentées et nommées dans la partie gauche de la **figure 2** de la **partie IV**, page 6).

Le **tableau 1** ci-dessous indique les valeurs expérimentales établies en 1885.

Recopiez ce tableau sur votre copie en le complétant par les valeurs numériques précédemment calculées.

Les intervalles d'incertitudes expérimentales englobent-ils les valeurs de Ritz ?

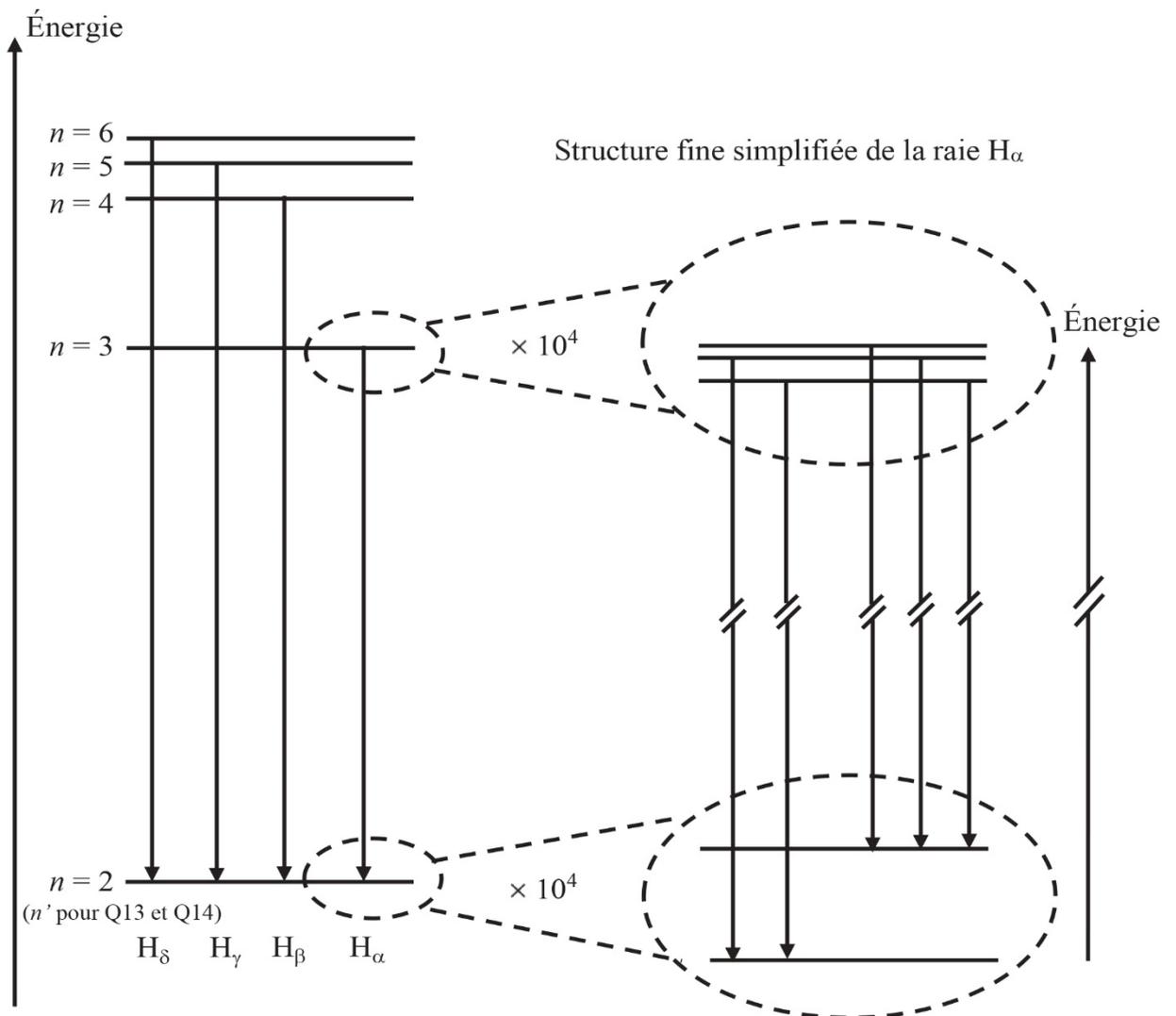
Nom de la raie	H $\alpha$	H $\beta$	H $\gamma$	H $\delta$
$\lambda_{\text{Ritz}}$				
$\lambda_{\text{exp}}$ (valeurs de 1885)	656,3 nm $\pm$ 0,3 nm	486,1 nm $\pm$ 0,2 nm	434,0 nm $\pm$ 0,2 nm	410,2 nm $\pm$ 0,2 nm

