Physique : DM10

Partie A – L'atome le plus simple de l'univers (CCP MP-2018)

Q1) Soit $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}}$

Q2) Trajectoire circulaire uniforme : $m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$\Leftrightarrow v = \boxed{\sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi m_e \varepsilon_0 r}}}$

Q3) Soit $dE_p = -\vec{F}.d\vec{OM} \Rightarrow E_p = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

or $E_c = \dfrac{1}{2}m_e v^2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\Rightarrow \boxed{E_c = -E_p/2 = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}}$

Q4) On a $\vec{L} = r\vec{u_r} \wedge (m_e\vec{v}) \Rightarrow L = \boxed{\sqrt{\dfrac{m_e r e^2}{4\pi\varepsilon_0}}}$

Q5) Bohr : $\dfrac{m_e r_n e^2}{4\pi\varepsilon_0} = n^2\hbar^2$ d'où $r_n = n^2 a_B$ avec $\boxed{a_B = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}$

Q6) Soit $E_m = E_c + E_p = \dfrac{E_p}{2} = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n^2 a_B}$

D'où $\boxed{E_n = -\dfrac{R_y}{n^2} \text{ où } R_y = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_B} = \dfrac{m_e . e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}}$

Q7) Rayon de Bohr = rayon de l'atome H dans son état fondamental $1s^1$

<u>A.N:</u> <u>$a_B = 52,919$ pm</u> et <u>$R_y = 13,606$ eV</u>

Q8) Soit $E_m = \frac{E_p}{2} = -E_c$ d'où $\frac{1}{2} m_e v_m^2 = + R_y/n^2$

$$\Leftrightarrow v_m^2 = \frac{2R_y}{m_e n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_m = \sqrt{\frac{2R_y}{m_e}} \cdot \frac{1}{n}}$$

A.N : $v_1 = 2{,}1877 \cdot 10^6\ ms^{-1}$ $\Rightarrow$ $\frac{v_1}{c} \ll 1$ $\Rightarrow$ mouvement non relativiste

Q9) Soit $\Psi(\vec{r},t) = k(\vec{r},t)\, e^{-iEt/\hbar}$ $\rightarrow$ $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} k(\vec{r},t)\, e^{-iEt/\hbar}$

d'où Schrödinger s'écrit : $\boxed{E\, k(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} k(\vec{r},t) + E_p(\vec{r}).\, k(\vec{r},t)}$

Q10) D'après Q3, $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Q11) . Si $k(\vec{r}) = k(\theta)$ alors $\Delta k = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}$ car $r = R$.

. Comme $E_p = 2E$ on a : $0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e R^2}\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + E.k$.

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\hbar^2}{2m_e R^2}\frac{\partial^2 k(\theta)}{\partial \theta^2} = E\, k(\theta)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 k}{d\theta^2} + \frac{2m_e R^2 E}{\hbar^2} k(\theta) = 0$$

or $E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2 k}{d\theta^2} - \underbrace{\frac{m_e R e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}}_{q^2} k = 0$

D'où $\boxed{k(\theta) = A e^{iq\theta} + B e^{-iq\theta}}$

Q12) Il faut que $K(\theta + 2\pi) = K(\theta)$ pour cela il faut que η soit un entier n par exemple.

$$\Rightarrow \frac{m_e R e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} = n^2$$

$$\Rightarrow R = n^2 . \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e . e^2}$$

On retrouve le résultat $\boxed{R = n^2 . a_B}$

Q13) Lors de la désexcitation : $\boxed{E_p = E_{sup} - E_{inf}}$

$$\Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda} = -\frac{R_y}{n^2} + \frac{R_y}{n'^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ où } R_H = \frac{R_y}{hc}}$$

Q14) Soit $R_H = 1,0974.10^7 m^{-1}$ d'où le tableau suivant

	H_α	H_β	H_γ	H_δ
λ_{Ritz} (nm)	656,10	486,00	433,93	410,06
λ_{exp} (nm)	656,3 ± 0,3	486,1 ± 0,2	434,0 ± 0,2	410,2 ± 0,2

