Physique : DS1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

On respectera les numéros des questions dans sa copie : Q1, Q2 ou II-1-1…

I – Nasa's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les deux parties du problème ainsi que les sous-parties sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées ailleurs.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas ou peu guidées. Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé). Les principales données numériques sont regroupées dans le document réponse.

I Le voyage entre la Terre et Mars

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

I.A – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

Q 1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

Q 2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.

Q 3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L}_O = L_O\vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de L_O et m. Quel est le nom de cette grandeur ?

Q 4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.B – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

Q 5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m.

Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G, M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

I.C – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T, a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T.

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Q 11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

I.D – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

Q 12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

Q 13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\vec{V_T}$ colinéaire à $\vec{V_T}$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0)=0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

Q 15. Justifier que r_P, le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \dfrac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e.

Q 18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.

Q 19. Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

Q 20. Exprimer $C = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de a_T et V_T''.

Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne : $\displaystyle\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2{,}15$ avec l'excentricité calculée en question 16.

II - Etude de deux mouvements avec force de frottement

A -Mouvement d'une bille dans un liquide

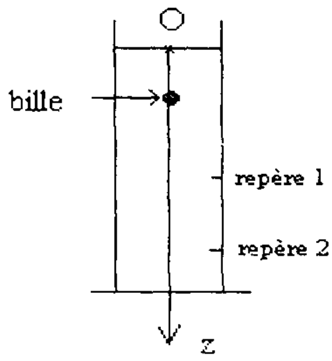
Dans tout le problème, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen. Dans cette partie, on étudie le mouvement de translation d'une bille d'acier de rayon **r** et de masse m dans de la glycérine de viscosité **η.**

On admettra que les actions de frottement exercées par le liquide sur la bille en mouvement sont modélisables par une force : $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente le vecteur vitesse de la bille.

Données pour ce problème :

- masse volumique de l'acier: $\rho = 7800$ kg.m^{-3}
- masse volumique de la glycérine $\rho_0 = 1260$ kg.m^{-3}
- $g = 9{,}8$ m.s^{-2}

On dépose la bille en 0 sans vitesse initiale dans la glycérine contenue dans une grande éprouvette.



I-1) Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède exercée sur la bille plongeant dans la glycérine.

I-2) Faire le bilan des forces exercées sur la bille plongeant dans la glycérine en précisant le référentiel de travail.

I-3) Si l'on applique le principe des actions réciproques (appelé aussi principe de l'action et de la réaction), quelle est la force réciproque du poids de la bille ?

I-4) Etablir l'équation différentielle que vérifie la valeur de la vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie de la bille.

I-5) Montrer que la vitesse de la bille tend vers une vitesse limite $\overrightarrow{v_{lim}}$ telle que :

$$\|\overrightarrow{v_{lim}}\| = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} g r^2$$

Donner l'expression de la constante de temps τ caractéristique du mouvement.

I-6) On mesure cette vitesse limite pour différents rayons de la bille ; la vitesse limite est mesurée entre les deux repères notés sur la figure.

[r]/mm	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
[v_{lim}]/cm.s^{-1}	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5

En déduire la viscosité η de la glycérine (la méthode utilisée sera présentée et on précisera l'unité de la viscosité).

Calculer la constante de temps pour r=1,5 mm et conclure sur le caractère observable du phénomène.

B - Mouvement d'un proton dans un liquide

On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).

II-1) Un proton de masse m & de charge e, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale v_0 en un point fixe 0 ; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est une constante positive et v est la vitesse du proton à l'instant de date t.

Par la suite, on posera : $\omega = \frac{eB}{m}$ & $\tau = \frac{m}{k}$

II-1-1 Faire le bilan des forces exercées sur le proton se déplaçant dans le liquide (on négligera le poids du proton et la poussée d'Archimède).

II-1-2 Etablir l'équation différentielle du mouvement du proton.

II-2) On désigne par Oxyz un trièdre orthogonal direct lié au référentiel Galiléen et par $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ la base de vecteurs unitaires associés.

On choisit : $\vec{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ & $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$

II-2-1 Si la force de frottement était négligeable, quelle serait la variation d'énergie cinétique du proton ?

Rappeler, avec un minimum de calculs, quelle serait alors la trajectoire du proton (on donnera les caractéristiques de cette trajectoire).