**Tableau 1** – Longueurs d'onde des premières raies de la série de Balmer

## Partie IV – Corrections relativistes de Sommerfeld (1916) : introduction de la constante de structure fine

Le modèle de Bohr fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène. Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie H $\alpha$  qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révélera être formée de raies plus nombreuses. Sur la partie droite de la **figure 2** (page 6) se trouve la carte actuelle simplifiée des niveaux d'énergie et des multiplets de raies qui composent la raie H $\alpha$  (noter le changement d'échelle: facteur de zoom  $\times 10^4$  par rapport au spectre de la série de Balmer à gauche).

La première explication théorique de ces multiplets a été fournie par Sommerfeld en 1916 grâce à un traitement relativiste amélioré du modèle de Bohr utilisant la constante  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ , nommée **constante de structure fine**.



**Figure 2** – Premières raies de la série de Balmer (à gauche) et structure fine (simplifiée) de la raie H $\alpha$  (à droite)

- Q15.** En explicitant  $R_y$  dans l'expression de  $\nu_n$  obtenue en **Q8**, donner  $\alpha$  en fonction de  $\nu_1$  et de  $c$ . En déduire la dimension de  $\alpha$ .
- Q16.** Donner la valeur numérique de  $\alpha$ , puis celle de son inverse  $1/\alpha$  (que l'on utilise bien plus volontiers).

Au terme de son calcul, Sommerfeld aboutit à l'expression des niveaux d'énergie  $E_{n,l}$  suivants, indicés par deux entiers ( $n, l$ ) avec  $n \geq 1$  et  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  :

$$E_{n,l} = -\frac{R_y}{n^2} \left( 1 + \alpha^2 \frac{1}{n^2} \left( \frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right) \text{ où } \alpha \text{ est la constante de structure fine introduite ci-dessus.}$$

Trois années auparavant, Bohr avait trouvé (question **Q6**) l'expression suivante à un seul indice

$$\text{entier : } E_n = -\frac{R_y}{n^2}.$$

- Q17.** Commenter la formule de Sommerfeld en liaison avec la formule de Bohr et la faible valeur de  $\alpha$ .  
Combien de sous-niveaux d'énergie ce calcul prévoit-il pour les niveaux  $n = 2$  et  $n = 3$  de la formule de Bohr ?
- Q18.** Ces sous-niveaux constituent la structure fine de la raie  $H\alpha$ . En reproduisant sur votre copie la partie droite de la **figure 2** (page 6), identifier chacun de ces niveaux d'énergie par leurs indices  $(n, l)$  respectifs.  
En déduire, en fonction de  $R_y$  et  $\alpha$ , l'expression de l'écart  $\Delta E_f = E_{2,1} - E_{2,0}$  entre les deux sous-niveaux  $n = 2$ .  
Calculer la valeur numérique de  $\Delta E_f$  en électron-volts.
- Q19.** On rappelle que le nombre d'onde  $\sigma$  d'une radiation est l'inverse de sa longueur d'onde. Exprimer en fonction de  $h$ ,  $c$ , et  $\Delta E_f$ , l'écart  $\Delta\sigma = \sigma_a - \sigma_b$  des nombres d'onde  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  des radiations émises lors des deux transitions (a) et (b) suivantes :  
(a) : obtenue par désexcitation depuis le niveau  $(n = 3, l = 1)$  vers le niveau  $(n = 2, l = 0)$   
(b) : obtenue par désexcitation depuis le niveau  $(n = 3, l = 1)$  vers le niveau  $(n = 2, l = 1)$ .  
Calculer  $\Delta\sigma$  en  $\text{cm}^{-1}$ , unité habituelle des spectroscopistes.