Les intervalles d'incertitude englobent bien les valeurs de Ritz

Q15) Soit $v_1 = \sqrt{\frac{2R_y}{m_e}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} = \alpha . c$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{v_1}{c}}$ qui est sans dimension

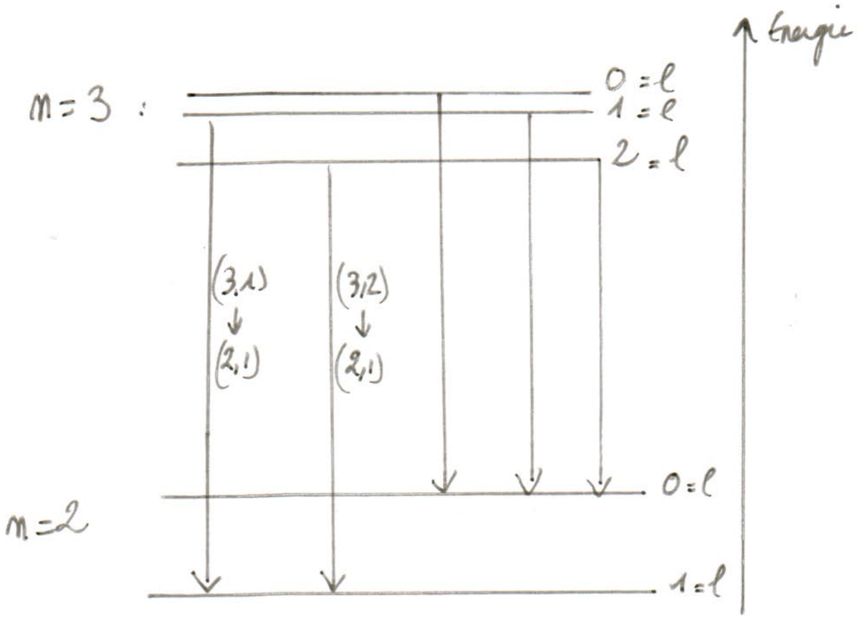
Q16) On a donc $\alpha = 7,2974.10^{-3}$ et $1/\alpha = 137,03$

Q17) • La formule de Sommerfeld apporte une correction à la formule de Bohr. Il y a dégénerescence pour un n donné.

• Pour un n donné on a n niveaux d'energies possibles :

Si $n=2$: $\begin{cases} l=0 \\ l=1 \end{cases}$ et Si $n=3$: $\begin{cases} l=0 \\ l=1 \\ l=2 \end{cases}$

Q18)



D'après la formule de Sommerfeld : $E_{n,l} = E_n - \dfrac{\alpha^2 R_y}{n^4}\left(\dfrac{n}{l+1} - \dfrac{3}{4}\right)$

avec $\dfrac{n}{l+1} \geq 1$ d'où $E_{n,l}$ décroit avec l

$\Rightarrow$ Pour un n donné, le niveau de plus basse énergie est celui de l le plus élevé.

Soit $E_{2,l} = E_2 - \dfrac{\alpha^2 R_y}{16}\left(\dfrac{2}{l+1} - \dfrac{3}{4}\right) \Rightarrow \Delta E = -\dfrac{\alpha^2 R_y}{16}(1-2)$

$\Rightarrow \boxed{\Delta E = \dfrac{\alpha^2}{16} R_y} = 4{,}5283 \cdot 10^{-5}\,eV$

Q19) Soit $\begin{cases} \Delta E_a = E_{3,1} - E_{2,0} \\ \Delta E_b = E_{3,1} - E_{2,1} \end{cases}$

D'où $\Delta E = E_{2,1} - E_{2,0} = \Delta E_f$.

