Physique : DM6

Partie I – Aspects de la propulsion spatiale (Mines 2015 – PC)

1 Généralités

I.A Aspect cinétique - lois de vitesse

1°) Pour la fusée :
$$\boxed{\begin{cases} \vec{p_F}(t) = m(t)v(t)\,\vec{u_z} \\ \vec{p_F}(t+dt) = \big(m(t) - D_m\,dt\big)\big(v(t)+dv\big)\,\vec{u_z} \end{cases}} \quad (1)$$

Pour les gaz éjectés : $\boxed{\vec{p_g}(t+dt) = D_m\,dt\,[\vec{u}+\vec{v}] = D_m\,dt\,(v-u)\,\vec{u_z}}$ (2)

2°) Soit le système {fusée + gaz} :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{\vec{p_F}(t+dt) + \vec{p_g}(t+dt) - \vec{p_F}(t)}{dt} = m(t)\,\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u_z}\left(\frac{\cancel{m(t)v} + m(t)\,dv - D_m \cancel{dt\,v(t)} - \overbrace{D_m\,dt\,dv}^{\text{ordre 2 négligé}} + \cancel{D_m\,dt\,v} - D_m\,dt\,u - \cancel{m(t)v}}{dt}\right) = m\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u_z}\left(\frac{m(t)\,dv - D_m\,dt\,u}{dt}\right) = -mg\,\vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m(t)\frac{dv}{dt} = D_m u - mg} \quad (3)$$

3°) • La force de poussée $\boxed{\vec{F} = D_m u\,\vec{u_z}}$ (4)

• Pour que la fusée décolle, il faut que $D_m u > mg$.

$$\Rightarrow \boxed{D_m u > m_0 g} \quad (5)$$

4°) La définition de I_s entraîne :
$$\begin{cases} I_s = \dfrac{m}{D_m} \Leftrightarrow D_m = \dfrac{m}{I_s} \\ \text{et} \\ m = \dfrac{D_m u}{g} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_m I_s = D_m \frac{u}{g} \Rightarrow \boxed{I_s = \frac{u}{g}}$$

5°) On résout l'équation ③ : $\frac{dv}{dt} = \frac{D_m}{m} u - g$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{m}\frac{u}{dt} - g.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{d\ln m}{dt} \cdot u - g.$$

$$\Leftrightarrow v = -u \ln m - gt + cste.$$

Or à $t=0$, $\begin{cases} v(0) = 0 \\ m(0) = m_0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -u\ln m_0 + cste$

Donc : $\boxed{v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt}$ (6)

6°) En dehors du champ de gravitation terrestre $\vec{g} = \vec{0}$ d'où :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\ln m}{dt} \cdot u$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v = -u \ln \frac{m_f}{m_i}}$$ (7)

7°) <u>Premier étage</u> : $\Delta v_{21} = -u\ln\left(\frac{34}{134}\right) = 5{,}49\,km\,s^{-1}$

<u>Second étage</u> : $\Delta v_{32} = -u\ln\left(\frac{4}{24}\right) = 7{,}17\,km\,s^{-1}$

$\Rightarrow \Delta v = 12{,}7\,km\,s^{-1}$

<u>Fusée à un seul étage</u> : $\Delta v = -u \ln\left(\frac{14}{134}\right) = 9{,}04\,km\,s^{-1}$

8°) (7) peut s'écrire : $\frac{m_f}{m_i} = e^{-\Delta v/u} \Leftrightarrow \frac{m_u}{m_u + m_c} = e^{-\Delta v/u}$

$$\Leftrightarrow 1 + m_c/m_u = e^{+\Delta v/u}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_c = m_u\left[e^{\Delta v/u} - 1\right]}$$ (8)

Pour $\begin{cases} u_1 = 4{,}00\,km/s \Rightarrow m_{c1} = 1250\,kg \\ u_2 = 20{,}0\,km/s \Rightarrow m_{c2} = 142\,kg. \end{cases}$

I.B) Aspect énergétique

9°) • Soit $\delta E_c = \frac{1}{2}\delta m\,(u-v)^2$

$$\Rightarrow \boxed{P_{jet} = \frac{\delta E_c}{dt} = \frac{1}{2} D_m (u-v)^2} \quad (9)$$

• Et $P_{poussée} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_{poussée} = D_m \cdot uv} \quad (10)$$

10°) Soit : $\eta = \dfrac{P_F}{P_{jet} + P_F}$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{D_m uv}{D_m uv + \frac{1}{2} D_m (u-v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{2uv + u^2 + v^2 - 2uv}$$