*Immédiatement après l'annonce du résultat négatif de leur expérience consacrée à confirmer l'existence de l'éther luminifère, Michelson et Morley mentionnèrent dans une publication l'observation de la raie  $H\alpha$  comme un doublet de nombre d'onde moyen  $\sigma_m = 15\,237,40 \text{ cm}^{-1}$  et d'écart spectral  $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$  (valeurs expérimentales de 1887).*

- Q20.** De quelle couleur est ce doublet ? Calculer son écart relatif en nombre d'onde  $\Delta\sigma_{\text{exp}}/\sigma_m$ .  
Comparer cet écart relatif à celui du doublet jaune du sodium ( $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$ ).

## PARTIE B – Radioactivité alpha

Le tunnel de Fréjus abrite le Laboratoire Souterrain de Modane (LSM), sous 1700 mètres de roche. Unité mixte du CNRS et du CEA, le LSM est en fonctionnement depuis 1982. Le LSM est un site scientifique exceptionnel protégé des rayons cosmiques, où ont lieu des recherches sur le neutrino, la matière noire ainsi que des mesures de faibles radioactivités et leurs applications aux études sur l'environnement et aux datations. Le LSM est entre autres spécialisé dans la spectrométrie  $\gamma$ . Le rayonnement  $\gamma$ , qui suit généralement une émission  $\alpha$  ou  $\beta$ , est issu du noyau de l'atome et correspond à une désexcitation de ce dernier. En effet, après une désintégration  $\alpha$  ou  $\beta$ , le nouveau noyau n'est pas toujours dans un état d'équilibre énergétique : il possède encore « un trop plein d'énergie », on dit qu'il est excité. Pour se débarrasser de cet excédent, il va émettre un ou plusieurs rayonnements  $\gamma$  d'énergie déterminée et caractéristique du noyau et donc de l'atome en présence. Nous allons dans cette partie nous intéresser plus particulièrement à la radioactivité  $\alpha$ .

### II.A. — Le quanton libre

- **18** — Une particule quantique (quanton) est localisée sur un axe  $(O, \hat{u}_x)$ . L'état quantique de cette particule est caractérisé par une fonction d'onde :  $\underline{\Psi}(x, t)$ . Rappeler le postulat de Born donnant la probabilité  $dP$  que la particule se trouve dans l'intervalle  $[x, x + dx]$  à l'instant  $t$ . En déduire la dimension de  $\underline{\Psi}(x, t)$ .
- **19** — Interpréter la propriété  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\Psi}(x, t)|^2 dx = 1$ .

▣ **20** — Quelle est la signification physique de  $\rho = |\underline{\Psi}(x,t)|^2$  ? En associant la probabilité de présence à un « courant de probabilité » donner sans démonstration l'équation de conservation de la probabilité de présence. On fera apparaître un vecteur  $\vec{j}$  appelé vecteur densité de courant de probabilité. Une analyse non demandée montre que dans le cas mono-dimensionnel

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \underline{\Psi} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} - \bar{\Psi} \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial x} \right) \hat{u}_x \quad (1)$$

Lorsque la particule possède une énergie potentielle  $V(x)$ , la fonction  $\underline{\Psi}(x,t)$  est solution de l'équation de Schrödinger non relativiste

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \underline{\Psi}(x,t) = i\hbar \frac{\partial \underline{\Psi}(x,t)}{\partial t}$$

avec  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

▣ **21** — Rappeler ce qu'on entend par particule non relativiste. On cherche des états d'énergie stationnaire  $\mathcal{E}$  de la forme  $\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\varphi}(x) \times \underline{f}(t)$ . Déterminer l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par  $\underline{\varphi}(x)$  et la forme générale de  $\underline{\Psi}(x,t)$  en fonction notamment de  $\underline{\varphi}(x)$  et  $\mathcal{E}$ . Que peut-on dire de la probabilité de présence  $dP$  ?