$\Rightarrow hc \cdot \Delta\sigma = \Delta E_f$

$\Rightarrow \boxed{\Delta E_f = hc \cdot \Delta\sigma} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\sigma = \dfrac{\Delta E_f}{hc}} = \underline{\underline{0{,}36524\ cm^{-1}}}$

Q20)

- Si $\sigma_m = 15237{,}40\ cm^{-1} \rightarrow \lambda_m = 656{,}2799\ nm$: <u>ROUGE</u>

- Et $\dfrac{\Delta\sigma_{exp}}{\sigma_m} = 2{,}36.10^{-5} \ll \dfrac{\Delta\sigma}{\sigma}(Na) \Rightarrow$ doublet plus fin que le sodium.

Partie B – Radioactivité et effet tunnel (Mines 2016 – PC)

18) Soit $dP = |\Psi|^2 dx \Rightarrow \boxed{[\Psi] = L^{-1/2}}$

19) On a 100% de chance de trouver l'e^- dans l'espace tout entier.

20) Soit $\rho = |\Psi|^2$ représente la densité de probabilité de présence du quanton t.q

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

21) . Particule non relativiste : $v/c \ll 1$

. Soit $\Psi(x,t) = \varphi(x) f(t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$ par conséquent :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi = E\varphi \quad \text{où } \varphi = \varphi(x)}$$

d'où $\boxed{dP = |\Psi|^2 dx = |\varphi|^2 dx}$ car $|f(t)|^2 = 1$

22) On a $V(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\varphi = 0$

Comme $E = \hbar\omega > 0$ on a alors $\varphi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}}$$

OPPH se propageant vers $x > 0$.

OPPH se propageant vers x négatifs

23) En relation avec le cours sur les ondes :

$$\boxed{\vec{k} = \pm k\vec{u}_x \quad \text{où } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

Or $E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}}$

24) En mécanique classique, une particule ne peut pas franchir une barrière énergétique plus haute que son énergie de départ. La particule serait donc réfléchie.

25) Vu que $V=0$ on a $\begin{cases} \underline{\varphi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}} \\ \underline{\varphi_{III}(x) = Ce^{ikx} + \cancel{De^{-ikx}}} \end{cases}$ où $D=0$ car l'onde ne revient pas de l'infini.

26) Soit $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \dfrac{2m(\varepsilon - V_0)}{\hbar^2}\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{II}(x) = De^{qx} + Ee^{-qx}}$ où $q = \sqrt{\dfrac{2m(V_0-\varepsilon)}{\hbar^2}}$

27) CL : $\boxed{\begin{cases} \varphi(0^-) = \varphi(0^+) \\ \varphi(a^-) = \varphi(a^+) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi'(0^-) = \varphi'(0^+) \\ \varphi'(a^-) = \varphi'(0^+) \end{cases}}$ et C. normalisation : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 dx = 1}$

28) Soit $\vec{j} = \dfrac{i\hbar}{2m}\left[\varphi\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial x} - \varphi^*\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\vec{u}_x$

<u>Région III</u> : $\varphi_{III} = Ce^{ikx}.e^{-i\omega t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_{III}}{\partial x} = (ik)\varphi_{III} \\ \varphi_{III}^* = Ce^{-ikx}e^{+i\omega t} \quad \text{et } |\varphi_{III}|^2 = |C|^2 \\ \dfrac{\partial\varphi_{III}^*}{\partial x} = (-ik)\varphi_{III}^* \end{cases}$

d'où $\vec{j}_{III} = \dfrac{i\hbar}{2m}\vec{u}_x\left[(-ik)|\varphi_{III}|^2 - (ik)|\varphi_{III}|^2\right] = \boxed{\dfrac{\hbar k}{m}|C|^2\vec{u}_x = \vec{j}_{III}}$

<u>Région I</u> : $\varphi_I = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\varphi_i} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\varphi_r} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_I^* = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} = \varphi_i^* + \varphi_r^* \\ \dfrac{\partial\varphi_I}{\partial x} = ik\left[Ae^{ikx} - Be^{-ikx}\right] = ik\left[\varphi_i - \varphi_r\right] \\ \dfrac{\partial\varphi_I^*}{\partial x} = -ik\left[Ae^{-ikx} - Be^{ikx}\right] = (-ik)\left[\varphi_i^* - \varphi_r^*\right] \end{cases}$