II-2-2 - Qualitativement, quelles sont les modifications apportées par la force de frottement fluide sur cette trajectoire ?

II-2-3 Montrer que l'équation différentielle du II-1-2 peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles :

$$\frac{dv_x}{dt} = av_y - bv_x \ \ (1) \quad et \quad \frac{dv_y}{dt} = -av_x - bv_y \ \ (2)$$

Déterminer a et b.

II-2-4 On pose j le nombre complexe tel que $j^2=-1$ pour résoudre le système d'équations différentielles, on introduit le complexe $\underline{V} = v_x + j\,v_y$.

Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes à une équation différentielle dont la solution est:

$$\underline{V} = v_0 e^{-(b+ja)t}$$

En déduire $v_x\ et\ v_y$.

II-3)

II-3-1 Déduire de $\underline{V}$ l'expression de $\underline{X} = x + j\,y$ en fonction de a, b, v_0 et t.

II-3-2 Déterminer la limite, notée $\underline{X}_\infty$, de $\underline{X}$ lorsque t tend vers l'infini.

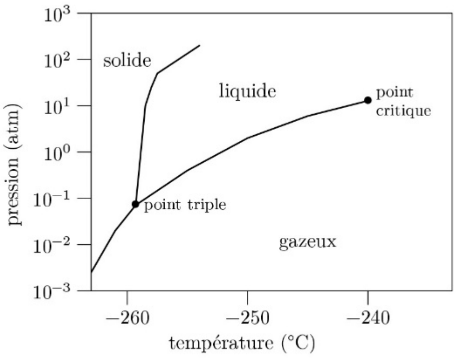
En déduire la position limite $M_\infty\,(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de a, b et v_0.

II-3-3 Donner l'allure de la trajectoire.

Données

Masse du Soleil	$M_S = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^6$ km
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^6$ km
Constante gravitationnelle	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9{,}81$ m·s^{-2}
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365$ jours
Période de révolution de Mars	$T_M = 687$ jours
Pression de vapeur saturante de H_2 à $T_{\text{vap}} = -253$ °C	$P_{\text{vap}} = 1{,}00 \times 10^5$ Pa
Enthalpie molaire de vaporisation	$\Delta H_{\text{vap}} = 0{,}900$ kJ·mol^{-1}
Masse volumique de LH_2 (hydrogène liquide)	$\mu_{LH_2} = 71{,}0$ kg·m^{-3}
Masse molaire du dihydrogène	$M_{H_2} = 2{,}00$ g·mol^{-1}
Rapport des capacités c_P/c_V du dihydrogène gazeux	$\gamma = 1{,}4$
Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31$ J·K^{-1}·mol^{-1}
Constante spécifique du dihydrogène	$r = R/M_{H_2} = 4{,}16$ kJ·K^{-1}·kg^{-1}
Capacité thermique massique à pression constante de l'hydrogène gazeux	$c_p = r\gamma/(\gamma - 1)$

Diagramme (P, T) du dihydrogène

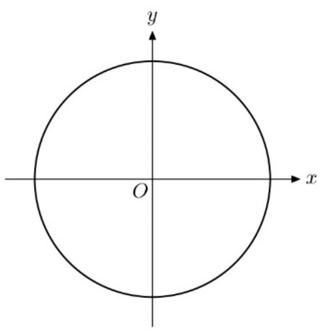


Formulaire

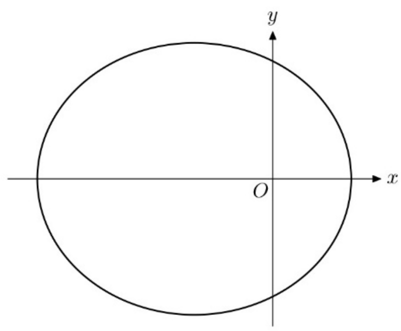
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

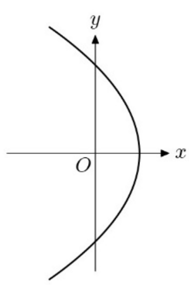
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



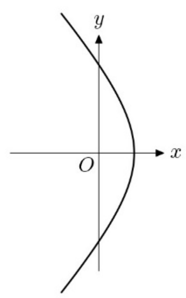
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