On définit une particule libre comme une particule de masse  $m$ , d'impulsion  $\vec{p}$  et d'énergie  $\mathcal{E} = \frac{\vec{p}^2}{2m} > 0$  évoluant dans une région d'énergie potentielle  $V(x)$  nulle.

▣ **22** — Déterminer la solution générale de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une particule libre. Montrer que sa fonction d'onde  $\underline{\Psi}(x,t)$  est la somme de deux ondes planes se propageant en sens inverse.

▣ **23** — Définir le vecteur d'onde  $\vec{k}$  que l'on peut associer à cette particule. Déterminer la relation entre  $\vec{p}$  et  $\vec{k}$ . Comment s'appelle cette relation ?

## II.B. — Effet tunnel

Le quanton d'énergie  $\mathcal{E}$  arrive d'une région **I** définie par  $x < 0$  et dans laquelle son énergie potentielle est  $V(x) = 0$ . Il est susceptible également de se trouver soit dans une région **II** telle que  $0 < x < a$  où règne une énergie potentielle  $V(x) = V_0$  ou bien dans une région **III** définie par  $x > a$ , dans laquelle  $V(x) = 0$ . On supposera que  $0 < \mathcal{E} < V_0$  et l'on cherche des états stationnaires d'énergie  $\mathcal{E}$ .

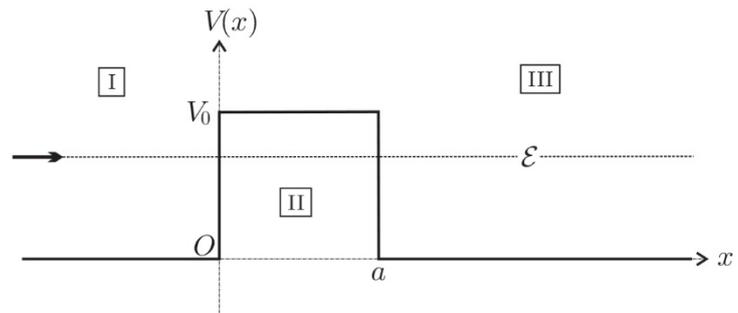


FIGURE 4 – Marche d'énergie potentielle

▣ **24** — Rappeler brièvement ce que serait le comportement de ce quanton s'il était régi par la mécanique classique.

▣ **25** — Déterminer la forme générale de la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans la région **I** et **III**. On ne cherchera pas à déterminer les 2 constantes d'intégration qui apparaissent dans la région **I** ni celle qui apparaît dans la région **III**.

▣ **26** — Déterminer la forme générale de la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans la région **II**. On posera  $q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}}$ . Cette solution fait apparaître 2 constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

□ 27 — Énoncer les propriétés générales de la fonction d'onde en  $x = 0$  et  $x = a$  permettant d'écrire un système de 4 équations dont les 5 inconnues sont les constantes d'intégration des questions 25 et 26. *On ne cherchera pas à résoudre ce système.* Quelle dernière hypothèse permet de définir complètement la fonction d'onde en tout point  $x$  ?

□ 28 — En utilisant l'équation (1) déterminer les courants de probabilité dans les régions I et III en fonction des constantes d'intégrations de la question 25. Comment peut-on interpréter ces deux courants ? En déduire les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  caractérisant cette barrière d'énergie potentielle en fonction de ces mêmes constantes.