D'où $\vec{j}_I = \dfrac{i\hbar}{2m}\vec{u}_x\left[\left(-ik|\varphi_i|^2 + ik|\varphi_r|^2 + \underline{ik\varphi_i\varphi_r^*} - \underline{\underline{ik\varphi_r.\varphi_i^*}}\right) - \left(ik|\varphi_i|^2 - ik|\varphi_r|^2 - \underline{\underline{ik\varphi_i^*\varphi_r}} + \underline{ik\varphi_i\varphi_r^*}\right)\right]$

$= \dfrac{\hbar k}{m}\vec{u}_x\left[|\varphi_i|^2 - |\varphi_r|^2\right] \rightarrow \boxed{\vec{j}_I = \dfrac{\hbar k}{m}\vec{u}_x\left[|A|^2 - |B|^2\right]}$

<u>Interprétation</u> : . Soit $\vec{j}_I = \vec{j}_i + \vec{j}_r$ où $\begin{cases} \vec{j}_i : \text{probabilité de se déplacer vers } x>0. \\ \vec{j}_r : \quad \text{——} \quad " \quad \text{——} \quad " \quad x<0. \end{cases}$

. Et $\vec{j}_{III}$ traduit la probabilité de franchir la barrière

$\Rightarrow \boxed{R = \dfrac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \dfrac{|B|^2}{|A|^2}}$ et $\boxed{T = \dfrac{\|\vec{j}_{III}\|}{\|\vec{j}_i\|} = \dfrac{|C|^2}{|A|^2}}$

29) <u>A.N</u> :

a	0,50mm	1,00 mm	2,00mm
qa	2,58	5,16	10,3
T	$2{,}27.10^{-2}$	$1{,}32.10^{-4}$	$4{,}38.10^{-9}$

Pour la barrière épaisse : $qa \gg 1$ d'où $T = \dfrac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\,sh^2(qa)}$

est t.q $\begin{cases} sh\, qa \sim e^{qa} \\ \text{et} \\ e^{qa} \gg 1 \end{cases}$ d'où $T \sim \dfrac{4E(V_0-E)}{V_0^2}\,\dfrac{1}{\left(e^{2qa}/2\right)^2}$

$$\Rightarrow T \sim \underbrace{\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}}_{T_0(E,V_0)} e^{-2qa} \quad \Rightarrow \ln T \sim \ln T_0 - 2qa.$$

<u>Remarquons que</u> : $\dfrac{\partial T_0}{\partial E} = \dfrac{16}{V_0^2}(V_0 - 2E)$ d'où

E	0		$V_0/2$		V_0
$\partial T_0/\partial E$		+	0	−	
T_0	0	↗	4	↘	0

$\ln 4 \sim 1{,}3$.

A part aux positions extrêmes $|\ln T_0| \ll |-2qa| \Rightarrow$ $\boxed{\ln T \sim -2qa}$

30) . Soit ${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}X$ d'où $V = \dfrac{(Z-2)e.2e}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$\Rightarrow \boxed{k = 2(Z-2)e^2} = \underline{\underline{4{,}7.10^{-36}\,C^2}}$$

donc $\boxed{V_0 = \dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 x_0}} = 1{,}18.10^{-11}\,J = \underline{74{,}4\ MeV}$

. Soit $\dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 x_m} = E \Leftrightarrow \boxed{x_m = \dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 E}} = \underline{65\ fm}$

. Or $q = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar = 4.10^{15}\,m^{-1} \rightarrow q\underbrace{(x_m - x_0)}_{=a} \simeq 250 \gg 1$