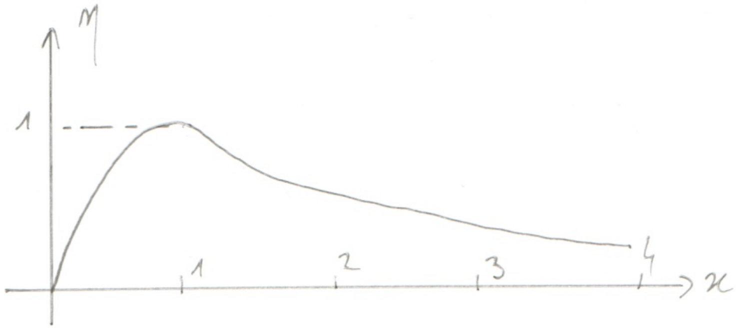
$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2u/v}{1 + (u/v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\eta = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{si } x = u/v \text{ ou } v/u} \quad (11)$$

11°) lorsque $\begin{cases} x \to 0 : \eta \to 0 \\ x \to \infty : \eta \to 0 \end{cases}$

Et : $\dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \underline{x_r = 1}$

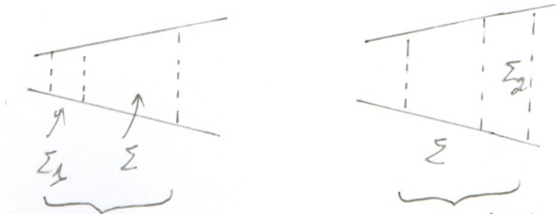


On remarque que $\eta \to 0$:

* si $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$: pas de force de poussée
* si $x \to \infty \Leftrightarrow v = 0$: fusée immobile

II) Limites de la propulsion chimique

12°) Le 1PP en système fermé s'écrit : $\Delta(U + E_c + E_{p\,ext}) = W_p + W' + Q$ (1)



Système fermé à t Système fermé à t+dt

D'où (1) s'écrit : $D_m dt\left[\overbrace{e_{c2} + u_2 + e_{p2}}^{u_2} - \overbrace{e_{c1} - u_1 - e_{p1}}^{u_1}\right] + \Delta U_\Sigma = W_p + W' + Q$

En régime permanent : $D_m dt\left[u_2 - u_1\right] = \dfrac{P_1}{\mu_1} - \dfrac{P_2}{\mu_2} + W' + Q$

$\Leftrightarrow D_m dt\left[h_2 - h_1\right] = W' + Q$

$$\boxed{\Leftrightarrow D_m dt\left[(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (h_1 + e_{c1} + e_{p1})\right] = W' + Q}$$ (12)

A noter plutôt $\delta W'$, δQ.

13°) Ici : $\delta W' = 0$, $\delta Q = 0 \Rightarrow e_c + e_p + h = cste$

En négligeant les variations d'altitude : $e_c + h = cste$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}v^2 + c_p T = cste$.

$$\boxed{\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} T + cste}$$ (13)

D'où : $0 + \dfrac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T_c = \dfrac{1}{2}u_{max}^2 + 0$ car on néglige T_{sortie} face à T_c.

$$\Rightarrow \boxed{u_{max} = \sqrt{\dfrac{2\gamma R T_c}{(\gamma-1)M}}}$$

14°) A.N : • $u_{max} = 3{,}11\ km.s^{-1}$

• $I_s = \dfrac{u_{max}}{g} = 317 s$.

Partie II – Etude de l'éolienne (CCP PSI – 2013)

27) Pour un système fermé on a :

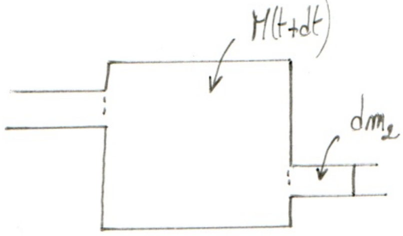
$$\boxed{\Delta(U + E_c + E_{pext}) = W_p + W' + Q}$$

où U : energié interne, E_c : energié cinétique macroscopique

E_{pext} : Energié potentielle des forces extérieures

W_p : travail des forces de pression, W' : travail utile et Q : chaleur échangée.

28) a)



Le système est constitué du fluide :
- contenu dans la partie active : $M(t+dt)$
- qui est sorti entre t et $t+dt$: dm_2

b) On est en régime stationnaire donc :

$$M(t) = M(t+dt) \Rightarrow \boxed{dm_1 = dm_2} \Rightarrow \boxed{D_m = cste}$$

29) En amont on perds le volume dV_1 d'où $dW_1 = p_1 dV_1 = p_1 v_1 dm_1 = p_1 v_1 D_m dt$

En aval on gagne le volume dV_2 d'où $dW_2 = -p_2 dV_2 = -p_2 v_2 dm_2 = -p_2 \underbrace{v_2}_{\text{volume massique.}} D_m dt$