Un calcul non demandé permet d'obtenir

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4\mathcal{E}(V_0 - \mathcal{E})} \text{sh}^2(qa)}$$

□ 29 — On considère que le quanton est un électron de masse  $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg et d'énergie  $\mathcal{E} = 1,00$  eV évoluant dans le potentiel décrit sur la figure 4 avec  $V_0 = 2,00$  eV. Dresser un tableau des valeurs de  $qa$  et  $T$  pour  $a = 0,50$  nm ; 1,00 nm et 2,00 nm. Définir ce que l'on appelle une barrière d'énergie potentielle épaisse et montrer que dans ce cas  $T \simeq T_0(\mathcal{E}, V_0) e^{-2qa}$  où l'on précisera l'expression de  $T_0(\mathcal{E}, V_0)$ . En étudiant les variations de  $T_0(\mathcal{E}, V_0)$  pour  $0 < \mathcal{E} < V_0$ , déduire que pour une barrière épaisse, l'on peut écrire  $\ln(T) \approx -2qa$ .

## II.C. — Radioactivité $\alpha$

La radioactivité  $\alpha$  est l'émission de noyaux d'hélium 4, appelés particules  $\alpha$ , par des noyaux atomiques lourds (généralement tels que  $Z > 82$ ), selon la réaction



dans laquelle  $A$  représente le nombre de nucléons (protons et neutrons) et  $Z$  le nombre de protons du noyau  $X$ . George Gamow fut le premier en 1928 à interpréter la radioactivité  $\alpha$  grâce à l'effet tunnel. Il considéra que le noyau  $X$  était constitué au préalable de la particule  $\alpha$  et du noyau  $Y$ . L'énergie potentielle  $V(x)$  d'interaction entre ces deux particules est une fonction de la distance  $x$  qui les sépare dont l'allure est représentée sur la figure 5.

- pour des grandes valeurs de  $x$ , cette énergie potentielle correspond à la répulsion électrostatique, et présente donc un profil coulombien de la forme  $\frac{K}{4\pi\epsilon_0 x}$
- pour  $x < x_0$ , les interactions nucléaires attractives interviennent et l'énergie potentielle est un puits très profond.
- pour l'uranium 238 :  $Z = 92$  et  $x_0 = 3,50 \times 10^{-15}$  m. La mesure de l'énergie  $\mathcal{E}$  des particules  $\alpha$  émises par ce noyau donne une valeur proche de 4,00 MeV.

□ 30 — Déterminer l'expression de la constante  $K$  en fonction de  $Z$  et de la charge élémentaire  $e = 1,61 \times 10^{-19}$  C. En déduire la hauteur  $V_0$  de la barrière d'énergie potentielle à franchir. Calculer la distance  $x_m$  à laquelle l'énergie potentielle coulombienne est égale à  $\mathcal{E}$ . Donner un ordre de grandeur de la largeur de la barrière d'énergie potentielle à franchir. Peut-on considérer que la barrière est épaisse ? On donne la masse de la particule  $\alpha$ ,  $m_\alpha = 6,64 \times 10^{-27}$  kg et on rappelle que  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98 \times 10^9$  SI.

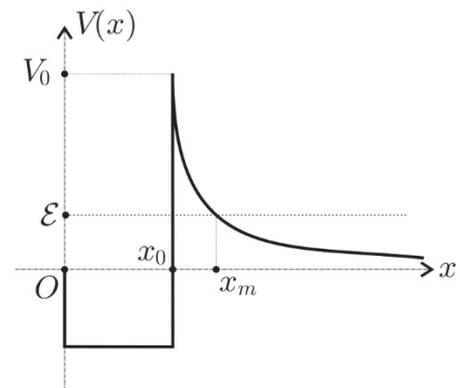


FIGURE 5 – Allure de l'énergie de potentielle

Etant donné que la barrière d'énergie potentielle n'a pas la forme simple de celle étudiée dans la section II.B, on ne peut donc plus utiliser directement l'approximation de  $T$  obtenue à la question 29. Pour  $x > x_0$ , on peut cependant approcher la fonction  $V(x)$  par une succession de barrières rectangulaires de hauteur  $V(x)$  et de largeur  $dx$  (Voir figure 6) suffisamment épaisse pour pouvoir utiliser l'approximation.