$\rightarrow$ <u>la barrière est dite épaisse</u>

31) D'après 29) $\ln T \simeq -2qa \Leftrightarrow T \simeq e^{-2qa}$

donc $T(x+dx) = T(x)\, e^{-2q\,dx}$

$\Leftrightarrow \ln T(x+dx) = \ln T(x) - 2q\,dx$

$\Leftrightarrow d\ln T = -2q\,dx$

$\Leftrightarrow d\ln T = -2\sqrt{\dfrac{2m(V-E)}{\hbar^2}}\,dx$

D'où $\boxed{\ln T \simeq -\dfrac{2}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{2m_\alpha\left(\dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}-E\right)}\,dx}$ car $\ln T(x_0) \ll \ln T$ d'après 29)

32) D'où $\ln T = -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\displaystyle\int_{x_0}^{x_m}\left(\dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}\cdot\dfrac{1}{E}-1\right)^{1/2}dx$ où $E = \dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 x_m}$

$\Leftrightarrow \ln T = -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\displaystyle\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{\dfrac{x_m}{x}-1}\,dx$

$\Leftrightarrow \ln T \simeq -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\times x_m\left(\dfrac{\pi}{2}-2\sqrt{\dfrac{x_0}{x_m}}\right)$ d'après l'énoncé.

$\simeq -\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha . E}\cdot\dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}\left(\dfrac{\pi}{2}-2\sqrt{x_0}\cdot\left(\dfrac{4\pi\varepsilon_0 E}{K}\right)^{1/2}\right)$

$\simeq -\dfrac{1}{4\hbar\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{2m_\alpha}{E}} + \dfrac{2}{\hbar}\sqrt{\dfrac{2m_\alpha x_0 K}{\pi\varepsilon_0}}$

$$\boxed{\Leftrightarrow \ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m_\alpha x_0 K}{\pi\varepsilon_0}} \\ b = \frac{K\sqrt{2m_\alpha}}{4\varepsilon_0\hbar}\end{cases}}$$

33) Par définition : $t_m = \dfrac{2x_0}{v}$ où $E = \dfrac{1}{2}m_\alpha v^2$

$\Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2E}{m_\alpha}} \Rightarrow \boxed{t_m = x_0\sqrt{\dfrac{2m_\alpha}{E}}}$

Le nombre de rebond par unité de temps est :

$$\boxed{n = \frac{1}{t_m} = \frac{1}{x_0}\sqrt{\frac{E}{2m_\alpha}}}$$

. Pour un unique rebond, la probabilité d'émettre une particule est égale à T, avec $T \ll 1$

. Pour un nombre de rebonds $dN = n\,dt$ on a :

$$dP = dN \cdot T \iff dP = \frac{T}{t_m}\,dt.$$

. Soit $N(t)$ le nombre de particules à l'instant t.
et dN le nombre de désintégration entre t et $dt+t$ qui vérifie :

$$N(t+dt) - N(t) = dN < 0.$$
$$= -N(t) \cdot dP$$
$$= -N(t) \cdot \frac{T}{t_m}\,dt$$

d'où $\dfrac{dN}{N} = -\dfrac{T}{t_m}\,dP \iff N = N(0)\,e^{-T/t_m \cdot t}$

donc à $t_{1/2}$: $\dfrac{N(0)}{2} = N(0)\,e^{-T/t_m \cdot t_{1/2}}$

$$\iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{T}{t_m} \cdot t_{1/2}$$

$$\iff \boxed{t_{1/2} = \frac{t_m}{T}\ln 2}$$

Donc $\ln t_{1/2} = \ln t_m - \ln T + \ln(\ln 2)$ avec $\ln T = a - b/\sqrt{E}$

$$\iff \ln t_{1/2} = \ln t_m - a + \frac{b}{\sqrt{E}} + \ln(\ln 2)$$

or $t_m = cste$ d'où $\boxed{\ln t_{1/2} = cste + \frac{b}{\sqrt{E}}}$

34) Sur le graphe proposé on vérifie bien que $\ln t_{1/2}$ est une loi affine en $\frac{1}{\sqrt{E}}$ avec une origine commune qui dépend de l'élément.