30) Soit $d(U + E_c + E_{pext}) = \delta W_p + \delta W' + \delta Q$

$$= p_1 v_1 D_m dt - p_2 v_2 D_m dt + \delta W' + \delta Q$$

En régime stationnaire : $d(U + E_c + E_{pext}) = dm_2 (u_2 + e_{c_2} + e_{p_2}) - dm_1 (u_1 + e_{c_1} + e_{p_1})$

d'où : $D_m dt \left[(u_2 + p_2 v_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (u_1 + p_1 v_1 + e_{c1} + e_{p1}) \right] = \delta W' + \delta Q$

$$\Leftrightarrow \underline{D_m\left[(h_2+e_{c2}+e_{p2})-(h_1+e_{c1}+e_{p1})\right]=P_u+P_{th}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x = h \Rightarrow \text{en } J.kg^{-1}} \\ P_u : \text{puissance utile t.q } P_u = \delta W'/dt \\ P_{th} : \text{puissance thermique t.q } P_{th} = \delta Q/dt \end{cases}$$

31) On a $Y_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{R}$

or $[R] = \left[m\frac{dv}{dt}\right] = MT^{-1}[v]$ $\Rightarrow$ $\underline{Y_m = D_m = kg.s^{-1}}$

32) En régime permanent $D_m = cste$

Or le fluide est incompressible d'où $D_v = cste$ $\Rightarrow$ $\underline{S_A v_A = S_b V_B = S v}$ vitesse

33) On va appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

. Entre S_A et Σ_1 : $p^0 + \mu v_A^2/2 = p_1 + \mu v^2/2$

. Entre Σ_2 et S_B : $p^0 + \mu v_B^2/2 = p_2 + \mu v^2/2$

car on néglige l'effet de pesanteur (en plus $z = cste$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p^0 + \mu/2\,(v_A^2 - v^2) \\ p_2 = p^0 + \mu/2\,(v_B^2 - v^2) \end{cases}$$

34) a) On a : $\vec{R}_{12} = +\vec{F} - (\vec{F}_{p,\Sigma_1} + \vec{F}_{p,\Sigma_2})_{air \to pale}$.

En projection sur Ox : $R_{12} = F - (-p_1 S + p_2 S)$

$\Leftrightarrow \underline{R_{12} = F + p_1 S - p_2 S}$

b) Entre Σ_1 et Σ_2 : $v_1 = v_2 = v$ $\Rightarrow$ $\underline{R_{12} = 0}$

c) Donc $\underline{F = (p_2 - p_1)S}$

d) De la question (33) : $p_2 - p_1 = \mu/2\,(v_B^2 - v_A^2)$ $\Rightarrow$ $F = \frac{\mu}{2}(v_B^2 - v_A^2)S$

Or $\rho = \mu \Rightarrow \boxed{F = \frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_A^2)S}$

(35) D'après (E2) : $D_m(V_B - V_A) = F + F_p$ or $F_p = 0$ d'après l'énoncé

d'où $F = D_m(V_B - V_A)$

$\Leftrightarrow \boxed{F = \rho S v (v_B - v_A)}$

(36) En égalisant les expressions de F : $v(v_B - v_A) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$

$\Leftrightarrow \boxed{v = \frac{v_B + v_A}{2}}$

(37) • Il n'y aucun transfert thermique du fluide vers l'extérieur donc $P_{th} = 0$ car l'écoulement est parfait.

• On a affaire à un gaz parfait dont les forces d'interaction sont nulles. Ces forces ne travaillant pas il n'y aura pas de fluctuation de température $\Rightarrow \underline{\Delta h = c_p \Delta T = 0}$

(38) D'après E.1 : $D_m\left[(h_2 - h_1) + (e_{c2} - e_{c1}) + \underbrace{(e_{p2} - e_{p1})}_{=0}\right] = P_u + P_{th}$

$\Leftrightarrow D_m(e_{c2} - e_{c1}) = P_u$

$\Leftrightarrow \frac{D_m}{2}(v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol}$ où $\boxed{P_u = -P_{eol}}$

$\Leftrightarrow \frac{\mu S v}{2}(v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol}$.

$\Leftrightarrow \boxed{\rho S \frac{(v_B + v_A)(v_B^2 - v_A^2)}{4} = -P_{eol}}$

(39) D'où $P_{eol} = -\rho \frac{S v_A^3}{4}(1 + x)(x^2 - 1) \quad \Leftrightarrow \boxed{P_{eol} = \rho \frac{S v_A^3}{4}(1 - x^2)(1 + x)}$

or $\frac{dP_{eol}}{dx} = (1 + x)(-2x) + (1 - x^2) = 1 - x^2 - 2x^2 - 2x = 1 - 2x - 3x^2 = -3(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3})$

t.q : $x = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{1}{3}$ ou $\cancel{-1/3}$

D'où $P_{max} = \rho S v_A^3/4 \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{8}{9}\right) \Rightarrow \boxed{P_{max} = \frac{8}{27}\rho S v_A^3}$

40 a) Soit $\boxed{P_{max} = \frac{8}{27} \rho \cdot \pi D^2/4 \cdot v_A{}^3}$

$= \underline{\underline{1{,}49 \text{ MW}}}$

b) Soit $N = \frac{P_{NU}}{P_{éol}} \sim \underline{\underline{1000 \text{ éoliennes}}}$