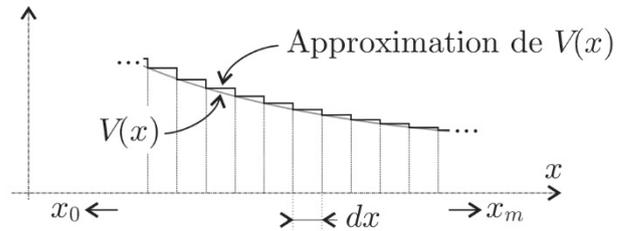


FIGURE 6 – Approximation de la barrière.

▣ 31 — En généralisant le résultat obtenu pour  $T$  en fonction de  $T_0$ , déterminer  $T(x + dx)$  en fonction de  $T(x)$ ,  $q$  et  $dx$ . En considérant, pour simplifier la suite du calcul, que  $qdx \ll 1$ , établir la relation

$$\ln(T) \approx -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m_\alpha \left( \frac{K}{4\pi\epsilon_0 x} - \mathcal{E} \right)} dx$$

▣ 32 — On admettra que

$$\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{\frac{x_m}{x} - 1} dx \approx x_m \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}} \right)$$

En déduire la loi de Gamow-Condon-Gurney, valable pour  $\frac{x_0}{x_m} \ll 1$  :

$$\ln(T) = a - \frac{b}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

Dans laquelle on exprimera  $a$  et  $b$  en fonction des données du problème.

▣ 33 — En considérant que la particule fait des aller-retour dans une région d'extension  $2x_0$  et que l'on peut obtenir un ordre de grandeur de la vitesse de la particule  $\alpha$  en utilisant la relation  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_\alpha v^2$ , estimer l'expression du temps moyen  $t_m$

entre deux rebonds de la particule sur la barrière d'énergie potentielle. En déduire celles du nombre moyen de rebonds par seconde, de la probabilité  $dp$  d'émission  $\alpha$  pendant  $dt$  et du temps de demi-vie  $\tau_{1/2}$  de l'émetteur  $\alpha$ . En admettant que  $t_m$  varie peu d'un émetteur  $\alpha$  à un autre déterminer une relation entre  $\ln(\tau_{1/2})$  et  $\mathcal{E}$ . Cette loi fut établie empiriquement par Geiger et Nuttall en 1911.

▣ 34 — Comparer les résultats précédents à ceux que l'on peut déduire des mesures rassemblées sur la figure 7.

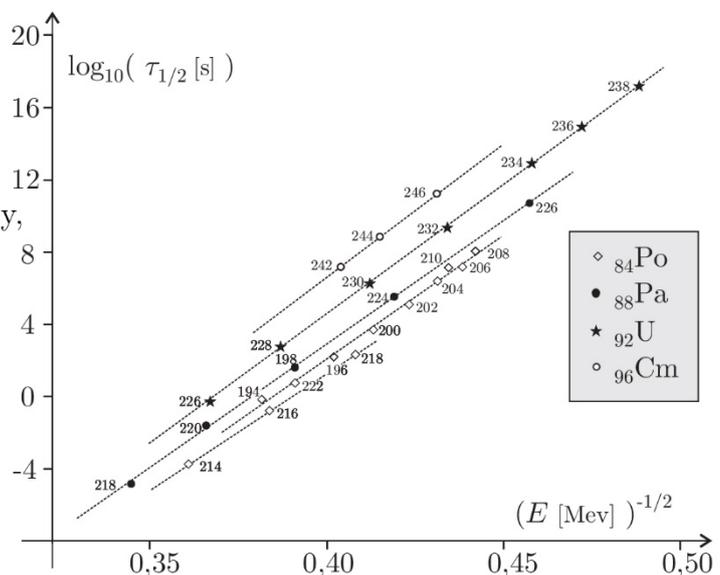


FIGURE 7 – Loi de Geiger-Nuttall

**FIN DE LA PARTIE II**

**FIN DE L'ÉPREUVE**