FEUILLE A RENDRE AVEC SA COPIE

Questions 7 et 10

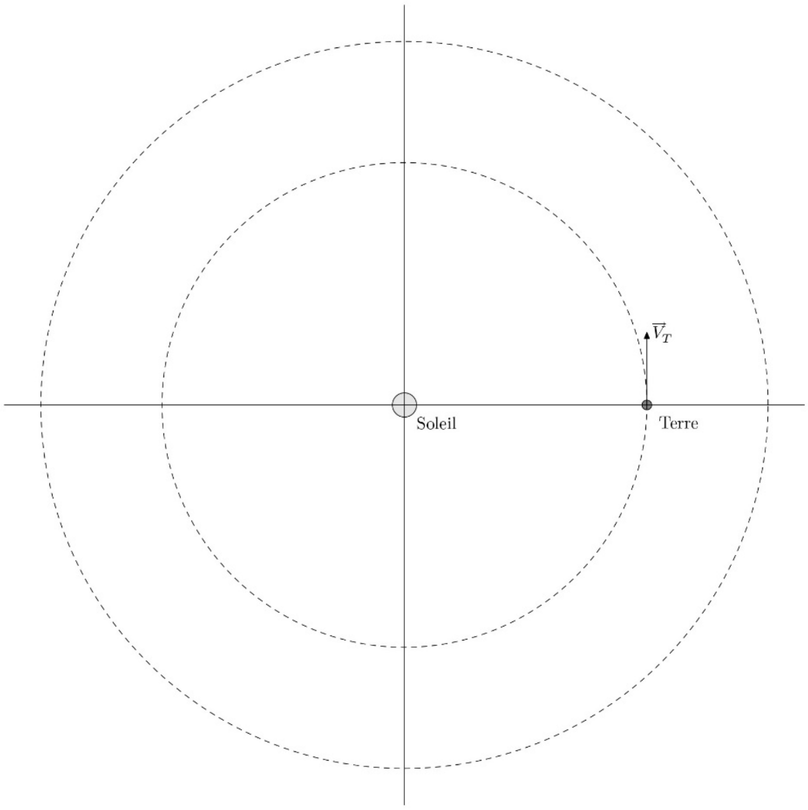


Figure A

Questions 14 et 16

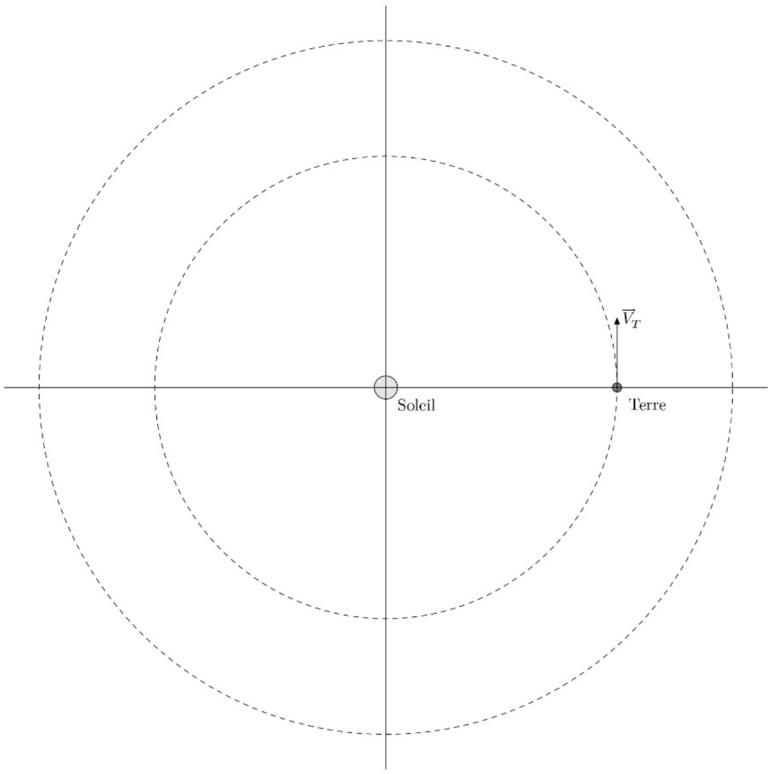


Figure B